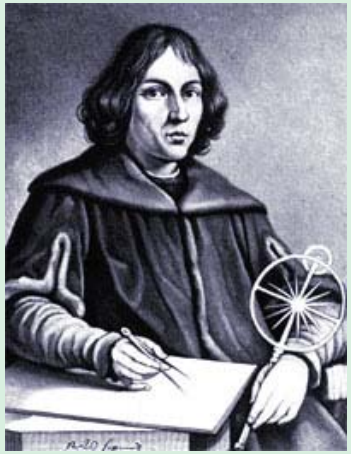
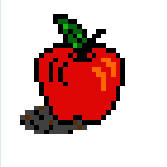
基礎物理 I　-9回目-

第5章　惑星の運動
角運動量とその保存則
力のモーメント、
慣性モーメント
ケプラーの三法則



先週のPoint

- 保存力とエネルギー保存則
- 力を与えるポテンシャルエネルギーU
  Uのグラフ下で、物体の運動



- 振り子の運動⇒単振動
- 振り子の実験で重力加速度gを求める
- 地球の質量Mを測る

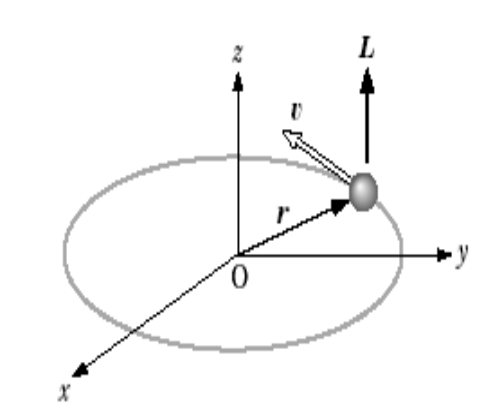
§1. 角運動量とその保存則

- 惑星の運動：Newtonの三法則で理解できる
- 万有引力のもとで運動：角運動量が保存

（したがって、平面の運動を考えるとよい）

惑星は古代から回転運動をし続けている。

回転運動を維持する特性：角運動量という概念



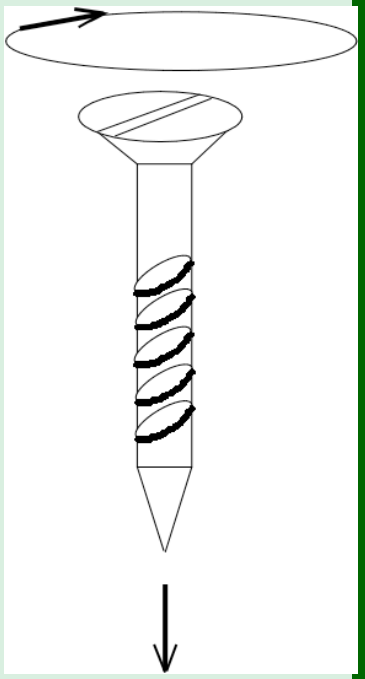
角運動量:半径 r 、速度***v***で回転する（質量m）とき、

角運動量：L ＝ r × P （Lは回転軸方向を向く）

運動方程式 F = ma = dP / dt

回転を表す L の時間微分を調べてみよう

外積の定義 の復習（p.317）



- 内積

  $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2$

  $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

- 外積

  $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$: 大きさ$AB\sin\theta$

  (方向**A**から**B**へ右ねじを回すときの進行方向)

  $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0$

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{L}/dt &= (d\mathbf{r}/dt) \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times (d\mathbf{p}/dt) \\
&= m\,\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\
&= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\
&= \mathbf{N}
\end{aligned}
$$

(力のモーメント, またはトルク)

もし、N=0ならば、Lは時間によらず一定 (保存)

