応用数理学テキスト(Ver.2)

2008 年 1 月
水産科学院　海洋産業科学講座
水産海洋工学領域　芳村 康男

目　次

【概　　要】
水産・海洋における物理現象を解析するための数学的手法（常微分方程式、偏微分、フーリエ変換、ラプラス変換など）を物理現象と対比し、物理・数学の初心者でも容易に理解できる講義内容とする。

【学習目的】
1. 自然現象を理解しこれを数式表現する能力を身につける。
2. 常微分方程式、フーリエ変換、ラプラス変換などを活用して現象の予測や計算ができる能力を身につける。
3. 偏微分の概念を理解し、ある現象を数値近似する場合の（誤差）最小自乗法などの活用法を理解する。

【到達目標】
1. ニュートン力学を理解して、常微分方程式を作ることがでる。
2. ラプラス変換方法を学習して、常微分方程式を解くことができる。
3. フーリエ級数とフーリエ変換を学習し、海洋の波、音波などの波動現象に対して、時間空間と周波数（波動）空間の相互変換ができる。
4. 偏微分の概念を理解し、これを活用した最小自乗法などの統計解析へ応用することができる。

【学習内容】
1. 自然現象を記述するには、スケール（単位）が必要である。これらの現象を表現する単位(SI 単位系)の考え方と表記法を学習する。
2. 質点系のニュートン力学を理解し、運動方程式（常微分方程式）の作り方を学習する。
3. ラプラス変換とその計算方法を学習する。
4. ラプラス変換による常微分方程式の解法を学習する。
5. 振り子や浮体の運動（二階線形常微分方程式）計算に応用し、周期運動について学習・理解する。
6. 海洋の波、音波などに対し、時間空間と周波数空間の概念を学習する。
7. フーリエ級数展開からフーリエ変換の方法について学習する。
8. フーリエ変換の応用として周波数解析とスペクトルについて学習する。
9. 周波数応答の概念を学び、フーリエ変換とラプラス変換の関係について理解する。
10. 数式化（モデル化・近似）の必要性について学ぶ。
11. 数式化における誤差最小自乗法を例に偏微分の考え方を学習する。
12. 最小自乗法を活用して自然現象の数式近似の実践を学習する。

１．主な物理(力学)系の単位と力

環境や資源を測るには，計測対象の単位とスケールが必要になる。ここでは，代表的な単位の例をあげて，その成り立ちを考え，計測に必要な国際単位系(SI)を理解しよう。**そのベースになるのは「地球」と「水」である。**

１．１　角度

①度数

度数法は，平面を定点を通る直線によって 360 等分する時，その等分された一つの角として定まる角度を 1 度（°）として基本単位に持つ単位系である。更に，60 分法を用いて，1°= 60′(分)，1′= 60″(秒)として下位の単位を定める。定義から，全方位角は 360°である。

この体系は，暦における 1 年の日数（　360 日）に由来している。

フィールド計測で使用する角度の単位はこの度数法が中心になる。

②弧度(ラディアン)

360°=2π 数学・物理学で使用。

③その他（参考：SI 単位ではない）

十進法の角度単位(グラード)	-- 円周を 400 等分（直角を 100 等分）	主に土木工学で使用
mil（ミル）	-- 円周を 6400 等分	軍用に使われる
点（ポイント）	-- 円周を 32 等分	航海で今も使用されている。
時	-- 円周を 12 等分	ﾖｯﾄ競技など

１．２　時間

地球の自転時間（1周の回転時間）を 24 時間とし，1時間を更に 60 分法を用いて，1°= 60′(分, minute），1′= 60″(秒,second）として下位の単位を定める。従って，１時間＝15°の地球の回転時間となる。（角度の度数と混合しないように注意！）

角度の度数と時間の関係は密である。角度は全周 360°に対し，時間は 24 h。（１時間＝15°）地球上で、南中時刻を正確に計測すれば経度が求まる。このため、船の航海には正確な時計が不可欠であった。緯度は（北半球では）北極星の仰角を計測すれば求まる。

１．３　距離（長さ）と速度・加速度

1）距離（長さ）

物を測る基本の一つが距離（長さ）である。古来，人は身近なものを尺度（スケール）として活用してきた。一歩の長さを 1-foot としたのが「feet」の単位。親指（大人の男性）の幅を「inch」という単位を作り出した。日本の「尺」「寸」という単位も同様である。しかし，人間の行動範囲が狭い間はその地域だけで単位が統一されていれば良かったが，行動範囲が広くなり世界規模で商取引等が行われるようになると，単位の不統一が大きな問題となってきた。

①メートル(m)

長さのスケールについては, フランス革命後の 1790 年 3 月に, 国民議会議員であるタレーラン・ペリゴールの提案によって，世界中に様々ある長さの単位を統一し，新しい単位を創設することが決議された。それを受けて，1791 年に，**地球の北極点から赤道までの経線の距離の 1000 万分の 1 として定義される新たな長さの単位「メートル」が決定された**（従って，地球の円周は約 4 万キロメートルになる）。その 85 年後の 1875 **年，国際条約で世界の単位をメートルで統一する国際条約が決まった。**（現在の１メートルの定義は，より正確に定義する目的で，「真空中で 1 秒間の 299 792 458 分の 1 の時間に光が進む行程の長さ」としている。）

日本がメートル条約に加盟したのは 1886 年(明治 19 年)。1891 年には度量衡法を公布して尺貫法とメートル法との関係を定めた。1921 **年(大正 10 年) 4 月 11 日には度量衡法を改正して，尺貫法からメートル法に暫時置き換えることとなった。（4 月 11 日はメートルの日）**しかし，メートル法に移管したのが 1959 年。全面的にわが国で実施されたのが 1966 年 4 月 1 日という長い年月であった。

②海里（NM）

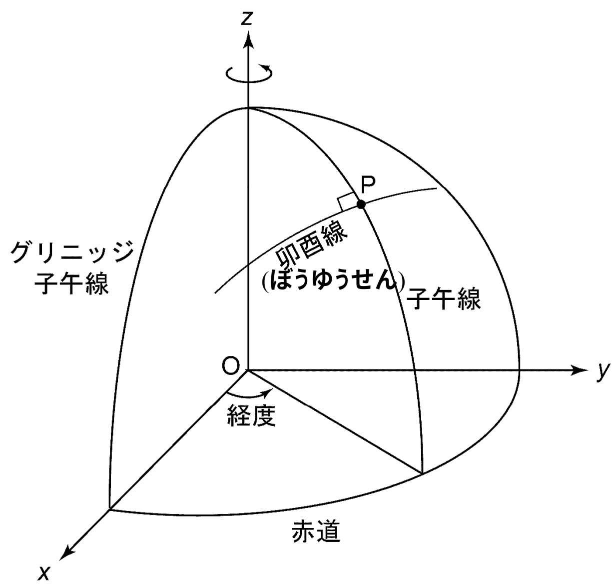
船や飛行機では大陸間を航行するので，緯度，経度という角度座標を用いた方が便利である。この場合の距離は，緯度１分(1°/60)の長さが地球上でほぼ一定（地球を真球とした場合）であることから，この長さを 1 海里 (Nautical Mile) と定義し，上記①のメートルに代わる単位として SI 単位系でも認められている。これをメートルに換算すると，

１NM=40,000/360°/60=1,852m

これに対し，経度 1 分の長さは赤道では上記と同じ長さになるが，緯度によって異なる。地球を真球とすると，

経度１分の長さ=1,852m×cos(緯度)

となる。



２）速度

単位時間あたりの位置の変化（移動する速さ）。

①メートル(m/s)

１秒間に１m 移動する速度を 1 m./s と定義する。

日常生活では，１時間に 1 km (＝1,000m)移動する速度として 1 km/h が良く使用される。

1 km/s= 1,000m /3600s=1/3.6 m/s

あるいは，1 m/s＝3.6 km/h

②ノット(knot)

１時間に１海里(NM)移動する速度を 1 ノットと定義する。１ノットで１時間航走すると緯度１分の航走距離となり緯度・経度を使用して大圏航行する船や航空機で使用される。

1 knot=1.852 km/h

=1,852 m/3600s=0.51444 m/s

３）加速度

単位時間あたりの速度の変化（移動する速度の速度）

１秒間に１m/s 速度が変化する場合を 1 m./s^2 と定義する。

後述する地球上における重力加速度：g は約 9.8m/s^2 である。

１．４　力と質量

物質には多かれ少なかれ「重さ」があり，地球もまた大きな「重さ」があるので，相互に引力が働く。これは万有引力と呼ばれ，この力は物質の「重さ」に比例する。ニュートンはこの「重さ」を**質量**と定義し，力:F と運動の関係を次式で表現できるとした。

$$F = m \cdot a \qquad \text{----------------- (1.1)}$$

m: 質量

a: 加速度(速度の時間的変化)

１）質量

質量の単位「kg：キログラム」は，前述のメートル法で，10cm の立方体の体積（1 ﾘｯﾄﾙ）の最大密度における（約 4℃）**蒸留水の質量**」と定義された。（その後 1889 年に直径，高さとも 39mm の円柱形で，白金 90%，イリジウム 10%の合金でできている「国際キログラム原器の質量」に置き換えられた。）

一言で「重さ」の単位であるが，その理解は日常生活では混乱することが多い。「重さ」とは次に示す，力としての重力を意味する場合が日常的に多い。質量と力は区別しよう。

【曖昧な言葉】重量、内容量、船の排水量　-----これらは実質的に質量を表している。

２）力（重力）

地上における重力加速度は g と言う記号で表示され，この値は地域・高度によって多少異なるが，およそ $9.8\mathrm{m./s^2}$ である。「重さ」を表す質量は通常(kg)という単位であり，質量 1kg に作用する**重力**（地上に引きつけられる力）は(2.1)式にしたがって，9.8 ($\mathrm{kg \cdot m/s^2}$)となる。
この単位($\mathrm{kg \cdot m/s^2}$)を N (ニュートン)と言い、9.8N と記載する。

> しかし，・・・・日常の生活では N (ニュートン)という単位はめったに使われない。我々が力の大きさを感じるのは，例えば 1kg の質量を手で持った時，「ああ，これが 1kg」の感覚であり，誰も 9.8N の重力があるなどと言わない！　食料品や雑貨で表示している内容量（重さ）はほとんど，kg か g である。これが現実であり，この現実とのかい離が物理や力学を遠ざけ，物理嫌いにさせる要因にもなっている・・・・。

３）補助スケール

国際単位系(SI 単位)では質量・長さ・時間に関して，以下のような単位が使用される。

物理量	単位
質量	g(グラム)
長さ	m(メートル)
時間	s (秒)

しかし，これでは，大きなものから小さなものまで，一律に使えないので，大きさ（スケール）を表す１０進法の補助単位が使用される。それを以下に示す。これは原則であり，必ずしも使用されないスケールもある。例外として時間は適用されない。また 1,000kg の質量を 1Mg でなく 1t（トン）と言う表現が認められている。

	1,000,000			1,000	100	10	1	0.1	0.01	0.001			0.000001
	10^6			10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}			10^{-6}
	M			K	H	D	-	d	c	m			μ
	メガ			キロ	ﾍｸﾄ	デカ		ﾃﾞｼ	ｾﾝﾁ	ミリ			ﾏｲｸﾛ
長さ				Km	-	-	m	-	cm	mm			μm
質量	(t トン)			Kg	-	-	g	-		mg			μg
力				kN	-	-	N	-	-				
容積				kℓ	hP	-	ℓ	dℓ	cℓ	mℓ			
圧力				kP	-	-	P	-	-	mP			μP

４）密度

流体の質量などのように均一な物質の質量を表現する方法として，単位体積当たりの質量で表示する場合がある。この場合，原則として $1\mathrm{m^3}$ の質量が使われるが，目的に応じて $1\mathrm{cm^3}$(1 立方センチメートル)などが使用される。

清水の密度（１気圧,4℃）$=1{,}000\mathrm{kg/m^3}$　$(= 1\mathrm{t/m^3})$

$=1{,}000\ \mathrm{kg}/(10)^3(10\mathrm{cm})^3=1\mathrm{kg}/$リットル

$=1{,}000\times1{,}000\mathrm{g}/(100\mathrm{cm})^3=1\mathrm{g/cm^3}$

5）比重

物質の密度を上記の蒸留**水**の密度（１気圧,4℃）に対して比率で表したものを比重と呼ぶ。代表的な物質の比重を下表に示す。15℃における平均的な海水の比重は約 1.025 である。

名称	比重
個体（金属）	
マグネシウム	1.74
炭素（石墨）	2.25
アルミニウム	2.699
ジュラルミン（合金）	2.79
炭素（石墨）	2.25
スズ	7.28
マンガン	7.43
鉄（鋳鉄）	7.05～7.30
鋼（炭素鋼・合金）	7.85
ニッケル・クロム鋼	7.80
ステンレス鋼	7.91
銅	8.89
青銅	8.74
ニッケル	8.90
銀	10.49
鉛	11.34
(ハンダ	9.5)
水銀	13.546
金	19.32
白金	21.45
液体	
石油（原油）	0.85～0.93
植物油脂	0.88～0.95
動物油脂	0.91～0.97
海水	1.01～1.05

6）圧力

単位面積当たりに受ける力のことを圧力と言う。$1m^2$(1 平方メートル)に 1N(ニュートン)の力を受ける時，この圧力を 1P(パスカル)と呼ぶ。すなわち，

$$圧力\ 1P=1N/m^2 \qquad \text{--------------------}\ (1.2)$$

海面下 10m では，$1m^2$(1 平方メートル)上部にある海水の質量は 10m×1000kg×1.025 であり，その重力は 10m×1000kg×$9.8m/s^2$×1.025=100,450N となるので，圧力は 100,450P になる。[あるいは **1004.5hP**(ヘクトパスカル), 100.45kP(キロパスカル)となる]

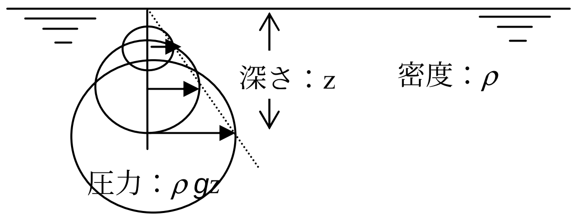
一方，地上の大気圧は水銀柱で約 75cm に相当するので，1 平方メートル当たりの大気の重力は 0.75m×**13.55**×$1000kg/m^3$×$9.8m/s^2$=100,000N となるので大気圧は 100,000 P となる。[あるいは **1,000 hP**(ヘクトパスカル), 100 kP(キロパスカル)]

これはほぼ，上記の**海水 10m** の深さの圧力に等しく，これを旧メートル法では「１気圧(1 bar，バール)=1,000 mm bar (ミリバール)」と呼んできた。（しかし・・，SI 単位系では使用しない。）

１．５　海洋で必要なその他の力（単位は全てニュートン）

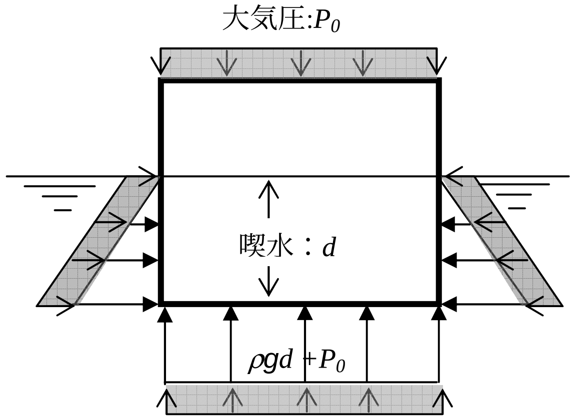
1) 浮力

上記のように，質量中の物質の中では，深さに応じてその物質の重力が変わるので，圧力が深さに比例して変化する。ある密度ρの物質で深さ z における単位面積当たりの重力はρgz であるから，これが圧力となり，深さに比例して大きくなる。



船を浮かす力は浮力と呼ばれるが，これは水や海水の圧力が船体表面に作用し，この上下方向成分の総和が浮力となる。

今，直方体が上面を水平にして液体密度：ρ に浮かんでいる場合を考えてみよう。直方体の表面に受ける圧力は深度に比例するので，直方体の喫水を d とすると，直方体の周りには左図のように，浮体の表面と垂直な方向に圧力が作用する。



大気圧は水圧と同様，高さによって圧力が異なり空気の浮力を受けるが，空気の密度は水の約 1/800 なので，物体周辺の高さの違いによる影響はほとんど無いと考えてよい。

この図から，浮体の底面には一様に上向きに$\rho gd+P_0$ の圧力がかかり，また浮体の上面には一様に下向きに P_0 の圧力がかかっているので浮力 B は,

$$
\begin{aligned}
B &= (\rho gd+P_0)\times 直方体の底面積 - P_0\times 直方体の底面積 \\
&= \rho gd\times 直方体の底面積 \qquad \text{-----------------} \ (1.3) \\
&= \rho g\times 没水体積
\end{aligned}
$$

となる。ただし，g：重力加速度

また，直方体の側面にかかる圧力は全て水平なので，浮力には結びつかない。したがって，浮力は流体密度，重力加速度と没水体積の積，すなわち，**物体が排除した流体の重力**に等しくなり，これがいわゆるアルキメデスの法則（アルキメデスの原理）である。この法則は直方体でなくても任意の形状について成立する。

（これを種々の形状で確認してみよう）

> (2.3)式の浮力の式で，ρを(kg/m^3)，g を(m/s^2)，没水体積を(m^3)という単位でそれぞれ表記した場合，浮力の単位は N(ニュートン)となる。
>
> ただし，船では **ρ×没水体積のことを排水量**と言い，浮力と重量が釣り合っていることから質量の単位で表現する。特に清水のρ はほぼ 1,000kg/m^3 であるから，体積を m^3 で表すと，排水量の単位は 1,000kg，すなわち 1t(トン)になるから取り扱いが大変便利になる。

2）推力と抵抗

(1) 推進力

海洋動物は色々な方法で遊泳しているが，共通して言えることは，尾ヒレあるいは魚体全体を運動させて，水を後方に押し出して推進しているということである。この中には，クジラやイルカのように尾ヒレを上下に振動させるものと，魚のように左右に振動させるものがある。これらの違いは，哺乳類と魚類の背骨のしくみにあるが，推進性能という面からは両者に大きな違いはない。ただし，旋回といった運動性能の面では，左右に尾を振動させるものは左右の運動性能に優れ，上下に尾を振動させる動物はやはり上下の運動性能に優れている。この尾ヒレを振動させて推進させるメカニズムの基本は水を後方に押し出すことにある。今日多くの船の推進装置はスクリュープロペラであり，駆動のしくみは異なるものの，水を押し出して力を得る原理は基本的に同じである。

前述の(2.1)式に示したニュートンの運動方程式を若干変形すると，

$$F = m \cdot a = d(m \cdot v)/dt \qquad \text{-----------------} \ (1.4)$$

m: 質量

v: 速度(位置の時間的変化，加速度の時間積分)

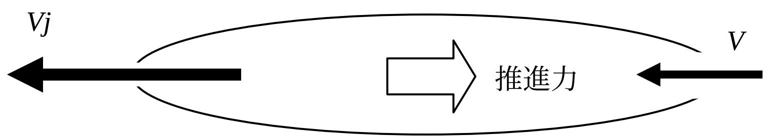
であり，$m \times v$ を運動量という。すなわち，運動量の時間的変化が力になることを示しており，このようにして力を求める方法を運動量理論と言う。

以下の例で具体的に推進力を求めてみよう。

ある物体（あるいは生物）が一定速度 V で進みながら，前方から水を取込み，後方から速度 Vj で吐き出す場合，その吐き出し流量（体積）を毎秒 Q とすると，推進力は(2.4)式から，

$$F = \rho Q Vj - \rho Q V = \rho Q (Vj - V) \qquad \text{------------------} \ (1.5)$$

となる。



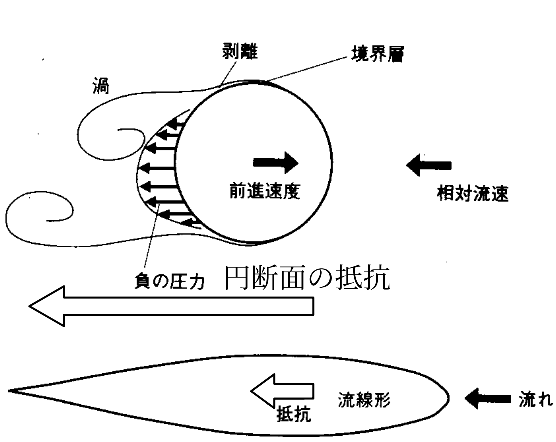
(2) 抵抗

宇宙のように真空中を移動する人工衛星や宇宙ステーションでは，物体に働く抵抗（物体の移動を止めようとする力）はほとんど無い。音速の数十倍で飛行する人工衛星がキャシャな太陽電池パネルを大きく広げられるのも，こうした理由による。しかし，大気圏の中では空気，あるいは海の中では水という流体が存在し，これが物体に大きな力を与えることになる。

流体が物体に働く抵抗は，流体の密度:ρ・物体の面積:A，流速:V の２乗に比例する他，その形状に大きく依存することが知られている。これを式で書くと，

$$R = \left(\frac{\rho}{2}\right) C_D V^2 \qquad \text{-----} \ (1.6)$$

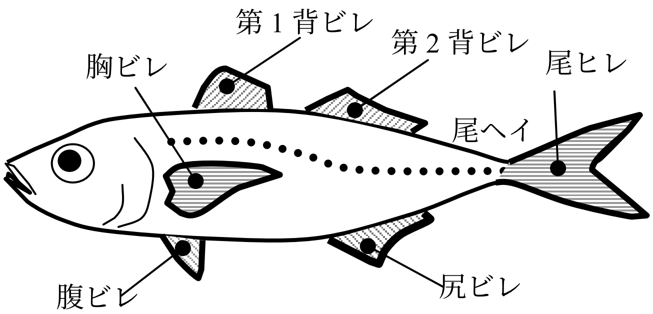
特に水の密度は空気の約 800 倍もあるので，形状が同じなら 800 倍の力を受けることになる。海の中を行動する海洋生物はこの力ができるだけ小さく（したがってエネルギーも少なく）なるよう形状が工夫されていると言える。速く移動して獲物を捕獲する，あるいは捕獲から逃げる魚にとっては，魚体の形状ができるだけ流線型（右図のように流体の流れに沿った形状で抵抗が少ない）であることが必要になる。



形状の違いによる抵抗

３）揚力

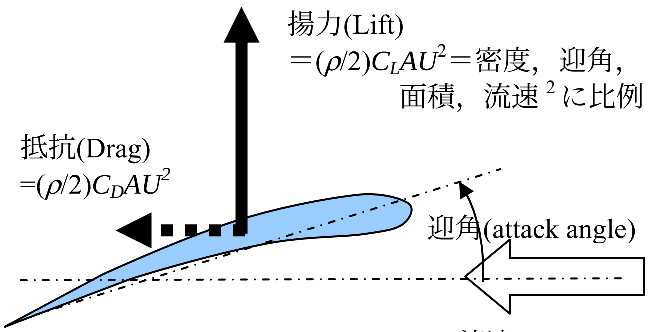
海洋動物は右図に示すように，実に多くのヒレを持っている。これらのヒレの多くは推力を補助的に発生させるものもあるが，横方向に必要な**揚力**をつくることが主な役割である。一般に，下図のように，翼に流体が流れ込むと翼には流れと直角方向に揚力が発生する。すなわち飛行機や鳥が重力に逆らって飛ぶ基本原理である。この力は，先の抵抗の性質と似ており，流体の密度:ρ，翼の面積:A，流速:Vの２乗，そして迎角:αに比例する。



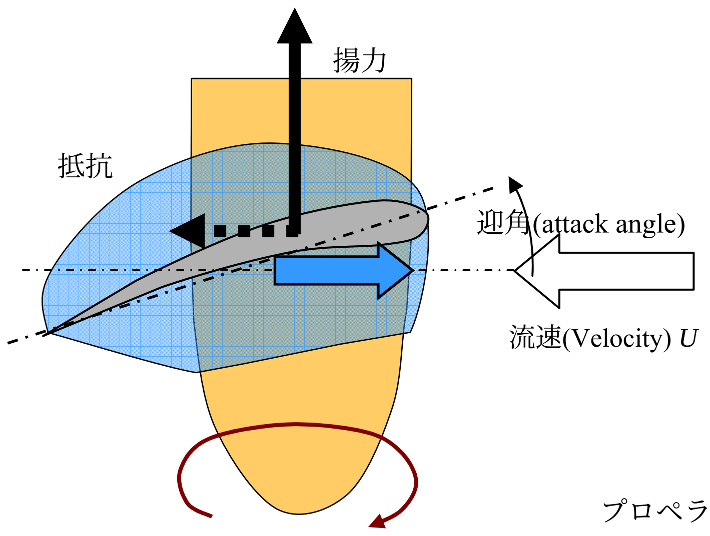
$$L = \left(\frac{\rho}{2}\right) C_L V^2 A\alpha \qquad \text{----- (1.7)}$$

魚はこの内，ヒレを動かせて迎角を変えることにより，揚力の大きさや向きを調整することができる。多くのヒレを巧みに動かすことによって，魚体の姿勢や運動を高度に制御することができる。背ビレや胸ビレ，腹ビレは魚の重要な制御装置（コントロール・サーフェース）である。

(2.4)式～(2.5)の推進力・抵抗・揚力の式で，ρを(kg/m^3)，速度 V を(m/s)，面積を(m^2)という単位でそれぞれ表記した場合，それぞれの力の単位は N(ニュートン)となる。



揚力のしくみ



プロペラの推力

２．運動の記述と解法（運動方程式）

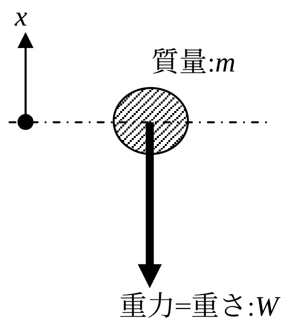
２．１　運動方程式

制御対象となる多くの機械の運動は「光速」に比べて非常に遅い運動であり、ニュートンの古典力学の範囲で十分記述できる。またほとんどの場合、物体の変形を考える必要がないので、物体の質量を重心(center of gravity)で代表させた質点系の力学で表される。

ニュートン力学の公式、 直線運動：　（質量）×（加速度）＝（作用する力）------ (2.1) 回転運動：　（慣性ﾓｰﾒﾝﾄ）×(角加速度)=(作用するﾓｰﾒﾝﾄ)　---- (2.2)

座標系（原点と軸の方向）は取り扱い易いように自由に決めてよいが、これを明確にすることが重要。また、力は運動の方向と同じ向きを正側にとる。

①［物体の自由落下運動］



位置　：x（上向きを＋に取る）
速度　：dx/dt (位置:x を時間:t で微分した量)
加速度：$d(dx/dt)/dt$　（速度(dx/dt)を時間:t で微分した量）
　　$=d^2x/dt^2$
物体に作用する力：重力

運動方程式：　$m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)=-W\quad=\left(-mg\right)$　----- (2.3) g:重力加速度

この自由落下の運動では、物体に作用する力として重力のみを考えたが、現実には物体の速度に依存した空気抵抗が働く。これを単純化して、速度に比例すると仮定すると、

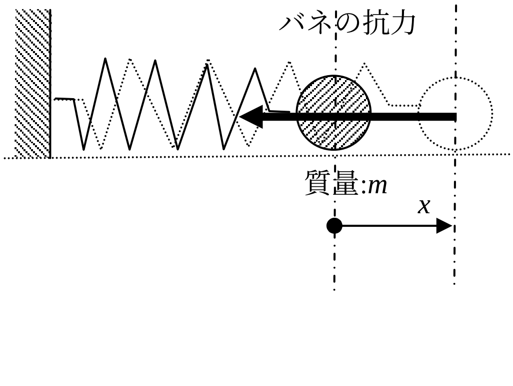
物体に働く抵抗= $-a\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$

これを入れると運動方程式は次式となる。

運動方程式：　$m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)=-W-a\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$ すなわち、　$m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)+a\left(\dfrac{dx}{dt}\right)=-W$　----- (2.4)

②［バネに付けた物体の運動］

水平にしたバネを壁に取り付け、反対側に物体(質量 m)を取り付けた時の物体の運動を考える。ただし、バネの質量は無視できるとし、また、物体と床の摩擦も無視する。



位置　：x　そのままでは永遠に運動しないので x だけ右に変位したと仮定する。
速度　：dx/dt (位置:x を時間:t で微分した量)
加速度：d^2x/dt^2
物体に作用する力：
　バネの抗力：$-(kx)$　（フックの法則）

運動方程式： $m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)=-kx$

すなわち、 $m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)+kx=0$ ----- (2.5)

このバネに付けた物体の運動でも、現実には物体の速度に依存した空気抵抗が働く。これを単純化して、速度に比例すると仮定すると、

物体に働く抵抗= $-a\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$

運動方程式： $m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)=-kx-a\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$

すなわち、 $m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)+a\left(\dfrac{dx}{dt}\right)+kx=0$ ----- (2.6)

2.2 運動方程式の解法

運動方程式が決まると初期条件に従って時々刻々の運動を計算することができる。

1）定常解

時々刻々の運動は初期条件で異なるが、十分時間が経った時（原理的には無限時間後であるが）の運動は初期条件に左右されない。外力が一定（時間的に変化しない）の場合、その解は極めて簡単で、運動方程式中の**最低階の項を残して計算**するだけで求まる。

①［物体の自由落下運動］ $m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)+a\left(\dfrac{dx}{dt}\right)=-W$ の定常解

$a\left(\dfrac{dx}{dt}\right)=-W\ a$ ----- (2.7)

すなわち、 $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)=-\dfrac{W}{a}$ ----- (2.8)

この速度は「終速度」と呼ばれ、その大きさは
物体の重さ／抵抗係数=(ρg *物体の体積*)／(C_D *物体の断面積*)
$\rho\cdot$ (g／C_D)×(物体の長さ)
で表され、終速度を遅くするには、
①物体の密度ρが軽いもの（風船、発泡スチロールなど）
②物体の長さが小さいもの（霧のようなもの）
となる。

②［バネに吊された物体の運動］ $m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)+a\left(\dfrac{dx}{dt}\right)+kx=0$ の定常解

$kx=0$ ------ (2.9)

すなわち、 $x=0$ ----- (2.10)

2）初期値からの解法

時々刻々の運動を求めるには幾つかの方法がある。

Ｉ．変数分離(積分)による解法

微分方程式が、$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{f(x)}{g(y)}$ (2.11)

の形式で表現される場合は、

$$g(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)=f(x)$$

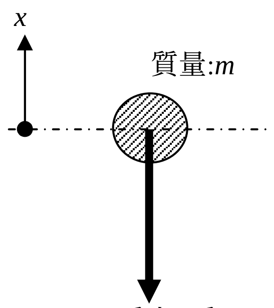
であるから、両辺を x に関して積分すれば、任意の定数 C を含む式が得られる。

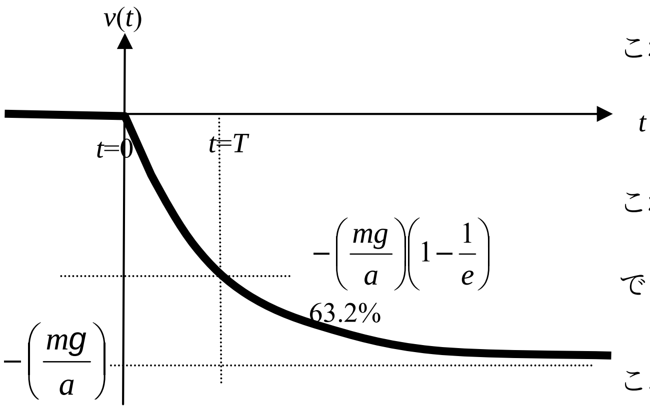
$$\int g(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx=\int f(x)dx+C$$

これより、 $\int g(y)dy=\int f(x)dx+C$ (2.12)

として一般解を求めることができ、初期条件から、定数 C を決定する。

①［物体の自由落下運動］





空気抵抗を考えた場合の自由落下の運動方程式は(2.4)式であったが、この運動方程式を $v=\dfrac{dx}{dt}$ で書き直すと次式となる。

運動方程式： $m\left(\dfrac{dv}{dt}\right)+av=-mg$ ----- (2.4’)

この運動方程式（微分方程式）を、初期値 v=0 として変数分離で解法する。(2.4’)式を変形すると

$$m\left(\frac{dv}{dt}\right)=-(mg+av)$$

すなわち、 $\dfrac{1}{(mg+av)}\left(\dfrac{dv}{dt}\right)=-\dfrac{1}{m}$

これを(2.11)式に、$x=t,\quad y=v$ として適用すると、

$$\int\frac{1}{(mg+av)}dv=\int\left(-\frac{1}{m}\right)dt+C$$

これより、 $\dfrac{1}{a}\ln(mg+av)=-\dfrac{1}{m}t+C$

であるから、 $\ln(mg+av)=-\dfrac{a}{m}t+aC$

これから、 $mg+av=-e^{-\left(\frac{a}{m}t\right)+aC}$ であり、

一般解は、 $v=-\left(\dfrac{mg}{a}\right)-e^{aC}e^{-\left(\frac{a}{m}t\right)}$

ここで、初期条件 t=0 で v=0 となるよう C を決定すると、

$$v=-\left(\frac{mg}{a}\right)\left(1-e^{-\left(\frac{a}{m}\right)t}\right) \qquad (2.13)$$

また、これを積分すると、 $x=-\left(\dfrac{mg}{a}\right)\left(t+\left(\dfrac{m}{a}\right)\left\{e^{-\left(\frac{a}{m}\right)t}-1\right\}\right)$ (2.14)

Ⅱ．Laplace 変換による解法

　ここでは、Laplace 変換（片側 Laplace 変換）について要点を説明する。この方法を用いると、次の利点がある。

　１）複雑な微分方程式を簡単な代数方程式として取り扱える。

　２）応答の伝達表現が容易なこと。

Laplace 変換を実用面から一言でいえば､時間領域の現象を s と言う複素平面への変換操作であり、Fourier 変換の積分区間を時間 t≧0、s=-$j\omega$としたものである。

Laplace 変換：
$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}f(t) \qquad \text{------- (2.15)}$$

Fourier 変換：
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad \text{------- (2.16)}$$

ω=2πf,　　f:周波数(Hz)

●Laplace 変換のメリット

１）複雑な微分方程式（運動方程式、電流方程式…）が簡単な代数方程式に置き換えられる。

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=s\ \mathcal{L}f(t)-f(0)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right)&=s\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)-\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}\\&=s\{s\ \mathcal{L}f(t)-f(0)\}-\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}\\&=s^2\mathcal{L}\ f(t)-sf(0)-\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^3f(t)}{dt^3}\right)=s^3\mathcal{L}\ f(t)-s^2f(0)-s\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}-\left.\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^3f(t)}{dt^3}\right)=s^n\mathcal{L}\ f(t)-\sum_{i=1}^{n}s^{(n-i)}\left.\frac{d^{(i-1)}f(t)}{dt^{(i-1)}}\right|_{t=0} \qquad \text{------- (2.17)}$$

（積分についても同様）

$$\mathcal{L}\ \left(\int f(t)dt\right)=\frac{\mathcal{L}f(t)}{s}-\int_0^0 f(t)dt \qquad \text{-------- (2.18)}$$

※ここで初期値が零の場合、上式はいずれも第１項のみとなり、極めて簡単になる。

２）線形性が保たれる。

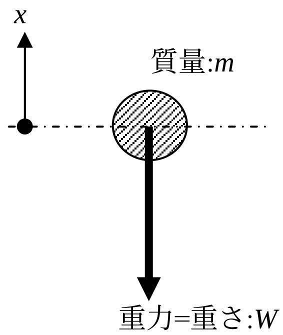
$$\mathcal{L}\ (a_1f_1(t)+a_2f_2(t))=a_1\mathcal{L}\ f_1(t)+a_2\mathcal{L}\ f_2(t) \qquad \text{------------ (2.19)}$$

Laplace 変換の例（重要な式）

	$f(t)$		$\mathcal{L}\,f(t)$	
①	1	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
②	t	$e^{-\alpha t}t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
③	$t^{(n-1)}/(n-1)!$	$e^{-\alpha t}t^{(n-1)}/(n-1)!$	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$
④	$\sin\beta t$	$e^{-\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
⑤	$\cos\beta t$	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

以上の知識を基に、Laplace 変換を用いて先の運動方程式を解いてみよう。その際、多くの場合、速度の初期値は零であり、**位置の初期値のみ考える**ことにする。こうすることにより、変換が容易になり、微分方程式を楽に解法することができる。

①［物体の自由落下運動］



空気抵抗を考えた場合の自由落下の運動方程式

$$\text{運動方程式：}\quad m\left(\frac{dv}{dt}\right)+av=-mg \qquad \text{----- (2.4')}$$

この運動方程式（微分方程式）を、初期値 v=0 として Laplace 変換で解法する。ここで、

$$\mathcal{L}\left(\frac{dv}{dt}\right)=s\mathcal{L}\,v$$

$$\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s}$$

であるから、$ms\,\mathcal{L}\,v+a\,\mathcal{L}\,v=-mg\left(\frac{1}{s}\right)$

これより

$$\mathcal{L}\,v(ms+a)=-\frac{mg}{s}$$

すなわち、

$$\mathcal{L}\,v=\frac{-mg}{(ms+a)s}=-\left(\frac{mg}{a}\right)\left\{\frac{1}{s}-\frac{m}{ms+a}\right\}$$

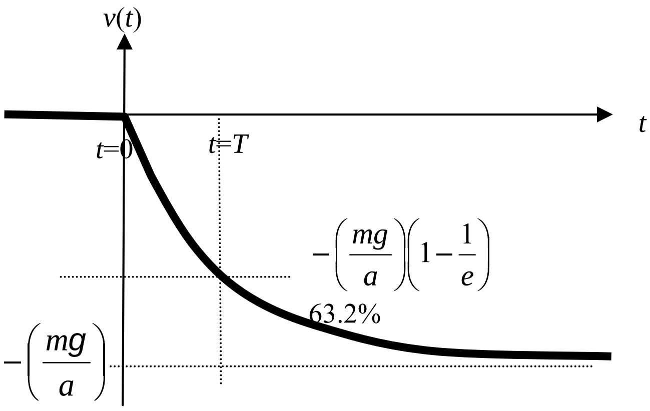
$$=-\left(\frac{mg}{a}\right)\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+(a/m)}\right\}$$

これを Laplace 逆変換すると、

$$v=-\left(\frac{mg}{a}\right)\left(1-e^{-\left(\frac{a}{m}\right)t}\right) \qquad (2.20)$$

また、これを積分すると、

$$x=-\left(\frac{mg}{a}\right)\left(t+\left(\frac{m}{a}\right)\left\{e^{-\left(\frac{a}{m}\right)t}-1\right\}\right) \qquad (2.21)$$



(2.16)式の v、(2.17)式の x を　$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdot\cdot\cdot$ を使って級数に展開すると、

$$v = -\left(\frac{mg}{a}\right)\left\{1 - \left(1 + \frac{\left(-\frac{a}{m}t\right)}{1!} + \frac{\left(-\frac{a}{m}t\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{a}{m}t\right)^3}{3!} + \cdots\right)\right\}$$

$$= -\left(\frac{mg}{a}\right)\left\{\left(\frac{a}{m}\right)t - \left(\frac{a^2}{2m^2}\right)t^2 + \left(\frac{a^3}{6m^3}\right)t^3 + \cdots\right\} \qquad (2.20')$$

$$= -gt + \left(\frac{a}{2m}\right)t^2 - \left(\frac{a^2}{6m^2}\right)t^3 + \cdots$$

$$x = -\left(\frac{mg}{a}\right)\left\{t + \left(\frac{m}{a}\right)\left(1 + \frac{\left(-\frac{a}{m}t\right)}{1!} + \frac{\left(-\frac{a}{m}t\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{a}{m}t\right)^3}{3!} + \cdots \quad -1\right)\right\}$$

$$= -\left(\frac{mg}{a}\right)\left\{t - t + \left(\frac{a}{2m}\right)t^2 - \left(\frac{a^2}{6m^2}\right)t^3 + \cdots\right\} \qquad (2.21')$$

$$= -g\left(\frac{1}{2}\right)t^2 + \left(\frac{a}{6m}\right)t^3 + \cdots$$

となり、抵抗がない場合は $a=0$ となり v と x はそれぞれ、$v = -gt,\quad x = -\frac{g}{2}t^2$ となり、(2.4)式を変数分離で解法した結果と一致する。

【数学の復習１】部分分数へ変換

逆変換するに際しては前述の基本型が使えるように Laplace 変換式を上手く変形する。

[例 1]　$\dfrac{\kappa_1 s + \kappa_2}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)} = \dfrac{a_1}{s+\alpha_1} + \dfrac{a_2}{s+\alpha_2}$

[例 1']　$\dfrac{\kappa_{n-1}s^{n-1} + \kappa_{n-2}s^{n-2} + \cdots \kappa_0}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)\cdots(s+\alpha_n)} = \dfrac{a_1}{s+\alpha_1} + \dfrac{a_2}{s+\alpha_2} + \cdots + \dfrac{a_n}{s+\alpha_n}$

[例 1"]　$\dfrac{\kappa_{n-1}s^{n-1} + \kappa_{n-2}s^{n-2} + \cdots \kappa_0}{(s+\alpha)^n} = \dfrac{a_1}{s+\alpha} + \dfrac{a_2}{(s+\alpha)^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{(s+\alpha)^n}$

[例 2]　$\dfrac{\kappa_2 s^2 + \kappa_1 s + \kappa_0}{(s^2+\beta^2)(s+\alpha)} = \dfrac{b_1 s + a_1}{s^2+\beta^2} + \dfrac{a_2}{s+\alpha}$

[例 3]　$\dfrac{\kappa_3 s^3 + \kappa_2 s^2 + \kappa_1 s + \kappa_0}{(s^2+\beta_1^2)(s^2+\beta_2^2)} = \dfrac{b_1 s + a_1}{s^2+\beta_1^2} + \dfrac{b_2 s + a_2}{s^2+\beta_2^2}$

[例 4]　$\dfrac{\kappa_4 s^4 + \kappa_3 s^3 + \kappa_2 s^2 + \kappa_1 s + \kappa_0}{(s^2+\beta_1^2)(s^2+\beta_2^2)(s+\alpha)} = \dfrac{b_1 s + a_1}{s^2+\beta_1^2} + \dfrac{b_2 s + a_2}{s^2+\beta_2^2} + \dfrac{a_3}{s+\alpha}$

以上のように、部分分数にすることによって、複数の基本型に展開でき、Laplace 逆変換が可能になる。

【数学の復習２】関数の級数展開

関数 $f(x)$ が $x=0$ を含むある区間で何回でも微分が可能なとき、Maclaurin 展開、あるいは $x=0$ での Taylor(級数)展開が次のように可能になる。

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \tag{2.A}$$

■ $f(x)=e^x$ の場合

$f'(x)=e^x$

$\vdots$ 　　であるから、

$f^{(n)}(x)=e^x$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{2.B}$$

■ $f(x)=\sin x$ の場合

$f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x$ 　であるから、

$f'''(x)=-\cos x$

$\vdots$

$$\begin{aligned}\sin x&=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5\cdots(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{(2n+1)}+\cdots\\&=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots(-1)^n\frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)}+\cdots\end{aligned} \tag{2.C}$$

■ $f(x)=\cos x$ の場合

$f'(x)=-\sin x$

$f''(x)=-\cos x$ 　であるから、

$f'''(x)=+\sin x$

$\vdots$

$$\begin{aligned}\cos x&=1+\frac{0}{1!}x-\frac{1}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{0}{5!}x^5\cdots(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{(2n)}+\cdots\\&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}-\cdots(-1)^n\frac{x^{(2n)}}{(2n)}+\cdots\end{aligned} \tag{2.D}$$

(2.C)式と(2.D)式から、 $f(x)=\cos x+i\sin x$ 　は次式となる。

■ $$\begin{aligned}\cos x+i\sin x&=1+i\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{4!}x^4+i\frac{x^5}{5!}\cdots(-1)^n\frac{x^{(2n)}}{(2n)!}+i(-1)^n\frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\cdots\\&=1+\frac{(ix)}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\cdots+\frac{(ix)^n}{n!}+\cdots\\&=e^{(ix)}\end{aligned} \tag{2.E}$$

これが有名な Euler の公式である。

【数学の復習３】複素数と指数関数e^x

Euler の公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

によって指数関数が三角関数の複素数で表現できたから、虚数 i は、

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \tag{2.F}$$

と表記できる。

$$i^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = e^{i\pi} = (\cos\pi + i\sin\pi) = -1 \tag{2.G}$$

となり、虚数の定義$i^2 = -1$　に合致していることがわかる。

また、これより上式から以下の有名な式が導ける。

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{2.H}$$

これは、

$\pi = 3.141592659$・・・・・

$e = 2.718281828$・・・・・

と無限続く無理数どうしにも関わらず、結果が 0 となる所に不思議議とも思われる神秘的な数学の美しさを見ることができる。

【参考】

$$\pi = 6\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6\sqrt{3}\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^2} + \frac{1}{5\cdot 3^3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^{(n+1)}} + \cdots\right\}$$

$f(x) = \tan^{-1} x$ の級数展開式において、$x = \pi/6$ として求める方法。

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

e そのものの定義。(2.B)式で x=1 としても同様である。

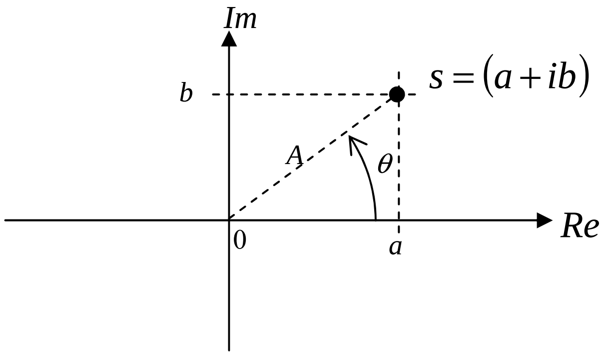
【応用問題】

それでは(i^i)　は何になるか、Euler の公式を使って各自計算してみよう。

【数学の復習４】複素数の演算と空間表示

■複素数の空間表示

複素数　$s=(a+ib)$を、横軸に実数(*Re*)、縦軸に虚数(*Im*)を取って表示すると、以下のような空間で表示できる。これを複素空間と言う。



原点から s までの複素空間の距離は $\sqrt{a^2+b^2}$ 、また実軸から半時計回りの回転角は$\tan^{-1}(b/a)$となるから、これらをそれぞれ、A, θとおくと、複素数 s は次式で表せる。

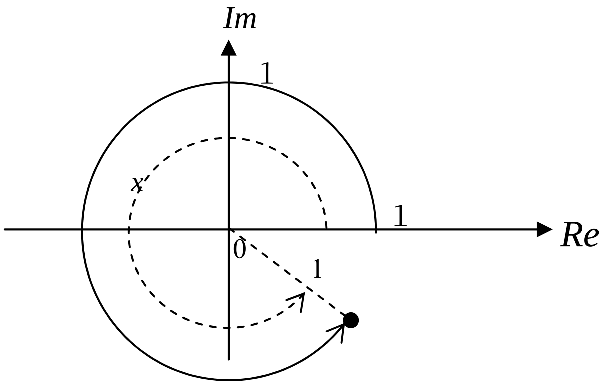
$$s = A\cos\theta + iA\sin\theta \qquad (2.I)$$

また、この複素数は Euler の公式から、

$$s = Ae^{i\theta} \qquad (2.J)$$

と記述することができる。

■Euler 式の空間表示



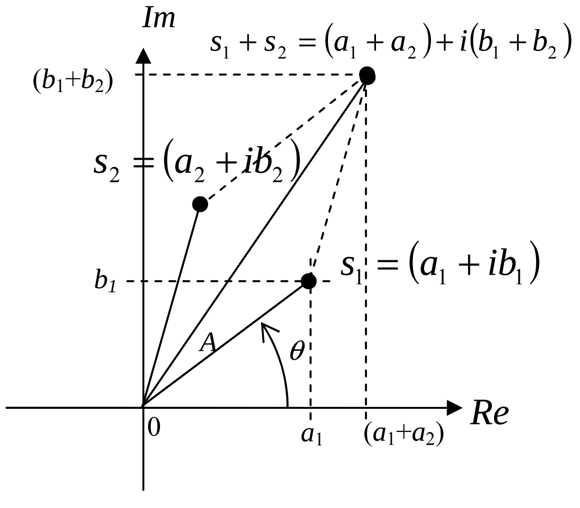
$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

を複素空間で表示すると、左図のように半径 1 の単位円を関周回する関数であることがわかる。もちろん、$x=\pi/2\pm 2n\pi$ の時が(i)になる。

■複素数の加減算

複素数　$s_1=(a_1+ib_1)$と、$s_2=(a_2+ib_2)$が存在する場合、両者の和は次式になる。

$$s_1+s_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2) \qquad (2.K)$$



これを複素空間で表示すると、ちょうどベクトルの和と同じになる。

■複素数の乗除算

複素数　$s_1 = (a_1 + ib_1)$ と $s_2 = (a_2 + ib_2)$ の積は次式になる。

$$
\begin{aligned}
s_1 \times s_2 &= (a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2) \\
&= a_1 a_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) + (i)^2 b_1 b_2 \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)
\end{aligned}
\tag{2.L}
$$

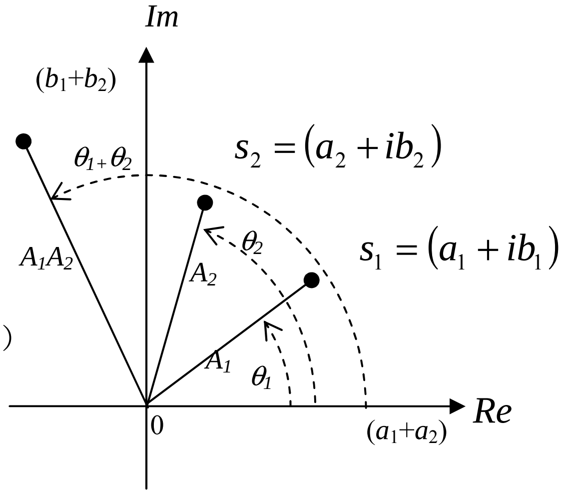
上式を、(2.J)式のように Euler の式で表現すると、

$$
\begin{aligned}
s_1 \times s_2 &= \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2} \exp\left\{ i \tan^{-1}\left(\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2} \right) \right\} \\
&= \sqrt{\left(a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2\right) + \left(a_1^2 b_2^2 + 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2\right)} \\
&\quad \times \exp\left\{ i \tan^{-1}\left(\frac{\left(\frac{b_2}{a_2}\right) + \left(\frac{b_1}{a_1}\right)}{1 - \left(\frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{b_2}{a_2}\right)} \right) \right\} \\
&= \sqrt{a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2} \times \exp\left\{ i\left(\tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) \right) \right\} \\
&= \sqrt{\left(a_1^2 + b_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2\right)} \times \exp\left\{ i\left(\tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) \right) \right\} \\
&= \left[\sqrt{\left(a_1^2 + b_1^2\right)} \exp\left\{ i \tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) \right\} \right] \times \left[\sqrt{\left(a_2^2 + b_2^2\right)} \exp\left\{ i \tan^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) \right\} \right]
\end{aligned}
$$

となり、

$$
\begin{aligned}
s_1 \times s_2 &= A_1 e^{i\theta_1} \times A_2 e^{i\theta_2} \\
&= A_1 A_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}
\end{aligned}
\tag{2.M}
$$

の形になっていることがわかる。これを複素空間で表すと右図のように、それぞれの角度が加算される。



なお、除算は次式となる。（各自確認してみよう）

$$
\begin{aligned}
\frac{s_1}{s_2} &= \frac{A_1 e^{i\theta_1}}{A_2 e^{i\theta_2}} \\
&= \left(\frac{A_1}{A_2} \right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}
\end{aligned}
\tag{2.N}
$$

ただし、(2.L)式のような形で除算するには以下の工夫が必要である。

$$
\frac{s_1}{s_2} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}
\tag{2.O}
$$

ここで、$(a_2 - ib_2)$ のことを $(a_2 + ib_2)$ の**共役複素数**という。

【数学の復習５】三角関数 sin と cos　の指数関数による表記

先の Euler の公式(2.E)式を用いると、三角関数 $\sin x$,　$\cos x$ が指数関数 e^x の関数で表すことができる。すなわち、

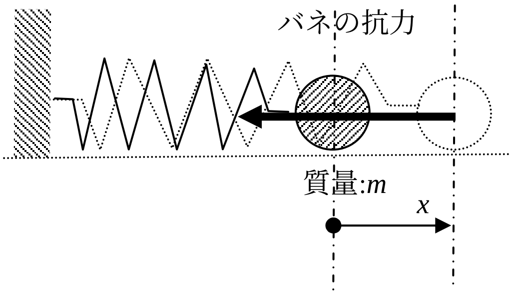
$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{(ix)} + e^{(-ix)}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{(ix)} - e^{(-ix)}}{2i} \end{aligned}\right\} \tag{2.P}$$

上式を用いて $\sin t$,　$\cos t$ を Laplace 変換すると④、⑤の変換式が容易に得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\sin t &= \int_0^\infty \sin\beta t \cdot e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{(i\beta t)} - e^{(-i\beta t)}}{2i}\right)e^{-st}dt \\ &= \left(\frac{1}{2i}\right)\left(\int_0^\infty e^{-(s-i\beta)t}dt - \int_0^\infty e^{-(s+i\beta)t}dt\right) \\ &= \left(\frac{1}{2i}\right)\left(\frac{1}{s-i\beta} - \frac{1}{s+i\beta}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{si+\beta} - \frac{1}{si-\beta}\right) \\ &= \frac{-\beta}{-s^2-\beta^2} = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \end{aligned} \tag{2.Q}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\cos t &= \int_0^\infty \cos\beta t \cdot e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{(i\beta t)} + e^{(-i\beta t)}}{2}\right)e^{-st}dt \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\int_0^\infty e^{-(s-i\beta)t}dt + \int_0^\infty e^{-(s+i\beta)t}dt\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{s-i\beta} + \frac{1}{s+i\beta}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2s}{s^2+\beta^2}\right) \\ &= \frac{s}{s^2+\beta^2} \end{aligned} \tag{2.R}$$

②［バネに付けた物体の運動］　空気抵抗を考えない場合。



運動方程式：$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=0$　　------- (2.5)

この運動方程式（微分方程式）を、初期値 $x=x_0$ として Laplace 変換で解法する。
(2.5)式を Laplace 変換すると

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=s^2\ \mathcal{L}x-sx_0$$

$$\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}x$$

であるから、

$$m\left(s^2\ \mathcal{L}x-sx_0\right)+k\ \mathcal{L}x=0$$

これより、

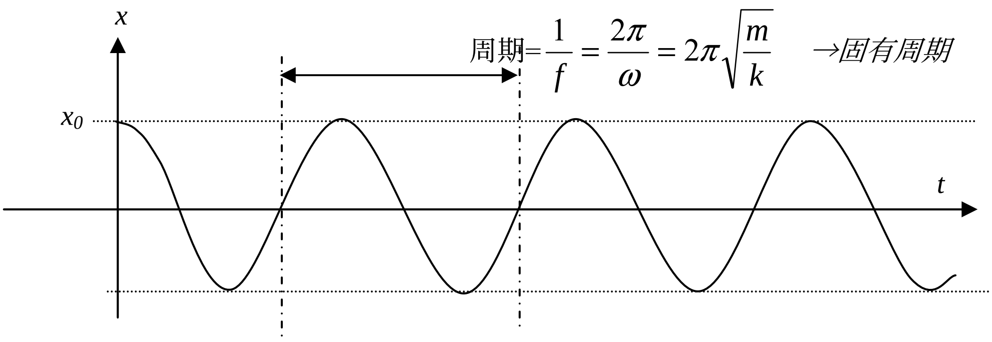
$$\left(ms^2+k\right)\mathcal{L}x-msx_0=0$$

すなわち、

$$\mathcal{L}x=\frac{msx_0}{ms^2+k}=x_0\frac{s}{s^2+(k/m)}=x_0\frac{s}{s^2+\left(\sqrt{k/m}\right)^2}$$

これを逆変換(⑤を使用)すると、

$$x=x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \qquad \text{---- (2.18)}$$



空気抵抗を考えた場合。

運動方程式：$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+a\dfrac{dx}{dt}+kx=0$　　------- (2.6)

この運動方程式（微分方程式）を、初期値 $x=x_0$ として Laplace 変換で解法する。
(2.6)式を Laplace 変換すると

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=s^2\ \mathcal{L}x-sx_0$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx}{dt}\right)=s\mathcal{L}x-x_0$$

$$\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}x$$

であるから、

$$m\left(s^2\mathcal{L}x-sx_0\right)+a\left(s\mathcal{L}x-x_0\right)+k\mathcal{L}x=0$$

これより、

$$\left(ms^2 + as + k\right)\mathcal{L}x - (ms + a)x_0 = 0 \qquad \text{すなわち、}$$

$$\mathcal{L}x = \frac{(ms+a)x_0}{ms^2+as+k} = x_0 \frac{(s+a/m)}{s^2+(a/m)+(k/m)}$$

$$= x_0 \frac{(s+a/2m)+(a/2m)}{(s+a/2m)^2+\left(k/m-a^2/4m^2\right)}$$

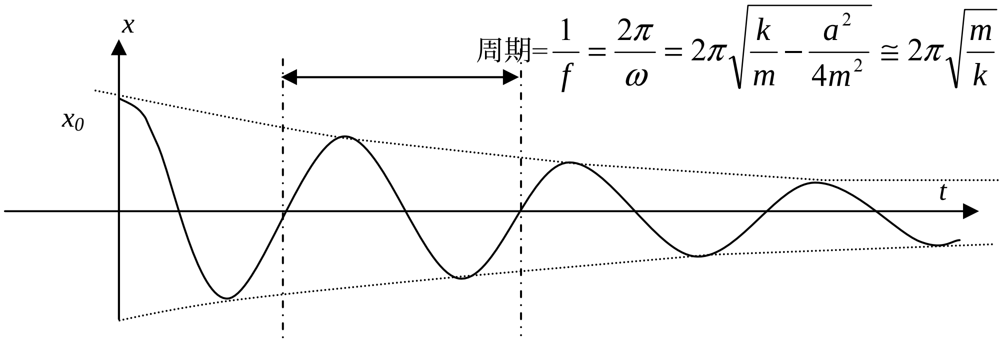
$$= x_0 \frac{(s+a/2m)+\dfrac{(a/2m)}{\sqrt{k/m-a^2/4m^2}}\sqrt{k/m-a^2/4m^2}}{(s+a/2m)^2+\left(\sqrt{k/m-a^2/4m^2}\right)^2}$$

これを逆変換(④、⑤を使用)すると、

$$x = x_0 e^{-\left(\frac{a}{2m}\right)t}\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{a^2}{4m^2}}t \quad + \frac{x_0\left(\dfrac{a}{2m}\right)}{\sqrt{\dfrac{k}{m}-\dfrac{a^2}{4m^2}}} e^{-\left(\frac{a}{2m}\right)t}\sin\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{a^2}{4m^2}}t \qquad (2.19)$$

ここで a が十分小さい場合，$a^2/4m^2 \to 0$

$$x \cong x_0 e^{-\left(\frac{a}{2m}\right)t}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \qquad \text{-----------} \ (2.20)$$



③［振り子の運動］＜演習問題５の解＞

下図の振り子の運動について振れ幅が大きくない時の運動を考える。

位置　：x　下図の水平方向を正にとる。

（x だけ右に変位したと仮定する）

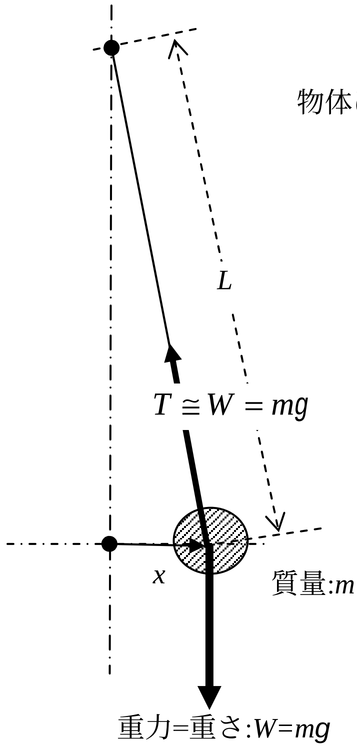
速度　：dx/dt (位置:x を時間:t で微分した量)

加速度：d^2x/dt^2

物体に作用する力：重力=W=mg　（鉛直方向のみ）

張力 T の鉛直方向成分　mg

水平方向成分　$-mg\left(\dfrac{x}{L}\right)$



運動方程式：　$m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)=-mg\left(\dfrac{x}{L}\right)$

すなわち　$\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)+\left(\dfrac{g}{L}\right)x=0$　----- (2.21)

この運動方程式（微分方程式）を、初期値 $x=x_0$ として Laplace 変換で解法する。

(2.21)式を Laplace 変換すると

$$\left(s^2\,\mathcal{L}x-sx_0\right)+\left(\frac{g}{L}\right)\mathcal{L}x=0$$

これより、

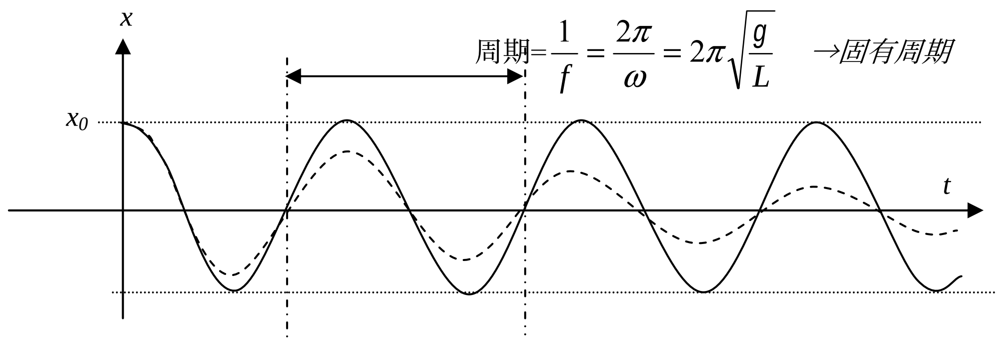
$$\left(s^2+\frac{g}{L}\right)\mathcal{L}x-sx_0=0$$

すなわち、

$$\mathcal{L}x=\frac{sx_0}{s^2+(g/L)}=x_0\frac{s}{s^2+\left(\sqrt{g/L}\right)^2}$$

これを逆変換(⑤を使用)すると、

$$x=x_0\cos\sqrt{\frac{g}{L}}t \qquad \text{---- (2.22)}$$



速度(dx/dt)に比例する空気抵抗がある場合は(2.20)式と同様な方法で、近似的に以下のようになり、その時間的変化は上図の点線のようになる。

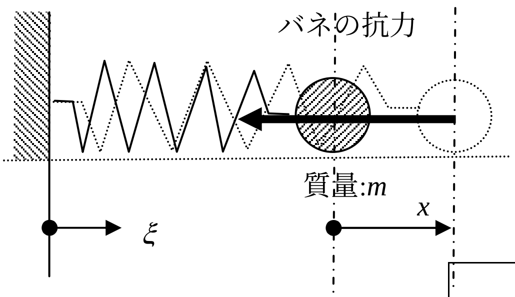
$$x\cong x_0e^{-\left(\frac{a}{2m}\right)t}\cos\sqrt{\frac{g}{L}}t \qquad \text{----------- (2.23)}$$

３．周波数応答

３．１　運動の応答

［バネに付けた物体の運動（その２）］

水平にしたバネの左側を壁に取り付け、右側に物体(質量 m)を取り付けた時の物体の運動は前節に述べたが、ここでバネ左端の壁が x と同じ方向にξ変化した場合を考える。ただし、バネの質量は無視できるとし、また、物体と床の摩擦も無視する。



位置　：x　右に変位する方向を正とする。
速度　：dx/dt (位置:x を時間:t で微分した量)
加速度：d^2x/dt^2
物体に作用する力：
　　バネの抗力：$-k(x-\xi)$　（フックの法則）

運動方程式：　$m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)=-k(x-\xi)$

すなわち、　$m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)+kx=k\xi$　　----- (3.1)

ここで、速度 dx/dt、位置:x の初期値(t=0 における値)がそれぞれ零の場合の微分方程式の解法は、(2.24)式の両辺を Laplace 変換することによって解ける。

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=s^2\ \mathcal{L}x$$

$$\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}x$$

$$\mathcal{L}(\xi)=\mathcal{L}\xi$$

であるから、

$$m(s^2\ \mathcal{L}x)+k\mathcal{L}x=k\quad\mathcal{L}\xi$$

これより、

$$(ms^2+k)\mathcal{L}x=k\quad\mathcal{L}\xi$$

すなわち、

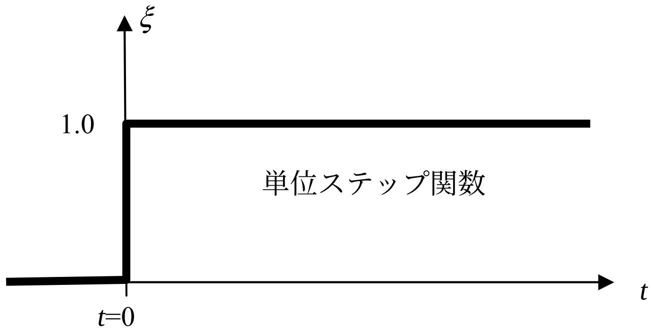
$$\mathcal{L}x=\left(\frac{k}{ms^2+k}\right)\mathcal{L}\xi \qquad (3.2)$$

と表される。この関係を図に示すと以下のようになり、（ブロック線図）

$$\mathcal{L}\xi \longrightarrow \boxed{\frac{k}{ms^2+k}} \longrightarrow \mathcal{L}\ x$$

入力ξに対する出力 x の応答を表す。ここで$\left(\dfrac{k}{ms^2+k}\right)$　を伝達関数と呼ぶ。

1）単位ステップ応答



前述のバネに付けた物体の運動において、バネの左端の位置ξが右図のようにt=0 で瞬時に 1 動いた場合の応答を考えよう。

この単位ステップ関数の Laplace 変換は既に重要変換例①に記載されたように $f(t)$=1 の Laplace 変換と同じ 1/s になる(Laplace 変換では t<0 を考えないので）。

この単位ステップ入力に対する応答は(3.2)式から

$$\mathcal{L}\,x = \left(\frac{k}{ms^2+k}\right)\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (3.3)$$

上式を部分分数にすると、

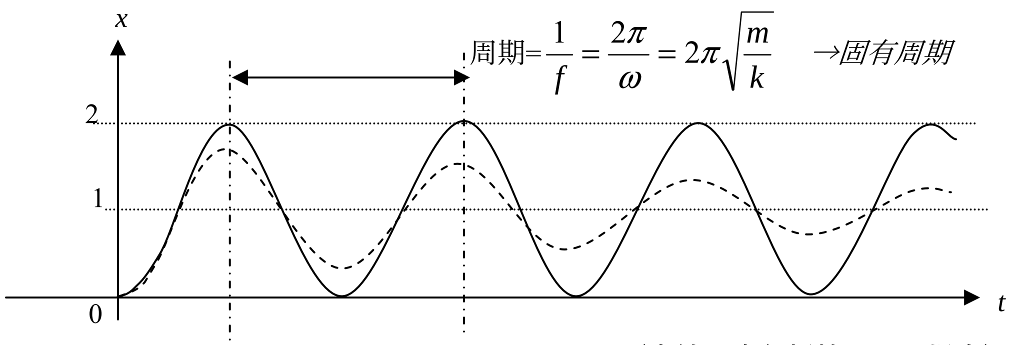
$$\mathcal{L}\,x = -\left(\frac{ms}{ms^2+k}\right)+\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (3.3)$$

これを変形すると、

$$\mathcal{L}\,x = -\left(\frac{s}{s^2+\left(\sqrt{k/m}\right)^2}\right)+\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (3.4)$$

これを逆変換すると、

$$x = -\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+1 \qquad (3.5)$$



（点線は空気抵抗がある場合）

伝達関数$\left(\dfrac{K}{Ts+1}\right)$　のステップ応答　＜演習問題６の解＞

この伝達関数は以下の微分方程式で表される。

$$T\left(\frac{dx}{dt}\right)+x=K\xi \tag{3.6}$$

ξ　が単位ステップの場合、(2.29)式の Laplace 変換は

$$\mathcal{L}\,x=\left(\frac{K}{Ts+1}\right)\left(\frac{1}{s}\right) \tag{3.7}$$

これを部分分数にすると、

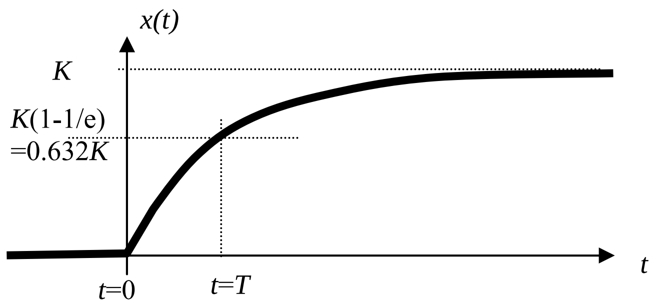
$$\mathcal{L}\,x=K\left\{-\left(\frac{T}{Ts+1}\right)+\left(\frac{1}{s}\right)\right\}$$

すなわち、

$$\mathcal{L}\,x=K\left\{-\left(\frac{1}{s+1/T}\right)+\left(\frac{1}{s}\right)\right\} \tag{3.8}$$

これを逆変換すると、

$$x=K\left(-e^{-\left(\frac{1}{T}\right)t}+1\right) \tag{3.9}$$



２）周波数応答(frequency response)

伝達関数にξ=sinωt という正弦波が入力された場合の応答を考えてみよう。ただし、伝達関数は計算の簡単な$\left(\dfrac{K}{Ts+1}\right)$ を考える。

この伝達関数は前述と同様、以下の微分方程式で表される。

$$T\left(\frac{dx}{dt}\right)+x=K\xi \tag{3.6}$$

ξ=sinωt という正弦波が入力された場合、$\mathcal{L}\,\xi=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ であるから、(2.33)式の Laplace 変換は

$$\mathcal{L}\,x=\left(\frac{K}{Ts+1}\right)\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) \tag{3.10}$$

これを部分分数にすると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}x&=\left(\frac{K\omega}{T^2\omega^2+1}\right)\left\{\frac{T^2}{Ts+1}-\frac{Ts-1}{s^2+\omega^2}\right\}\\&=\left(\frac{K\omega}{T^2\omega^2+1}\right)\left\{\frac{T}{s+1/T}-\frac{Ts}{s^2+\omega^2}+\left(\frac{1}{\omega}\right)\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\}\end{aligned} \tag{3.11}$$

上式を部分分数にする方法

$$\begin{aligned}\left(\frac{K}{Ts+1}\right)\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)&=\frac{a}{Ts+1}+\frac{bs+c}{s^2+\omega^2}\\&=\frac{a(s^2+\omega^2)+(bs+c)(Ts+1)}{(Ts+1)(s^2+\omega^2)}\\&=\frac{a(s^2+\omega^2)+(bs+c)(Ts+1)}{(Ts+1)(s^2+\omega^2)}\\&=\frac{(a+Tb)s^2+(b+cT)s+(a\omega^2+c)}{(Ts+1)(s^2+\omega^2)}\end{aligned}$$

これより、

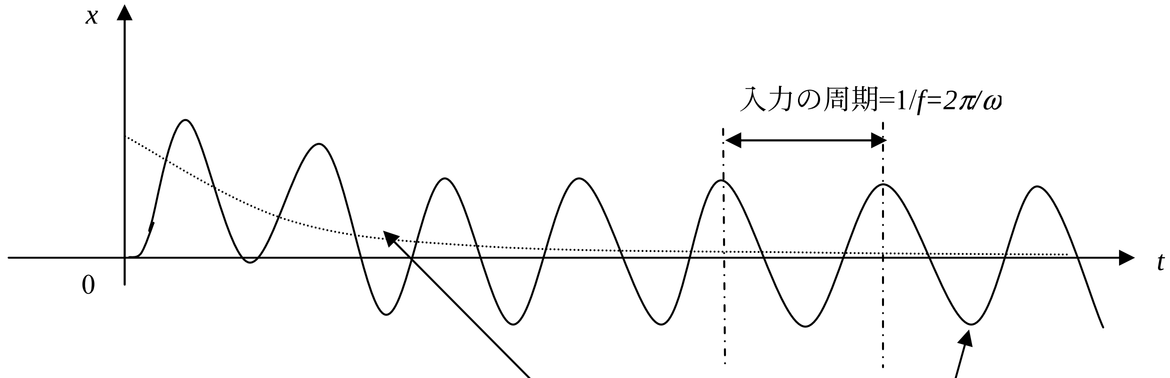
$$a=\frac{K\omega T^2}{T^2\omega^2+1},\quad b=\frac{-K\omega T}{T^2\omega^2+1},\quad c=\frac{K\omega}{T^2\omega^2+1}$$

(2.32)式を逆変換すると

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{K\omega}{T^2\omega^2+1}\left\{Te^{-\left(\frac{1}{T}\right)t}+\left(\frac{1}{\omega}\right)\sin\omega t-T\cos\omega t\right\}\\&=\frac{KT\omega}{T^2\omega^2+1}e^{-\left(\frac{1}{T}\right)t}+\frac{K}{T^2\omega^2+1}(\sin\omega t-T\omega\cos\omega t)\\&=\frac{KT\omega}{T^2\omega^2+1}e^{-\left(\frac{1}{T}\right)t}+\frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}\sin(\omega t+\varepsilon)\end{aligned} \tag{3.12}$$

ただし、$\varepsilon=\tan^{-1}(-T\omega)$

これが、周期的に変動する入力の場合の時々刻々の応答である。その時間的な変化は次のようになる。

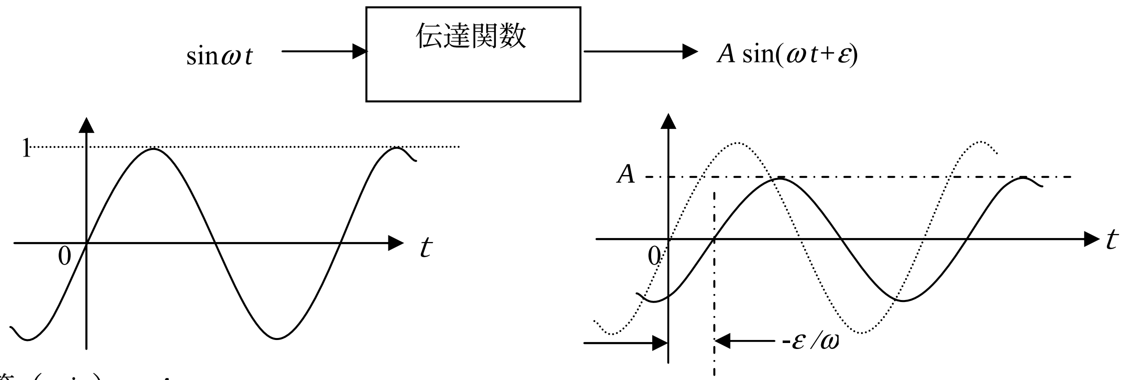


このブイの運動は、時間が十分経つと $e^{-(1/T)t} \to 0$ となり、(2.33)式の前半の項は限りなく小さくなって、後半 $\sin(\omega_0 t + \varepsilon)$の項だけが残る。

前半の項：**過度応答**（破線）

後半の項：**定常応答**（過度応答が無くなった状態の応答）

周波数応答とは正弦波入力に対する要素の応答であるが、上記の**定常応答**を指している。



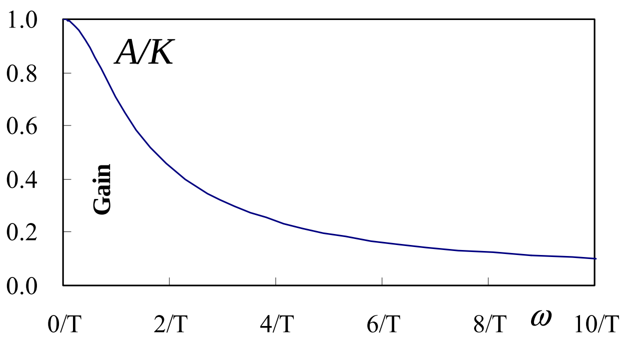
振幅応答（gain） ＝A

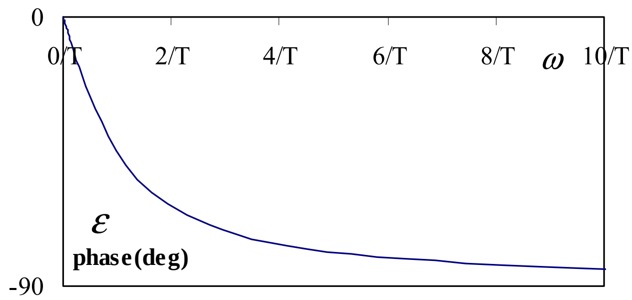
位相ずれ（phase）＝ε *(たいていは遅れでマイナス)*

これらは何れもω（周波数）の関数となる。

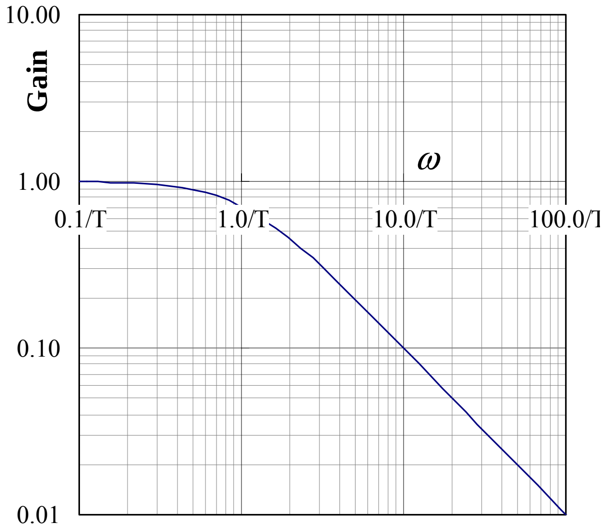
したがって、伝達関数$\left(\dfrac{K}{Ts+1}\right)$ の周波数応答は(2.33)式から、次式となる。

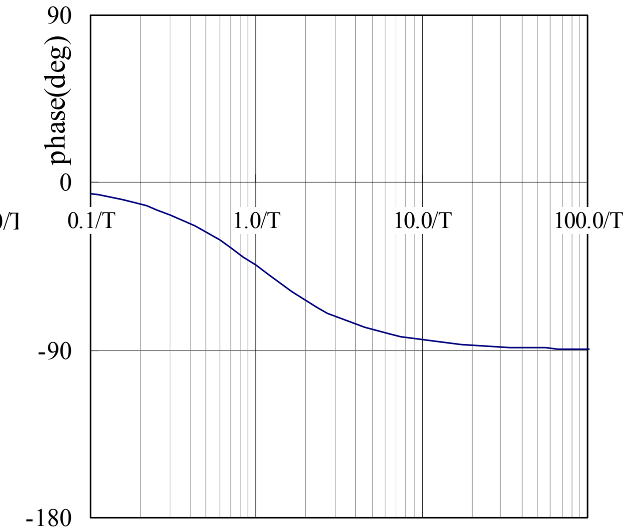
$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{振幅応答（gain）} \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}} \\
&\text{位相ずれ（phase）} \quad \varepsilon(\omega) = -\tan^{-1}(T\omega)
\end{aligned}
\right\} \tag{3.13}
$$





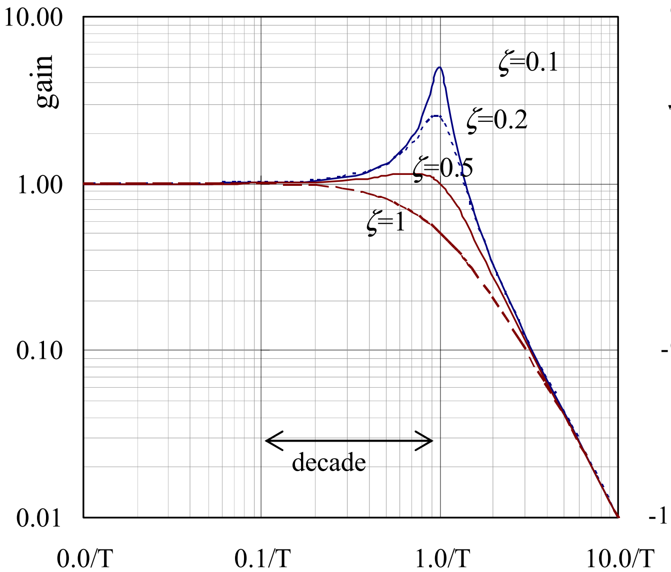
この周波数応答図は、横軸の周波数と振幅応答の大きさを対数スケールで表現することが多く、下図のようになる。＜演習問題７の解＞

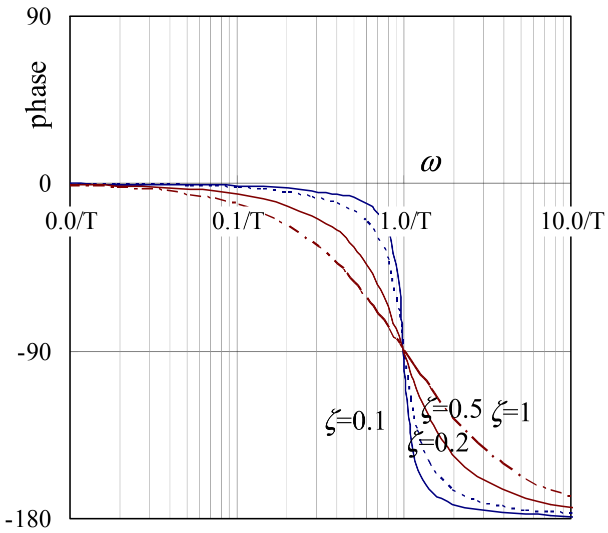




［バネに付けた物体の運動(その２)］で空気抵抗 $a\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$ が存在する場合の伝達関数は、$\left(\dfrac{k}{ms^2+as+k}\right)$ であり、分子分母を k で除して変形すると $\left(\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}\right)$ となり、この時の周波数応答は以下のようになる。

$$\left.\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{\left(1-T^2\omega^2\right)^2+\left(2T\zeta\omega\right)^2}} \\ \varepsilon(\omega) &= -\tan^{-1}\left(\frac{2T\zeta\omega}{1-T^2\omega^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$





４．フーリエ変換

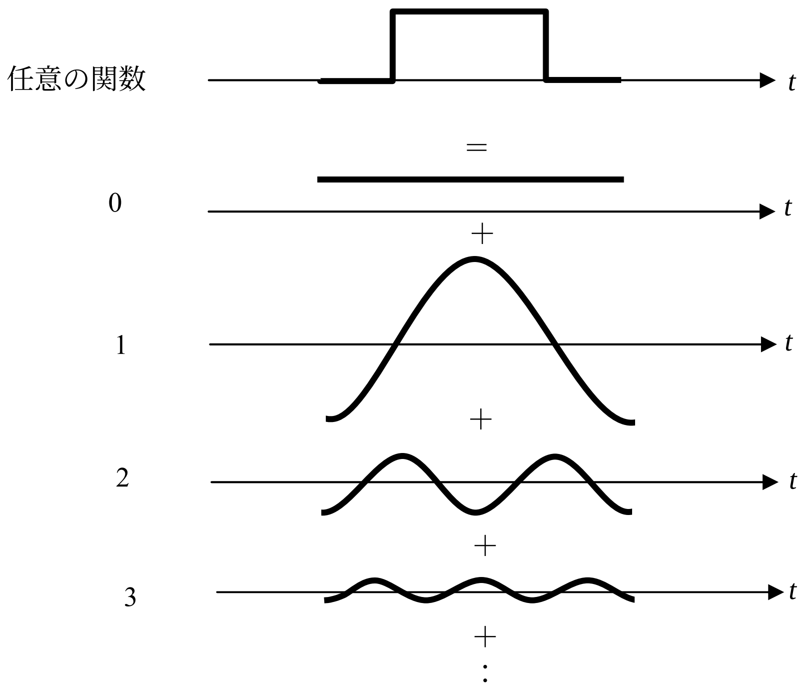
時間軸上で変化(変動)する任意の関数(時系列)を、多くの sin, cos の三角関数の密度に表現できるとし、連続的に変化する周波数の sin, cos の振幅密度とその位相とに変換する。すなわち、連続したスペクトルに変換する。もちろん、これを時間軸上に戻す（逆変換）も可能である。

４．１ フーリエ級数

時間軸上で変化(変動)する任意の関数(時系列)を、幾つかの sin, cos の三角関数の和で表現できるとし、周波数に対する三角関数に級数展開する。三角関数の係数は、三角関数の積分特性（周波数の選択性）を利用して求めることができる。

例えば、下図のような矩形波（長方形波）の場合、定数項(0 次)を含め、sin, cos の和として表現することができる。逆に言えば、矩形波（長方形波）は幾つかの sin, cos に分解することができる。これを「フーリエ級数に展開」するという。フーリエ級数は、一般に次式で表現される。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kt+b_k\sin kt\right) \tag{4.1}$$



フーリエ級数に展開する場合、(4.1)式の係数をどのようにして求めるかが重要になる。ここでは、三角関数の定積分の性質（周波数の選択性）を活用することになる。

１） -π～π の区間で定義される関数のフーリエ級数

(4.1)式の係数を求めるに際して、-π～π の時間区間で定義される関数を取り扱ってみよう。
まず、 $f(t)=\cos mt$ の場合を考えると、これはもともと三角関数であるから、(4.1)式に展開した場合は、次式のようになることが必要である。

$$\left.\begin{aligned} &a_m=1\\ &a_0\sim a_{m-1},\quad a_{m+1}\sim a_\infty=0\\ &b_1\sim b_\infty=0\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

そのためには、以下の三角関数の定積分の性質を活用する。

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos mt \cdot \cos kt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \{\cos(m+k)t + \cos(m-k)t)\} dt$$

$$= \int_{0}^{\pi} \{\cos(m+k)t + \cos(m-k)t)\} dt$$

$(m \neq k)$ の場合 $$= \left[\frac{1}{(m+k)} \sin(m+k)t + \frac{1}{(m-k)} \sin(m-k)t \right]_0^{\pi} = 0$$

$(m = k)$ の場合 $$= \int_{0}^{\pi} \{\cos(m+k)t + 1\} dt = \left[\frac{1}{(m+k)} \sin(m+k)t + t \right]_0^{\pi} = \pi$$

(4.3)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos mt \cdot \sin kt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \{\sin(m+k)t - \sin(m-k)t)\} dt \qquad (4.4)$$

$$= 0$$

また、$f(t) = \sin mt$ の場合を考えると、これも三角関数であるから、(4.1)式に展開した場合は、次式のようになることが必要である。

$$\left. \begin{aligned} & a_0 \sim a_\infty = 0 \\ & b_m = 1 \\ & b_1 \sim b_{m-1}, \quad b_{m+1} \sim b_\infty = 0 \end{aligned} \right\} \qquad (4.5)$$

そのためには、以下の三角関数の定積分の性質を活用する。

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin mt \cdot \sin kt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \{-\cos(m+k)t + \cos(m-k)t)\} dt$$

$$= \int_{0}^{\pi} \{-\cos(m+k)t + \cos(m-k)t)\} dt$$

$(m \neq k)$ の場合 $$= \left[-\frac{1}{(m+k)} \sin(m+k)t + \frac{1}{(m-k)} \sin(m-k)t \right]_0^{\pi} = 0$$

$(m = k)$ の場合 $$= \int_{0}^{\pi} \{-\cos(m+k)t + 1\} dt = \left[-\frac{1}{(m+k)} \sin(m+k)t + t \right]_0^{\pi} = \pi$$

(4.6)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin mt \cdot \cos kt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \{\sin(m+k)t + \sin(m-k)t)\} dt \qquad (4.7)$$

$$= 0$$

以上から、(4.1)式の係数は次式とすれば、(4.2)式や(4.5)式を満足することができる。

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos kt dt, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin kt dt, \quad (k = 1, 2, \cdots) \end{aligned} \right\} \qquad (4.8)$$

【数学の復習６】三角関数の積の公式

$$\left.\begin{aligned}
\cos mt\cdot\cos kt &= \frac{1}{2}\{\cos(m+k)t+\cos(m-k)t)\} \\
\cos mt\cdot\sin kt &= \frac{1}{2}\{\sin(m+k)t-\sin(m-k)t)\} \\
\sin mt\cdot\sin kt &= \frac{1}{2}\{-\cos(m+k)t+\cos(m-k)t)\} \\
\sin mt\cdot\cos kt &= \frac{1}{2}\{\sin(m+k)t+\sin(m-k)t)\}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.A)$$

は次の補助公式から導入できる。

$$\left.\begin{aligned}
\sin(a\pm b) &= \sin a\cdot\cos b\pm\cos a\cdot\sin b \\
\cos(a\pm b) &= \cos a\cdot\cos b\mp\sin a\sin b
\end{aligned}\right\}$$

しかし、これも Euler の公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を使えば容易に導くことができる。すなわち、

$$\begin{aligned}
\cos mt\cdot\cos kt &= \frac{e^{imt}+e^{-imt}}{2}\cdot\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} \\
&= \frac{e^{imt}e^{ikt}+e^{imt}e^{-ikt}+e^{-imt}e^{ikt}+e^{-imt}e^{-ikt}}{4} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{e^{i(m+k)t}+e^{-i(m+k)t}}{2}+\frac{e^{i(m-k)t}+e^{-i(m-k)t}}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\{\cos(m+k)t+\cos(m-k)t)\}
\end{aligned}$$

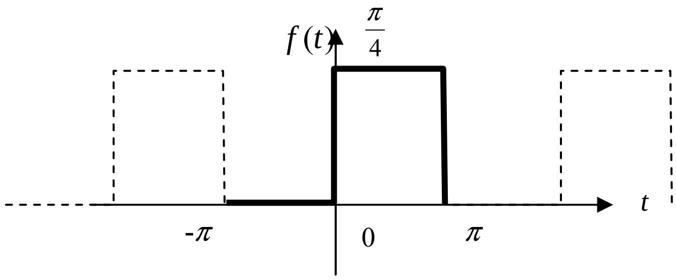
$$\begin{aligned}
\cos mt\cdot\sin kt &= \frac{e^{imt}+e^{-imt}}{2}\cdot\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i} \\
&= \frac{e^{imt}e^{ikt}-e^{imt}e^{-ikt}+e^{-imt}e^{ikt}-e^{-imt}e^{-ikt}}{4i} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{e^{i(m+k)t}-e^{-i(m+k)t}}{2i}-\frac{e^{i(m-k)t}-e^{-i(m-k)t}}{2i}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\{\sin(m+k)t-\sin(m-k)t)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin mt\cdot\sin kt &= \frac{e^{imt}-e^{-imt}}{2i}\cdot\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i} \\
&= \frac{e^{imt}e^{ikt}-e^{imt}e^{-ikt}-e^{-imt}e^{ikt}+e^{-imt}e^{-ikt}}{-4} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left\{-\frac{e^{i(m+k)t}+e^{-i(m+k)t}}{2}+\frac{e^{i(m-k)t}+e^{-i(m-k)t}}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\{-\cos(m+k)t+\cos(m-k)t)\}
\end{aligned}$$

$$\sin mt\cdot\cos kt = \frac{1}{2}\{\sin(m+k)t+\sin(m-k)t)\}$$

フーリエ級数展開の例（１）

$$f(t)=\begin{cases} 0, & (-\pi<t<0) \\ +\dfrac{\pi}{4}, & (0<t<\pi) \end{cases} \qquad (4.9)$$



a_k, b_k を(4.8)式で計算すると、

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(0)\cos ktdt+\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos ktdt\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\int_{0}^{\pi}\cos ktdt$$

ここで、k=0 の場合は、

$$a_0=\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}1dt=\frac{1}{4}[t]_0^{\pi}=\frac{\pi}{4}$$

また、k=1 以上の場合は、

$$a_k=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{k}\sin kt\right]_0^{\pi}=0$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(0)\sin ktdt+\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin ktdt\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\int_{0}^{\pi}\sin ktdt$$

$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}\sin ktdt$$

$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{k}\cos kt\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{4k}(1-\cos k\pi)$$

これらを(4.1)式に代入すると、

$$f(t)=\frac{\pi/4}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{0\times\cos kt+\left(\frac{1-\cos k\pi}{4k}\right)\sin kt\right\}$$

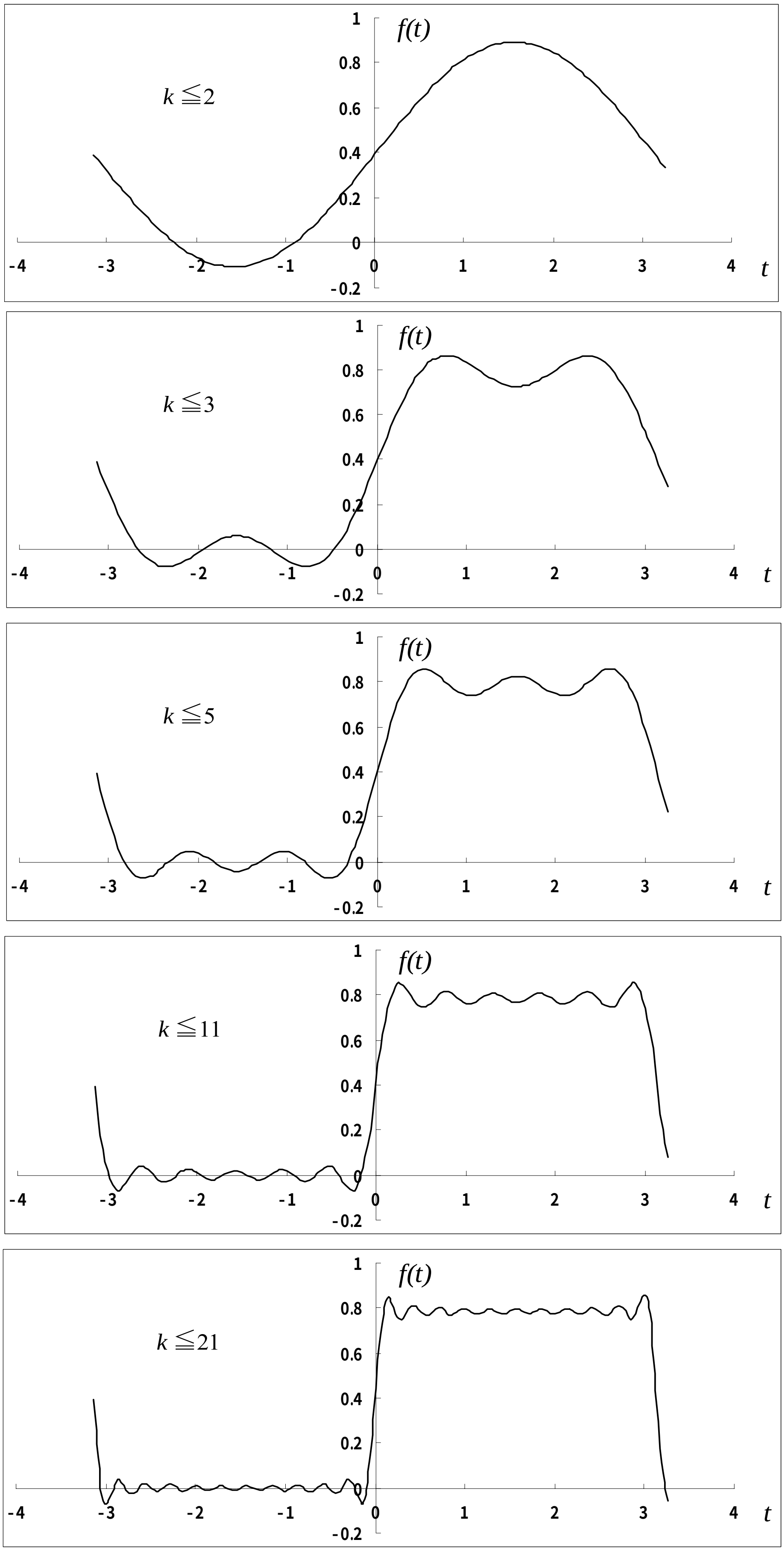
$$=\frac{\pi}{8}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-\cos k\pi}{4k}\right)\sin kt$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{6}\sin 3t+\frac{1}{10}\sin 5t+\cdots+\left(\frac{1}{2(2n-1)}\right)\sin(2n-1)t+\cdots$$

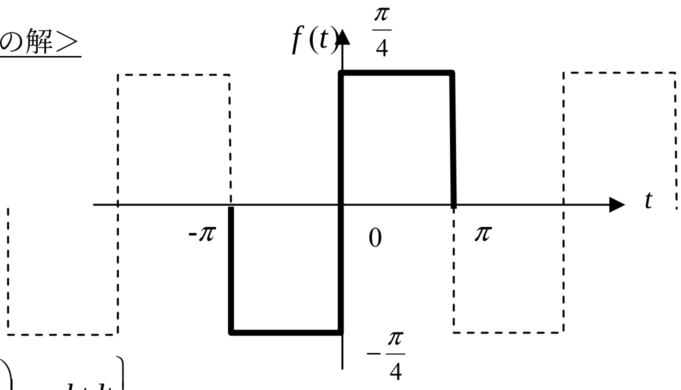
$$=\frac{\pi}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2(2n-1)}\right)\sin(2n-1)t$$

----- (4.10)

フーリエ級数展開の結果



フーリエ級数展開の例（２）<演習問題８の解>



$$f(t)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}, & (-\pi<t<0)\\[2mm] +\dfrac{\pi}{4}, & (0<t<\pi)\end{cases}$$

a_k, b_k を(4.8)式で計算すると、

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos ktdt+\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos ktdt\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\left\{-\int_{-\pi}^{0}\cos ktdt+\int_{0}^{\pi}\cos ktdt\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\left\{-\int_{0}^{\pi}\cos ktdt+\int_{0}^{\pi}\cos ktdt\right\}=0$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin ktdt+\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin ktdt\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\left\{-\int_{-\pi}^{0}\sin ktdt+\int_{0}^{\pi}\sin ktdt\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\left\{+\int_{0}^{\pi}\sin ktdt+\int_{0}^{\pi}\sin ktdt\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin ktdt\quad=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{k}\cos kt\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2k}(1-\cos k\pi)$$

これらを(4.1)式に代入すると $f(t)$ のフーリエ級数が得られる。

$$f(t)=\frac{0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{0\times\cos kt+\left(\frac{1-\cos k\pi}{2k}\right)\sin kt\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-\cos k\pi}{2k}\right)\sin kt$$

$$=\frac{1}{1}\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}\right)\sin(2n-1)t+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\right)\sin(2n-1)t$$

t

さてここで、 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ であることから、上式で $t=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると、

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}\right)(-1)^{n-1}+\cdots \tag{4.11}$$

となり、これを 4 倍すると π を正確に数値計算することができる。これが有名な**ライプニッツ級数**である。

この計算例の $f(t)$ はもともと奇関数であるから、級数に展開しても奇関数である sin の係数 b_k しか存在しないこと。また、時間軸上でも容易に計算できるが、$f(t)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{\pi}{8}$ は前述の(4.10)式になることも同時に理解しておこう。

2）周期 T で定義される関数のフーリエ級数

(4.1)式の係数を求めるに際して、周期 T の時間区間で定義される関数に拡張する。この場合、(4.1)式と(4.8)式は $\tau = (T/2\pi)t$ とすると、$t = (2\pi/T)\tau$ 、$dt = (2\pi/T)d\tau$ 、また積分区間は、$-T/2$ ～ $T/2$ となるので、次式となる。

$$f\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\left(\frac{2\pi}{T}\right)\tau + b_k \sin k\left(\frac{2\pi}{T}\right)\tau\right) \equiv g(\tau)$$

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(\tau)\cdot\cos k\left(\frac{2\pi}{T}\right)\tau d\tau, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(\tau)\cdot\sin k\left(\frac{2\pi}{T}\right)\tau d\tau, \quad (k = 1, 2, \cdots) \end{aligned}\right\}$$

これを、改めて $t = \tau$ 、 $g(\tau) = f(t)$ として書き直すと、次式となる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\left(\frac{2\pi}{T}\right)t + b_k \sin k\left(\frac{2\pi}{T}\right)t\right) \tag{4.12}$$

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\cos k\left(\frac{2\pi}{T}\right)t dt, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\sin k\left(\frac{2\pi}{T}\right)t dt, \quad (k = 1, 2, \cdots) \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

ここで、$(2\pi/T)$ は T を周期とする基本角振動数：ω_0 であり、$(1/T)$ が基本周波数になる。
また、(4.9)式を sin 関数のみで表すと、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\sin\left\{k\left(\frac{2\pi}{T}\right)t + \varepsilon_k\right\}\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \varepsilon_k) \tag{4.14}$$

あるいは cos 関数のみの場合は、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\cos\left\{k\left(\frac{2\pi}{T}\right)t + \delta_k\right\}\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \delta_k) \tag{4.15}$$

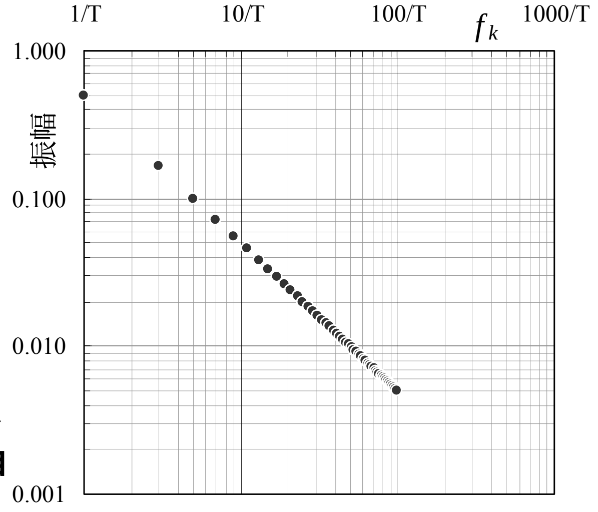
ただし、

$$\omega_k = k\left(\frac{2\pi}{T}\right) = k\omega_1$$

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = k\left(\frac{1}{T}\right) = kf_1$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

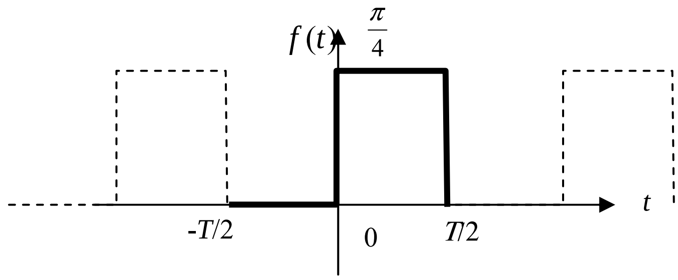
$$\varepsilon_k = \tan^{-1}\left(\frac{a_k}{b_k}\right), \quad \delta_k = -\tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$



と表せる。上記の振幅 A_k と位相 ε_k あるいは、δ_k を、横軸 ω あるいは f_k に対して図示したものをスペクトルと呼び、時間的に変化する現象を、**振幅と位相という空間（周波数空間）**で表すことができる。

<u>周期 T のフーリエ級数展開の例（１）</u>

$$f(t)=\begin{cases} 0, & \left(-\dfrac{T}{2}<t<0\right) \\ +\dfrac{\pi}{4}, & \left(0<t<\dfrac{T}{2}\right) \end{cases}$$



a_k , b_k を(4.13)式で計算すると、

$$a_k=\frac{2}{T}\left\{\int_{-T/2}^{0}(0)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt+\int_{0}^{T/2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt\right\}$$

$$=\frac{2}{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)\int_{0}^{T/2}\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt$$

ここで、k=0 の場合は、

$$a_0=\frac{\pi}{2T}\int_{0}^{T/2}1dt=\frac{\pi}{2T}\left[t\right]_{0}^{T/2}=\frac{\pi}{4}$$

また、k=1 以上の場合は、

$$a_k=\frac{2\pi}{T}\left[\left(\frac{T}{2\pi k}\right)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\right)t\right]_{0}^{T/2}=\frac{\pi}{T}\left(\frac{T}{2\pi k}\right)\left(\sin(k\pi)-0\right)=0$$

$$b_k=\frac{2}{T}\left\{\int_{-T/2}^{0}(0)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt+\int_{0}^{T/2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt\right\}$$

$$=\frac{2}{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)\int_{0}^{T/2}\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt$$

$$=\frac{\pi}{2T}\int_{0}^{T/2}\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt$$

$$=\frac{\pi}{2T}\left[-\left(\frac{T}{2\pi k}\right)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\right)t\right]_{0}^{T/2}$$

$$=\frac{1}{4k}\left(1-\cos k\pi\right)$$

これらを(4.12)式に代入すると、

$$f(t)=\frac{\pi/4}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{0\times\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\right)t+\left(\frac{1-\cos k\pi}{4k}\right)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\right)t\right\}$$

$$=\frac{\pi}{8}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-\cos k\pi}{4k}\right)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\right)t$$

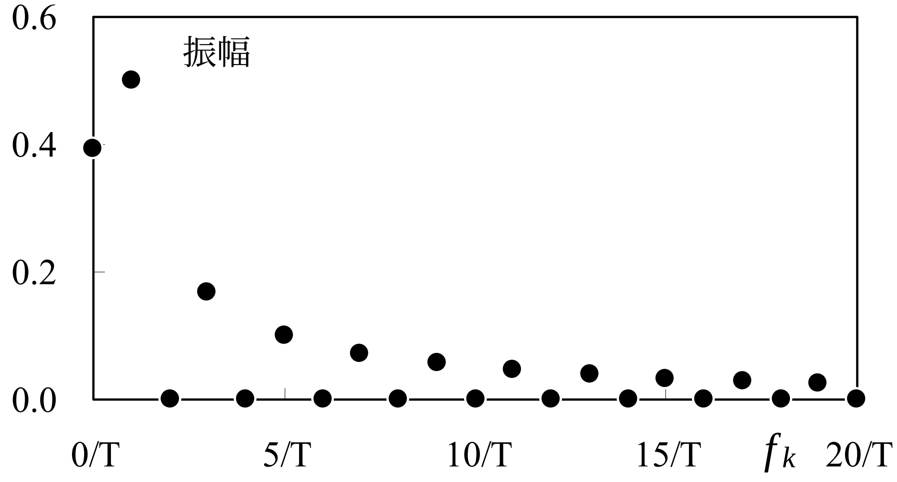
$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)t+\frac{1}{6}\sin 3\left(\frac{2\pi}{T}\right)t+\frac{1}{10}\sin 5\left(\frac{2\pi}{T}\right)t+\cdots+\left(\frac{1}{2(2n-1)}\right)\sin(2n-1)\left(\frac{2\pi}{T}\right)t+\cdots$$

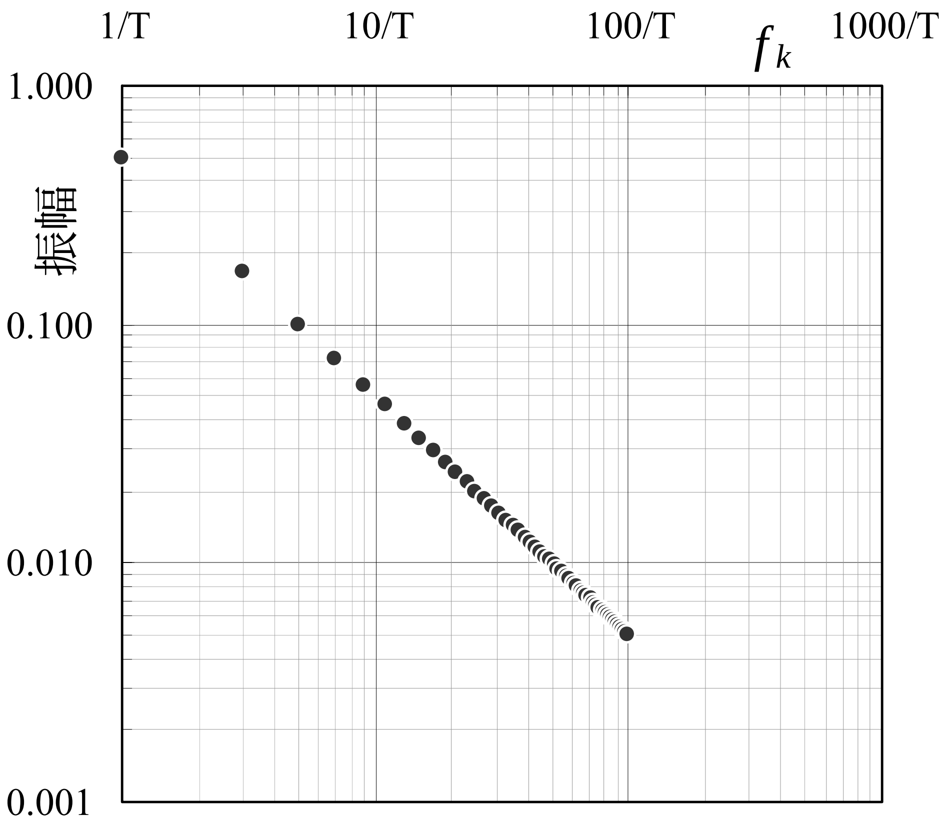
$$=\frac{\pi}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2(2n-1)}\right)\sin(2n-1)\left(\frac{2\pi}{T}\right)t$$

----- (4.16)

この場合、$f(t)$は(4.14)式の形式になっており、位相ε_k は零である。

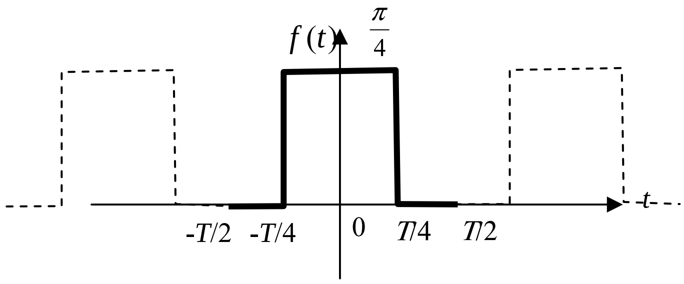
これをスペクトルに表記すると、下図のようになる。上図が通常のリニアスケールの場合、また下図が対数スケールに表示した場合である。ただし、いずれの図も周期 T で除して（無次元化して）プロットしている。このように対数スケールにすると、広範囲の特徴を見ることができる。





周期 T のフーリエ級数展開の例（２）＜演習問題９の解＞

$$f(t)=\begin{cases}0, & \left(-\dfrac{T}{2}<t<-\dfrac{T}{4}\right)\\ +\dfrac{\pi}{4}, & \left(-\dfrac{T}{4}<t<\dfrac{T}{4}\right)\\ 0, & \left(\dfrac{T}{4}<t<\dfrac{T}{2}\right)\end{cases}$$



a_k, b_k を(4.13)式で計算すると、

$$a_k=\frac{2}{T}\left\{\int_{-T/2}^{-T/4}(0)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt+\int_{T/4}^{T/4}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt+\int_{T/4}^{T/2}(0)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt\right\}$$

$$=\frac{2}{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)\int_{-T/4}^{T/4}\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt=\frac{2}{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)2\int_{0}^{T/4}\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt$$

ここで、k=0 の場合は、

$$a_0=\frac{\pi}{T}\int_0^{T/4}1dt=\frac{\pi}{T}[t]_0^{T/4}=\frac{\pi}{4}$$

また、k=1 以上の場合は、

$$a_k=\frac{\pi}{T}\left[\left(\frac{T}{2\pi k}\right)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\right)t\right]_0^{T/4}=\frac{\pi}{T}\left(\frac{T}{2\pi k}\right)\left(\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)-0\right)=\frac{1}{2k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$b_k=\frac{2}{T}\left\{\int_{-T/2}^{-T/4}(0)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt+\int_{-T/4}^{T/4}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt+\int_{T/2}^{T/4}(0)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt\right\}$$

$$=\frac{2}{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)\int_{-T/4}^{T/4}\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\right)tdt=0$$

これらを(4.12)式に代入すると、

$$f(t)=\frac{\pi/4}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)\times\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\right)t+(0)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}\right)t\right\}$$

$$=\frac{\pi}{8}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\right)t$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)t-\frac{1}{6}\cos 3\left(\frac{2\pi}{T}\right)t+\frac{1}{10}\cos 5\left(\frac{2\pi}{T}\right)t+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1))}\cos(2n-1)\left(\frac{2\pi}{T}\right)t+\cdots$$

$$=\frac{\pi}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1))}\cos(2n-1)\left(\frac{2\pi}{T}\right)t$$

----- (4.17)

この場合、$f(t)$は(4.16)式の sin が cos に変わり、各周波数に対する振幅は同じで、係数の極性に±が存在する形となる。

また、 $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$ であることから、上式で $t=0$ を代入すると、

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\frac{1}{18}-\frac{1}{22}+\cdots+\frac{1}{2(2n-1)}(-1)^{n-1}+\cdots \qquad (4.18)$$

となり、(4.11) 式のライプニッツ級数が導入できる。

3） 複素フーリエ級数

周期 T の時間区間に拡張したフーリエ級数(4.12), (4.13)式を更に Euler の公式を使って次のように拡張する。Euler の公式は 15 頁の(2.E)式に示したように、

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

であり、これから、sin$x$ と cos$x$ を 19 頁の(2.Q)式で表して(4.12)式に代入する。

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\left(\frac{e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}+e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}}{2}\right)+b_k\left(\frac{e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}-e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}}{2i}\right)\right\}\\
&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{a_k}{2}+\frac{b_k}{2i}\right)e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}+\left(\frac{a_k}{2}-\frac{b_k}{2i}\right)e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}\right\}\\
&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{a_k-ib_k}{2}\right)e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}+\left(\frac{a_k+ib_k}{2}\right)e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}\right\}\\
&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k+ib_k}{2}\right)e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k-ib_k}{2}\right)e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k+ib_k}{2}\right)e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a_k-ib_k}{2}\right)e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}
\end{aligned}\tag{4.19}$$

一方、(4.13)式も Euler の公式を使用すると、

$$\left.\begin{aligned}
a_k&=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cdot\left(\frac{e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}+e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}}{2}\right)dt,\quad (k=0,1,2,\cdots)\\
b_k&=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}g(\tau)\cdot\left(\frac{e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}-e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}}{2i}\right)dt,\quad (k=1,2,\cdots)
\end{aligned}\right\}$$

であり、これより、

$$\begin{aligned}
\frac{a_k+ib_k}{2}&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{f(t)\cdot\left(\frac{e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}+e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}}{2}\right)+if(t)\cdot\left(\frac{e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}-e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}}{2i}\right)\right\}dt\\
&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(f(t)\cdot e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}\right)dt\equiv c_{-k}\\
\frac{a_k-ib_k}{2}&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left\{f(t)\cdot\left(\frac{e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}+e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}}{2}\right)-if(t)\cdot\left(\frac{e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}-e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}}{2i}\right)\right\}dt\\
&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(f(t)\cdot e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}\right)dt\equiv c_{k}
\end{aligned}\tag{4.20}$$

とあらわせ、(4.19)式が次式で簡潔に表現できる。

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} \\
&= \sum_{k=0,\,\pm1,\,\pm2}^{\pm\infty} c_k e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

$$
c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(f(t)\cdot e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}\right)dt \tag{4.22}
$$

これを複素フーリエ級数展開と言う。
先のフーリエ係数 a_k, b_k は実数であったが、複素フーリエ係数 c_k は(4.20)式で記述されるように複素数となる。
(4.22)式はまた、

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)dt - i\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)dt \\
&= \frac{a_k - ib_k}{2} \equiv \mathrm{Re}_k + \mathrm{Im}_k
\end{aligned}
$$

であり、この係数 c_k の複素空間を考えると、実数部 Re_k と虚数部 Im_k で作られる距離と角度は

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\mathrm{Re}_k^2 + \mathrm{Im}_k^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{A_k}{2} \\
&\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}_k}{\mathrm{Re}_k}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) = \delta_k
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

となって、複素空間の距離が(4.15)式に示した各周波数の振幅を、また角度が $f(t)$ を cos 関数で表現した場合の位相にそれぞれ相当することがわかる。ただし、周波数は

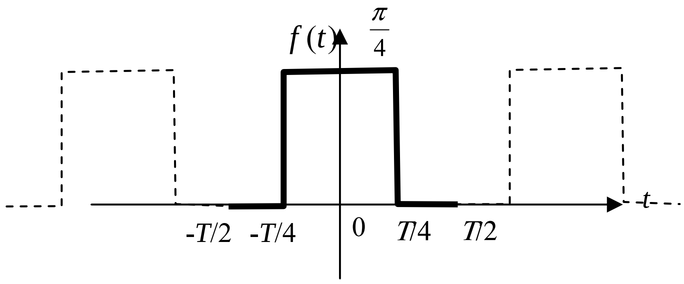
$$
\omega_k = k\left(\frac{2\pi}{T}\right) = k\omega_1
$$

$$
f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = k\left(\frac{1}{T}\right) = kf_1
$$

であり、複素フーリエ級数展開では、マイナスの k も存在するので、周波数をマイナスの領域にまで拡張したことになっている。これが、(4.23)式に示したように、各周波数の振幅が(4.15)式に比べて 1/2 となっている理由である。したがって、複素フーリエ級数展開からスペクトルを求めるには、マイナスの周波数空間を考慮して、振幅を 2 倍（ただし、k=0 を除く）にする必要がある。

複素フーリエ級数展開の例（２）＜演習問題１０の解＞

$$f(t)=\begin{cases} 0, & \left(-\dfrac{T}{2}<t<-\dfrac{T}{4}\right) \\ +\dfrac{\pi}{4}, & \left(-\dfrac{T}{4}<t<\dfrac{T}{4}\right) \\ 0, & \left(\dfrac{T}{4}<t<\dfrac{T}{2}\right) \end{cases}$$



c_k を(4.22)式で計算すると、

$$c_k=\frac{1}{T}\left\{\int_{-T/2}^{-T/4}(0)e^{-i\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)}tdt+\int_{-T/4}^{T/4}\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{-i\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)}dt+\int_{T/2}^{T/4}(0)e^{-i\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)}tdt\right\}$$

$$=\frac{1}{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)\int_{-T/4}^{T/4}e^{-i\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)}dt$$

ここで $k=0$ 場合は、

$$c_0=\frac{1}{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)\int_{-T/4}^{T/4}1\,dt=\frac{\pi}{8}$$

$k\neq 0$ 場合は、

$$c_k=\frac{1}{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)\left[\left(-\frac{T}{ik2\pi}\right)e^{-i\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)}\right]_{-T/4}^{T/4}$$

$$=\frac{1}{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{T}{ik2\pi}\right)\left(e^{-i\left(\frac{k\pi}{2}\right)}-e^{i\left(\frac{k\pi}{2}\right)}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{4k}\right)\frac{e^{i\left(\frac{k\pi}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{k\pi}{2}\right)}}{2i}$$

$$=\left(\frac{1}{4k}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

これらを(4.21)式に代入すると、

$$f(t)=\frac{\pi}{8}+\sum_{k=\pm 1}^{\pm\infty}\left\{\left(\frac{1}{4k}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\left(\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)+i\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)\right)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{8}+\sum_{k=\pm 1}^{\pm\infty}\left(\frac{1}{4k}\right)\left\{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{8}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)t-\frac{1}{6}\cos 3\left(\frac{2\pi}{T}\right)t+\frac{1}{10}\cos 5\left(\frac{2\pi}{T}\right)t+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1)}\cos(2n-1)\left(\frac{2\pi}{T}\right)t+\cdots$$

$$=\frac{\pi}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2(2n-1)}\cos(2n-1)\left(\frac{2\pi}{T}\right)t$$

となり、(4.17)式に一致する。

4．2 フーリエ変換

1）フーリエ変換の導入

時間軸上で変化(変動)する任意の関数(時系列)を、多くの sin, cos の三角関数の密度に表現できるとし、連続的に変化する周波数の sin, cos の振幅密度とその位相とに変換する。

前節の複素フーリエ級数展開式(4.21)式、(4.22)式をより、 $f(t)$ は次式で表せた。

$$f(t)=\sum_{k=0,\,\pm1,\,\pm2}^{\pm\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(f(t)\cdot e^{-ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}\right)dt\cdot e^{ik\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} \tag{4.24}$$

ここで、積分区間$\pm\dfrac{T}{2}$を$\pm\infty$に拡張することを考える。ただし、この場合の $f(t)$ は周期関数ではなく$\pm\dfrac{T}{2}$の範囲外では零とする。

(4.15)式から、スペクトルに分解する周波数$\omega=k\dfrac{2\pi}{T}$であったから、ここで$\dfrac{2\pi}{T}=\Delta\omega$とおくと、$\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{2\pi}{T}=d\omega$、すなわち$\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{2\pi}d\omega$となる。また、 $\sum\limits_{k=0,\,\pm1,\,\pm2}^{\pm\infty}$ 記号は$\int_{-\infty}^{+\infty}$ に変わるので、(4.24)式は次式に変形される。

$$\begin{aligned}f(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)\cdot e^{-i\omega t}\right)dt\cdot e^{i\omega t}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)\cdot e^{-i\omega t}\right)dt\right\}\cdot e^{i\omega t}d\omega\end{aligned} \tag{4.25}$$

この式で、{ }中をフーリエ変換と言い、このフーリエ変換をωで積分したものをフーリエ逆変換と言う。すなわち、

フーリエ変換： $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt$ (4.26)

フーリエ逆変換： $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega$ (4.27)

このフーリエ変換の(4.26)式で$i\omega=s$と置き換え、時間積分の区間を 0→∞の半分にしたのが、既に示したラプラス(Laplace)変換(2.15)式である。

Laplace 変換： $$\begin{aligned}F(s)&=\int_{0}^{\infty}f(t)\cdot e^{-st}dt\\&=\mathcal{L}\ f(t)\end{aligned} \tag{2.15}$$

したがって、フーリエ変換とラプラス変換はよく似た操作を行っていることになる。ただし、ラプラス変換は積分区間が 0→∞であるため $f(t)=1$ あるいは$\cos\beta t$ といった t→∞で零でない関数でも変換できるのに対して、フーリエ変換では時間積分$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt$ が有限であることが必要条件になる。

2）フーリエ変換のスペクトル表示

(4.26)式を実数と虚数に分けて表記する。すなわち、

$$F(\omega) = \mathrm{Re}(\omega) + \mathrm{Im}(\omega)$$

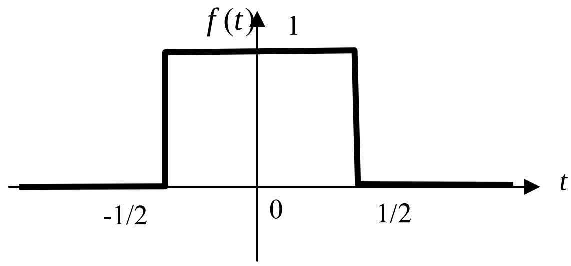
このフーリエ変換の複素空間を考えると、実数部 $\mathrm{Re}(\omega)$ と虚数部 $\mathrm{Im}(\omega)$ で作られる距離と角度(いずれも実数)はそれぞれ、

$$A(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}(\omega)^2 + \mathrm{Im}(\omega)^2}$$
$$\varepsilon(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)}\right) \qquad (4.28)$$

となるが、これを ω あるいは、周波数 $f = \omega/(2\pi)$ に対して表示したものをスペクトルと呼び、$f(t)$ の周波数空間への変換になる。ただし、$A(\omega)$ は sin, cos の振幅ではなく、振幅の密度関数となるところが、フーリエ級数と異なる。

フーリエ変換の例（１）

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \left(-\infty < t < -\frac{1}{2}\right) \\ +1, & \left(-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}\right) \\ 0, & \left(\frac{1}{2} < t < \infty\right) \end{cases}$$

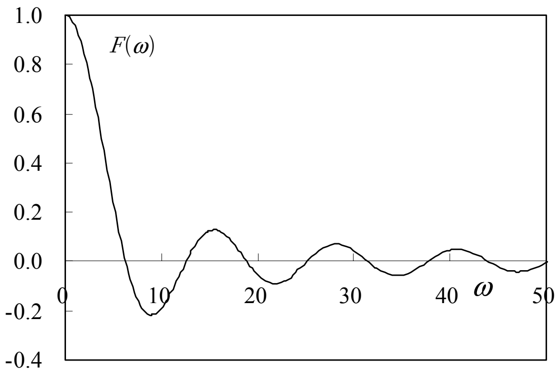


$F(\omega)$ を(4.26)式で計算すると、

$$F(\omega) = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot e^{-i\omega t} dt \quad = \left[-\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t}\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \left(-\frac{1}{i\omega}\right)\left(e^{-i\frac{1}{2}\omega} - e^{i\frac{1}{2}\omega}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\omega}\right)\frac{e^{i\frac{1}{2}\omega} - e^{-i\frac{1}{2}\omega}}{2i} = \left(\frac{2}{\omega}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)$$



あるいは、別の方法として、

$$F(\omega) = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot (\cos\omega t - i\sin\omega t)dt$$

$$= 2\int_0^{1/2} \cos\omega t \; dt \quad = 2\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right]_0^{1/2}$$

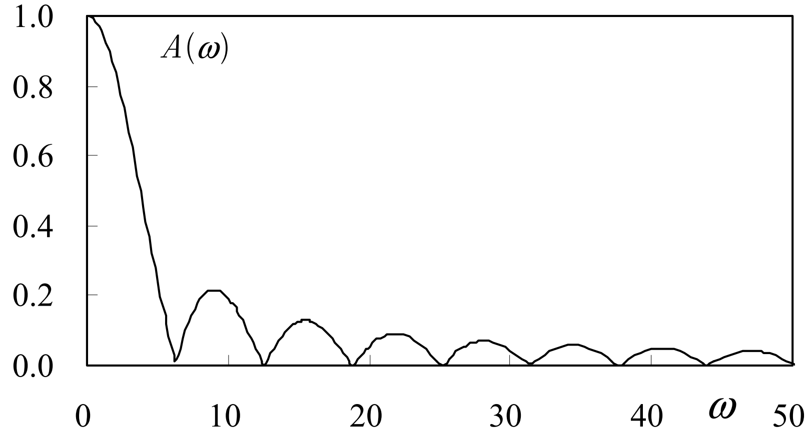
$$= \left(\frac{2}{\omega}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)$$

この場合の振幅密度関数と位相は、

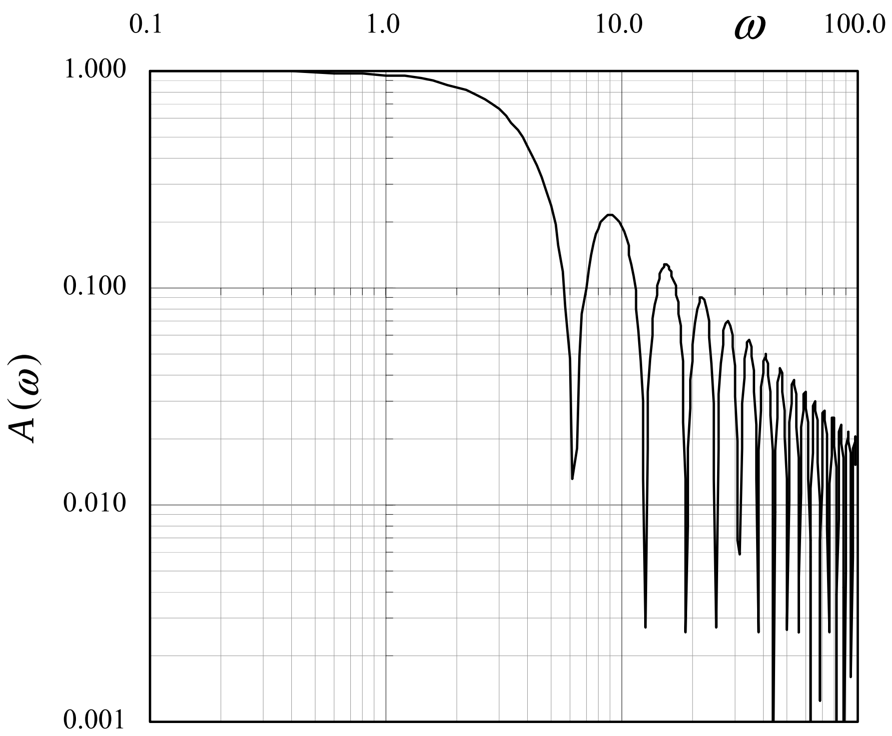
$$A(\omega)=\sqrt{\left\{\left(\frac{2}{\omega}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right\}^2+0^2}=\left|\left(\frac{2}{\omega}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right|$$

$$\varepsilon(\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{0}{\left(\frac{2}{\omega}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)}\right)=0,\quad 180°$$

であり、振幅密度関数をリニアスケールで表記すると、



また、対数スケールで表示すると下図のようになる。



フーリエ変換の例（２）

$$f(t)=\begin{cases}0, & \left(-\infty<t<-\dfrac{1}{2r}\right)\\ +r, & \left(-\dfrac{1}{r}<t<\dfrac{1}{r}\right)\\ 0, & \left(\dfrac{1}{2r}<t<\infty\right)\end{cases}$$

$F(\omega)$ を(4.26)式で計算すると、

$$F(\omega)=\int_{-1/2r}^{1/2r} r\cdot e^{-i\omega t}dt \quad =\left[-\frac{r}{i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-1/2r}^{1/2r}$$

$$=\left(-\frac{r}{i\omega}\right)\left(e^{-i\frac{1}{2r}\omega}-e^{i\frac{1}{2r}\omega}\right)$$

$$=\left(\frac{2r}{\omega}\right)\frac{e^{i\frac{1}{2r}\omega}-e^{-i\frac{1}{2r}\omega}}{2i}=\left(\frac{2r}{\omega}\right)\sin\left(\frac{1}{2r}\omega\right)$$

あるいは、別の方法として、

$$F(\omega)=\int_{-1/2r}^{1/2r} r\cdot(\cos\omega t-i\sin\omega t)dt$$

$$=2r\int_{0}^{1/2r}\cos\omega t\;dt \quad =2r\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right]_{0}^{1/2r}$$

$$=\left(\frac{2r}{\omega}\right)\sin\left(\frac{1}{2r}\omega\right)$$

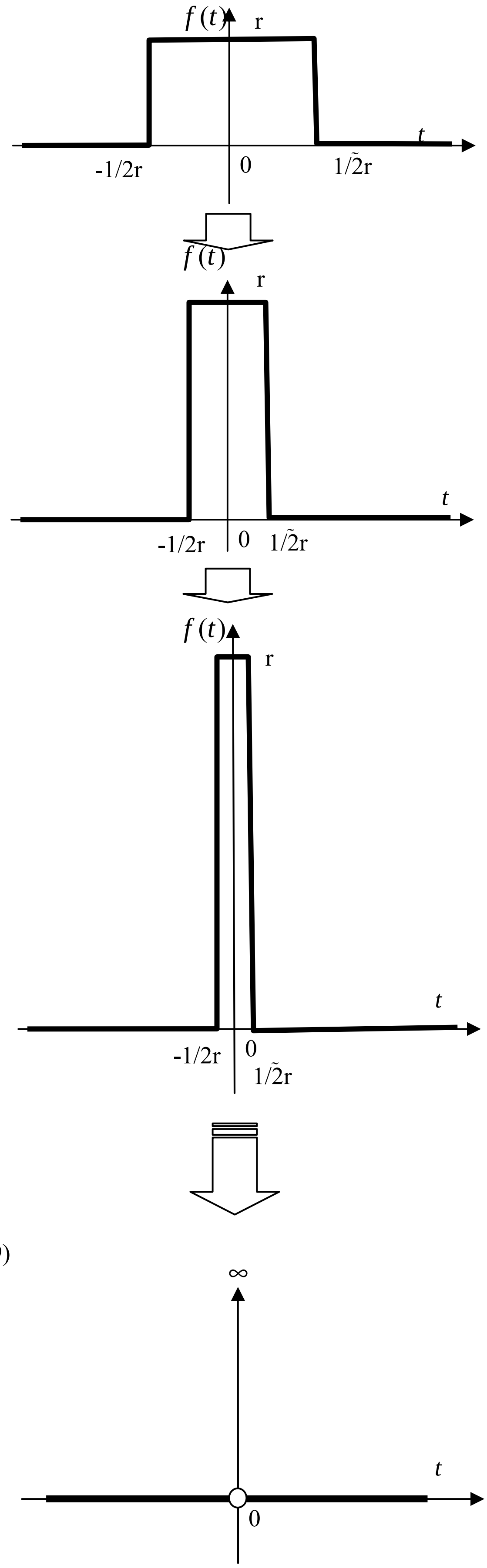
ここで r→∞の状態を考えると、

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{2r}{\omega}\right)\sin\left(\frac{\omega}{2r}\right)=1$$

となる。このような関数 $f(t)$ をデルタ関数と言い、記述される。

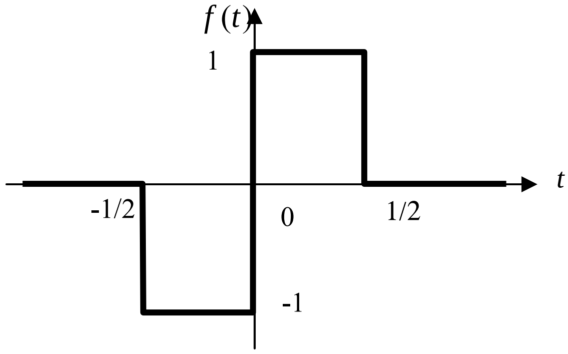
$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & (t=0)\\ 0, & (t\neq 0)\end{cases} \tag{4.29}$$

デルタ関数をフーリエ変換したものは１であるから、振幅密度関数は全ての周波数に対して１、位相は 0 となることから、white （白色）スペクトルになる。また、その関数形状は右図のようになり、**衝撃関数**とも呼ばれる。



フーリエ変換の例（３）＜演習問題１１の解答＞

$$f(t)=\begin{cases}-1, & \left(-\dfrac{1}{2}<t<0\right)\\ +1, & \left(0<t<\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$



$F(\omega)$ を(4.26)式で計算すると、

$$F(\omega)=\int_{-1/2}^{0}(-1)\cdot e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{1/2}(1)\cdot e^{-i\omega t}dt\quad=-\left[-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-1/2}^{0}+\left[-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{0}^{1/2}$$

$$=\left(-\frac{1}{i\omega}\right)\left(-1+e^{i\frac{1}{2}\omega}+e^{-i\frac{1}{2}\omega}-1\right)$$

$$=\left(i\frac{2}{\omega}\right)\left\{\frac{e^{i\frac{1}{2}\omega}+e^{-i\frac{1}{2}\omega}}{2}-1\right\}=\left(i\frac{2}{\omega}\right)\left\{\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)-1\right\}$$

あるいは、別の方法として、

$$F(\omega)=\int_{-1/2}^{0}(-1)\cdot(\cos\omega t-i\sin\omega t)dt+\int_{0}^{1/2}1\cdot(\cos\omega t-i\sin\omega t)dt$$

$$=-\left[\frac{1}{\omega}(\sin\omega t+i\cos\omega t)\right]_{-1/2}^{0}+\left[\frac{1}{\omega}(\sin\omega t+i\cos\omega t)\right]_{0}^{1/2}$$

$$=-\left(\frac{1}{\omega}\right)\left\{i+\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)-i\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right\}+\left(\frac{1}{\omega}\right)\left\{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)+i\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)-i\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{\omega}\right)\left\{-i-\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)+i\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)+\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)+i\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)-i\right\}$$

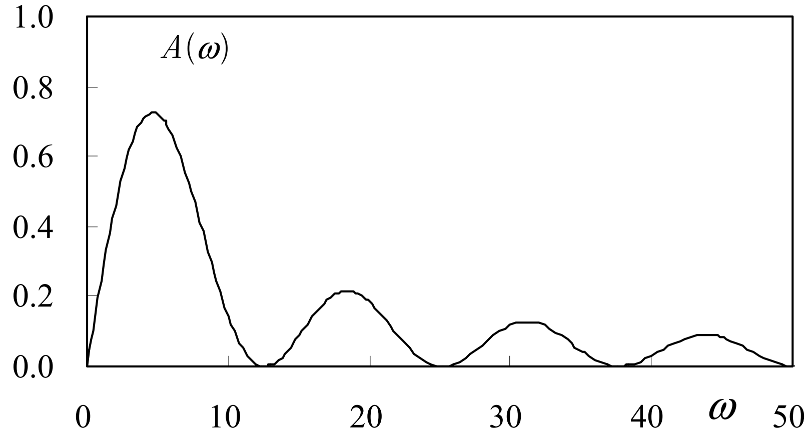
$$=\left(i\frac{2}{\omega}\right)\left\{\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)-1\right\}$$

この場合の振幅関数と位相は、

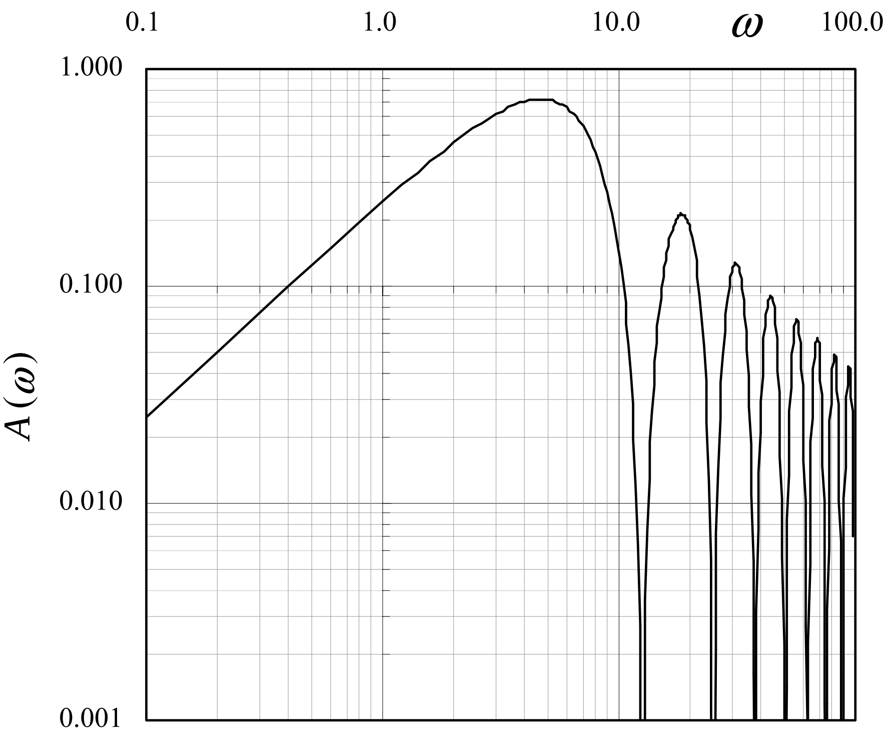
$$A(\omega)=\sqrt{0^2+\left[\left(\frac{2}{\omega}\right)\left\{\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)-1\right\}\right]^2}=\left(\frac{2}{\omega}\right)\left\{1-\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right\}$$

$$\varepsilon(\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{\left(\frac{2}{\omega}\right)\left\{\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)-1\right\}}{0}\right)=-90^\circ$$

振幅密度関数をリニアスケールで表記すると、



また、対数スケールで表示すると下図のようになる。



５．偏微分とその応用

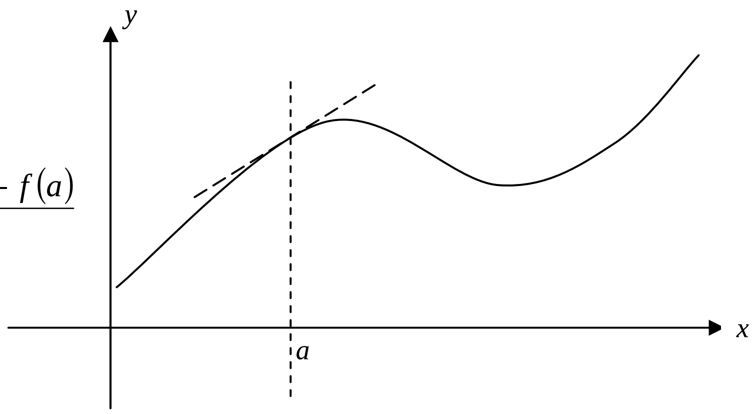
　この節では、偏微分の概念について理解し、その応用例として、実験やフィールドの計測結果を統計的に数式モデルに当てはめ（同定）解析する「最小自乗法」の考え方とその手法の適用を考えてみよう。

５．１　偏微分の概念

１）微分(differentiate)

　偏微分を考えるに当たって、微分の概念を再度整理しておこう。
実数関数 $y=f(x)$ が定義され、$x=x_0$ における微分は、x_0 の近くである関数になる。$y=f(x)$ が x-y 平面に書かれているならば、この関数の微分は下図のように、関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における傾きになり、この傾きの接線の式を求めることができる。この接線の傾きは、点 $x=a$ を定めるごとに決まり、全体の関数の形を知ることができる。特に、極大値や極小値などは、その傾きが零になることから、関数形状の特徴を微分から知ることもできる。

　「微分する」とは、微分係数(differential coefficient)や導関数(derivative)を求めることをいう。あるいは微分係数・導関数そのものを指す場合もある。



$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

が存在するとき $f(x)$ は $x=a$ において微分可能であるといい、この極限を $f'(x_0)$ と書き x=a における $f(x)$ の微分係数と呼ぶ。また、導関数は

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$$ と記述する。

２）偏微分(partial differentiate)

　偏微分とは、多変数の関数に対して、その変数を一旦固定して定数と見なし、一つの成分のみを変数と見なし、その成分方向への増減を与える微分法である。偏微分によって得られた微分係数や導関数のことを、偏微分係数、偏導関数あるいは単に偏微分 (Partial derivative) という。

　簡単のため、2 変数の場合について考えてみよう。実数関数を $z=f(x,y)$ とし、x と y とは関係を持たずに独立に変化することができるとする。ここで y を任意の値 b で固定すると、$z=f(x,b)$ となり、この関数は変数 x だけの関数 $g(x)$ と見ることができる。ここで、$x=a$ において、

$$\begin{aligned}g'(a)=\frac{dg}{dx}(a)&=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x,b)-f(a,b)}{\Delta x}\end{aligned}$$

が存在する時、これを $z=f(x,b)$ の、点 (a,b) における x に関する偏微分係数と言い、次式のように記述する。

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)} = \frac{\partial z}{\partial x}(a,b) = f_x(a,b)$$

ここに、$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y)$を $z = f(x,y)$ の x に関する**偏導関数**と呼ぶ。

同様に、x を任意の値 a で固定してできる $z = f(a,y)$ について、y で微分可能なら

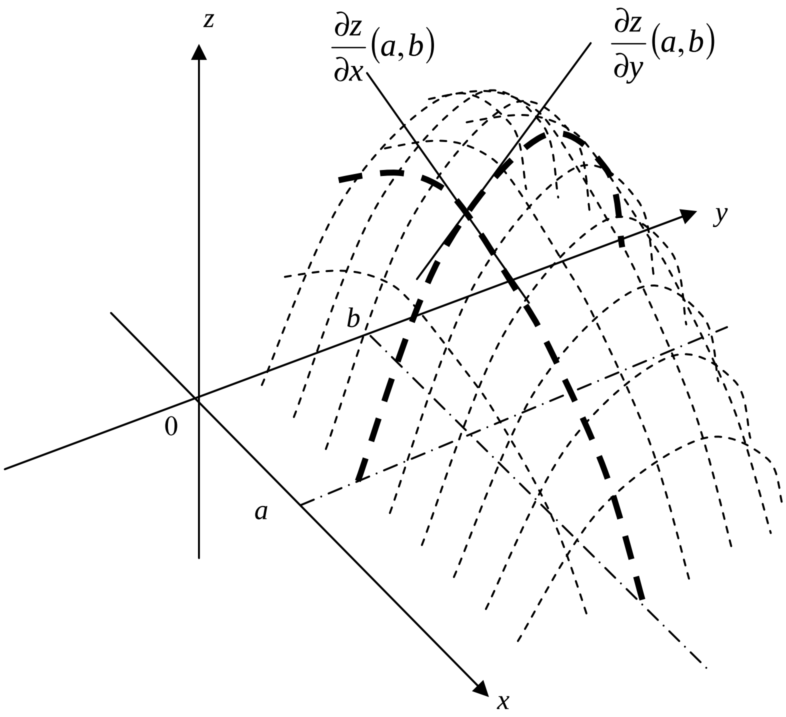
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)=(a,b)} = \frac{\partial z}{\partial y}(a,b) = f_y(a,b)$$

を $z = f(a,y)$ の、点 (a,b)における y に関する偏微分係数と言い、$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,y)$を $z = f(x,y)$ の y に関する**偏導関数**と呼ぶ。

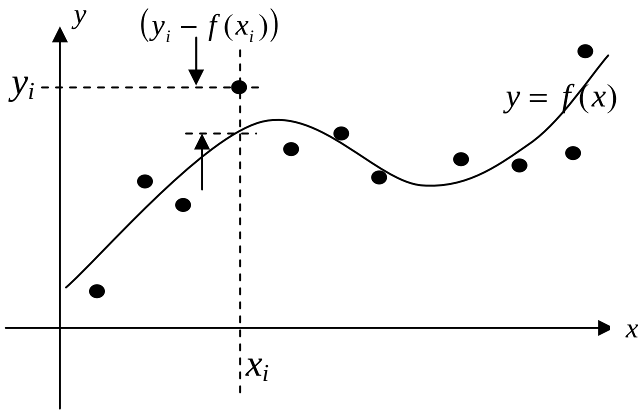
３）全微分（**Total derivative**）
二次元の領域で定義された実数値関数 $z = f(a,y)$ が x, y に関して偏微分可能であれば、任意の点における各成分方向の増分は、それぞれ偏微分で与えられるので z の増分 dz は次式で記述される。

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

また、このようにあらわせるとき微分可能であると言う。このように各変数方向の偏微分と無限小の積を全ての変数について加えたものを z の全微分、あるいは単に z の微分という。



４．２　最小自乗法による関数近似



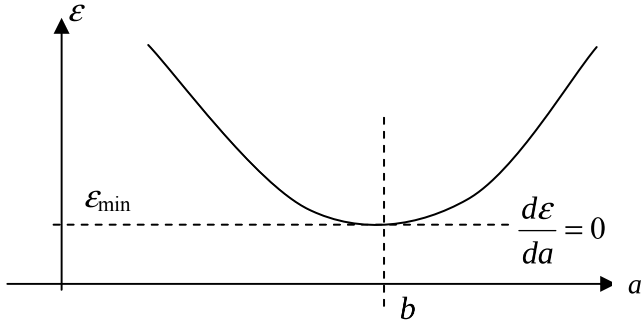
　実験結果やフィールドの計測結果を統計的に数式モデル（関数）で近似する手法は、現象を数式化する第一歩である。ここでは「（誤差）最小自乗法」の考え方とその具体的手法について述べる。

　計測された実測結果が、ある変数(x)に対して右図のように得られ、これを、xの関数 $y = f(x)$ で近似する場合を考える。

　任意の計測点(i)における実測値 y_i と近似関数 $f(x_i)$との誤差は$(y_i - f(x_i))$であるから、この誤差の自乗を全計測点について加算した総量εは次式で表される。

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2 \qquad (5.1)$$

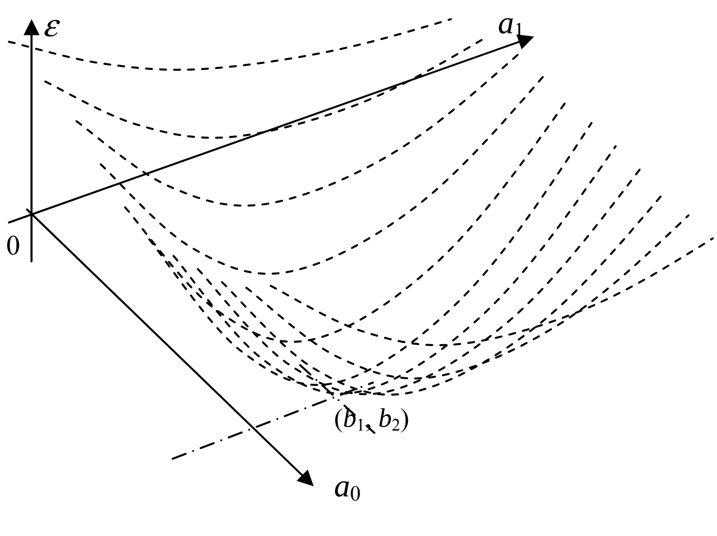
この自乗誤差の総量εは$\varepsilon \geq 0$であり、εが最小になるように $f(x)$ の関数を決める方法を「最小自乗法」と言う。



さて、上記の関数 $f(x)$ で決めるべき変数（パラメータ）が a という一つの変数の場合、この a の変化に対する自乗誤差の総量εは右図のように、$a = b$ で最小になり、その値から左右に外れるに従ってεが増大する。すなわち、εの最小値は、

$$\frac{d\varepsilon}{da} = 0 \qquad (5.2)$$

となる a の値を見つける事になる。また、$\varepsilon_{\min} = 0$となる最小値が存在する場合は全ての実測値が関数に一致する時であるが、現実の測定結果は何らかの誤差（バラツキ）が存在するので、零になることはない。



次に、関数 $f(x)$ で決めるべき変数（パラメータ）が二つの場合(a_0, a_1)を考えよう。この場合、自乗誤差の総量εは右図のように、$(a_0, a_1) = (b_0, b_1)$で最小になり、この点からそれぞれ左右に外れるに従ってεが増大する。この場合のεの最小値は、偏微分を用いて

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_0} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

となる(a_0, a_1)の値を見つける事になる。

一般に関数 $f(x)$ で決めるべき変数（パラメータ）が複数個(k)ある場合、自乗誤差の総量 ε は、$(a_0, a_1, \cdots a_{k-1}) = (b_0, b_1, \cdots b_{k-1})$ で最小になるから、ε の最小値は、次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_0} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_{k-1}} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

したがって、$(a_0, a_1, \cdots a_{k-1}) = (b_0, b_1, \cdots b_{k-1})$ は、上記の k 個の連立方程式を解くことにより求められる。ただし、この場合、$n \geq k$ であることが必要であり、$n = k$ の場合は全計測点を満足するような結果となることに注意を要する。なお、関数 $f(x)$ は数理統計では「回帰式」とも呼ばれ、求めるべきパラメータ $(a_0, a_1, \cdots a_{k-1})$ を回帰係数と言う。

１）平均値（**average**）

計測結果の平均値も広い意味で関数近似の一つである。この場合の近似関数は

$$f(x) = a \tag{5.5}$$

という１変数のパラメータで表現される。自乗誤差の総量 ε は(5.1)式より次式となり、

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a)^2 \tag{5.6}$$

ε が最小になる条件(5.2)式から

$$\frac{d\varepsilon}{da} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a)(-1) = -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} 1 = -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a \cdot n = 0 \tag{5.7}$$

これより、

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \tag{5.8}$$

として、関数 $f(x) = a$ を決定することができる。この場合 a は計測値 $(y_1, y_2, \cdots y_n)$ の平均値であり、平均値は自乗誤差の総量を最小にする近似関数の一つであることが確認できる。

２）一次式（直線）近似（回帰直線）

計測結果をある変数 x に対して直線で近似する場合の近似関数は

$$f(x) = a_0 + a_1 x \tag{5.9}$$

(a_0, a_1) という２変数のパラメータで表現される。この場合の自乗誤差の総量 ε は(5.1)式より次式

となり、

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{y_i - (a_1 + a_2 x_i)\right\}^2 \tag{5.10}$$

εが最小になる条件(5.3)式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_0} &= \sum_{i=1}^{n} 2\left\{y_i - (a_0 + a_1 x_1)\right\}(-1) = -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a_0 \sum_{i=1}^{n} 1 + 2a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^{n} 2\left\{y_i - (a_0 + a_1 x_1)\right\}(-1) = -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a_0 \sum_{i=1}^{n} 1 + 2a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

すなわち、

$$\left.\begin{aligned} a_0 \cdot n \quad + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

これより、クラメールの公式を使って、二元連立方程式を解くと(a_0, a_1)が次式で簡単に計算でき、

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ a_1 &= \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

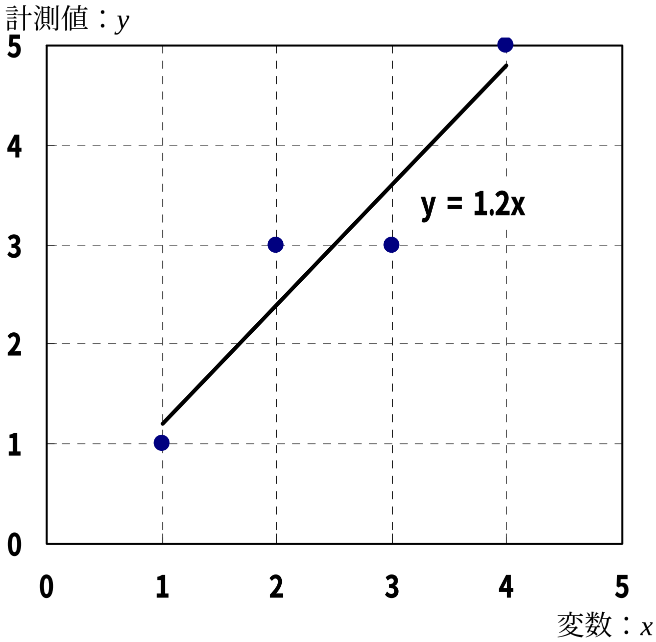
関数 $f(x) = a_0 + a_1 x$を決定することができる。

計算例＜演習問題１２の回答＞
ある実験で変数 x に対して下表のような計測結果４個が得られた。これを最小自乗法で直線近似式を求め、対応する直線を右図に記入しなさい。

変数:x	**計測値:y**
4	**5**
2	**3**
3	**3**
1	**1**

$$
\left.\begin{aligned}
&n = 4\\
&\sum_{i=1}^{4} x_i = 4+2+3+1=10\\
&\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 4^2+2^2+3^2+1^1=30\\
&\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 4\cdot 5+2\cdot 3+3\cdot 3+1\cdot 1=36\\
&\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 5+3+3+1=12
\end{aligned}\right\} \tag{5.14}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 12 & 10 \\ 36 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{12\cdot 30-10\cdot 36}{4\cdot 30-10^2} = \frac{0}{20} = 0\\
a_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 10 & 36 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{4\cdot 36-12\cdot 10}{4\cdot 30-10^2} = \frac{24}{20} = 1.2
\end{aligned}\right\} \tag{5.15}
$$



３）二次式近似

計測結果をある変数 x に対して二次曲線で近似する場合の近似関数は

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{5.16}$$

(a_0, a_1, a_2) という３変数のパラメータで表現される。この場合の自乗誤差の総量 ε は(5.1)式より次式となり、

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \right) \right\}^2 \tag{5.17}$$

ε が最小になる条件(5.4)式から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_0} &= \sum_{i=1}^{n} 2\left\{ y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \right) \right\}(-1) = -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a_0 \sum_{i=1}^{n} 1 + 2a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + 2a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^{n} 2\left\{ y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \right) \right\}(-x_i) = -2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + 2a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0 \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2} &= \sum_{i=1}^{n} 2\left\{ y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \right) \right\}(-x_i^2) = -2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i + 2a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + 2a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 0
\end{aligned} \tag{5.18}$$

すなわち、

$$\left.\begin{aligned}
a_0 \cdot n \quad + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i
\end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

これより、クラメールの公式を使って、三元連立方程式を解くと (a_0, a_1, a_2) が次式で計算できる。

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{vmatrix}}{D} \\
a_1 &= \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{vmatrix}}{D} \\
a_2 &= \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{vmatrix}}{D}, \quad D = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

４）多項式近似

前述の二次式から類推できるように、計測結果をある変数 x に対して k 次の多項式で近似する場合の近似関数は、

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k \tag{5.21}$$

$(a_0,a_1,a_2,\cdots a_k)$という$(k+1)$変数のパラメータで表現される。この場合の自乗誤差の総量εは(5.1)式より次式となり、

$$\varepsilon=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-f(x_i)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i-\left(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+\cdots+a_kx^k\right)\right\}^2 \tag{5.22}$$

$(a_0,a_1,a_2,\cdots a_k)$が以下の$(k+1)$元連立方程式を解くことによって求められる。

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}y_i & \sum_{i=1}^{n}x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^k\\ \sum_{i=1}^{n}x_iy_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^ky_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{2k}\end{vmatrix}}{D}\\
a_1&=\frac{\begin{vmatrix}n & \sum_{i=1}^{n}y_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^k\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_iy_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^k & \sum_{i=1}^{n}x_i^ky_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{2k}\end{vmatrix}}{D}\\
&\vdots\\
a_k&=\frac{\begin{vmatrix}n & \sum_{i=1}^{n}x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n}y_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^k & \sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^ky_i\end{vmatrix}}{D},\quad D=\begin{vmatrix}n & \sum_{i=1}^{n}x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^k\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^k & \sum_{i=1}^{n}x_i^{k+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{2k}\end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

５）２元線形回帰式

計測結果を二つの変数$\left(x_1, x_2\right)$に対して線形近似する場合の近似関数は

$$f(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \tag{5.24}$$

$\left(a_0, a_1, a_2\right)$という３変数のパラメータで表現される。自乗誤差の総量εは(5.1)式より次式となり、

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f\left(x_i\right)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left\{y_i - \left(a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i}\right)\right\}^2 \tag{5.25}$$

εが最小になる条件(5.4)式から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_0} &= \sum_{i=1}^{n} 2\left\{y_i - \left(a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i}\right)\right\}(-1) = -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a_0 \sum_{i=1}^{n} 1 + 2a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + 2a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} = 0 \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} &= \sum_{i=1}^{n} 2\left\{y_i - \left(a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i}\right)\right\}\left(-x_{1i}\right) = -2\sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i + 2a_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + 2a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + 2a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} = 0 \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2} &= \sum_{i=1}^{n} 2\left\{y_i - \left(a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i}\right)\right\}\left(-x_{2i}\right) = -2\sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i + 2a_0 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + 2a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + 2a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 = 0
\end{aligned} \tag{5.26}$$

すなわち、

$$\left.\begin{aligned}
a_0 \cdot n \quad + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} &= \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i
\end{aligned}\right\} \tag{5.27}$$

これより、クラメールの公式を使って、三元連立方程式を解くと$\left(a_0, a_1, a_2\right)$が次式で計算できる。

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 \end{vmatrix}}{D} \\
a_1 &= \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 \end{vmatrix}}{D} \\
a_2 &= \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i \end{vmatrix}}{D}, \quad D = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

６）多元線形回帰式

二元回帰式から類推できるように、計測結果を k 個の変数 $\left(x_1, x_2, \cdots x_k\right)$ に対し線形近似する場合の近似関数は定数項を含めて、

$$f(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k \tag{5.29}$$

であり $\left(a_0, a_1, a_2, \cdots a_k\right)$ という $(k+1)$ 変数のパラメータで表現される。この場合の自乗誤差の総量 ε は(5.1)式より次式となり、

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k\right)\right\}^2 \tag{5.30}$$

$\left(a_0, a_1, a_2, \cdots a_k\right)$ が以下の $(k+1)$ 元連立方程式を解くことによって求められる。

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ki} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 \end{vmatrix}}{D} \\
a_1 &= \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & \sum_{i=1}^{n} x_{ki} y_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 \end{vmatrix}}{D} \\
&\vdots \\
a_k &= \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & \sum_{i=1}^{n} x_{ki} y_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 \end{vmatrix}}{D}, \quad D = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$