今、Fは万有引力なので、

$$\mathbf{F} = -(G\,Mm/r^3)\,\mathbf{r}$$

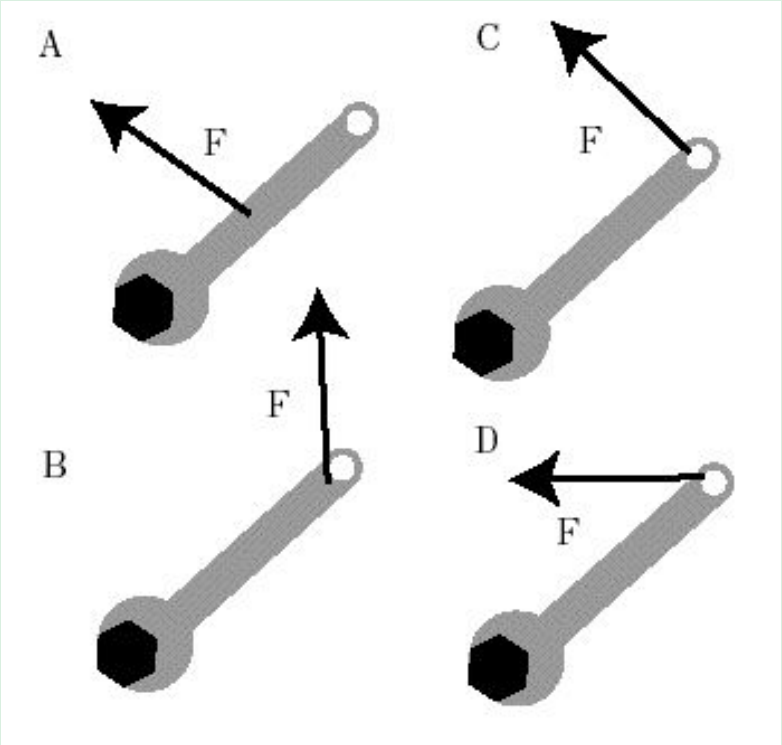
Fの方向は r と同じ → $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$

角運動量Lは保存（宇宙のはじめから未来永劫一定）

一般に回転運動の時、力Fは中心方向:⇔ Lは保存

簡単な問題例

- 同じ力Ｆでレンチを回した。一番良く力のモーメント（トルク）が加わるのはどれ？



回転運動ではLは一定
（回転軸を保ち続ける性質）

- 惑星の運動：　回転軸を保ったまま、ｒとＰの張る平面内で回転を続ける。
- 地球の自転：〈潮汐現象は自転の抵抗〉

摩擦などの非保存力がない限り、一度回転したら回転しつづける

ジャイロスコープ（目印のない闇夜の航行の指針）
自転車　（2輪車なのに倒れない理由）
こままわし

例題　カーブを曲がる車の角運動量

- **車(1500kg)が v =40 m/s, R=50mの円形コースを走るときのLは？**
- $L = r \times p$

  r と v は θ =90°　なので

  $L = r\, m v \sin\theta$

  $= 50\text{m} \times 1500\text{kg} \times 40\text{m/s}$

  $= 3 \times 10^6\ \text{kgm}^2/\text{s}$

  （車は半時計周りのとき、向きは垂直上向き）

慣性モーメント

今まで、物体を点と考えた(質点)

惑星や円盤:大きさのある物(剛体)の運動

- Hard Disk (HD)のような円盤の運動は？

  $v = R\omega$なので、円盤のvはRで異なる⇔不便

  回転運動は角速度ωを用いたほうが便利

回転運動の運動エネルギーKは

$$K = (1/2)mv^2 = (1/2)mR^2\omega^2 = (1/2)(mR^2)\omega^2$$

$$= (1/2)I\omega^2$$

回転運動での質量に対応する量 I （慣性モーメント）

質点系と剛体系の対応

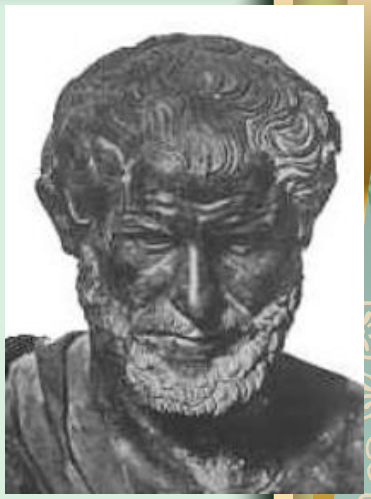
- 質量m　⇔　慣性モーメントI
- 速度 v　⇔　角速度ω
- 運動量p　⇔　角運動量 L

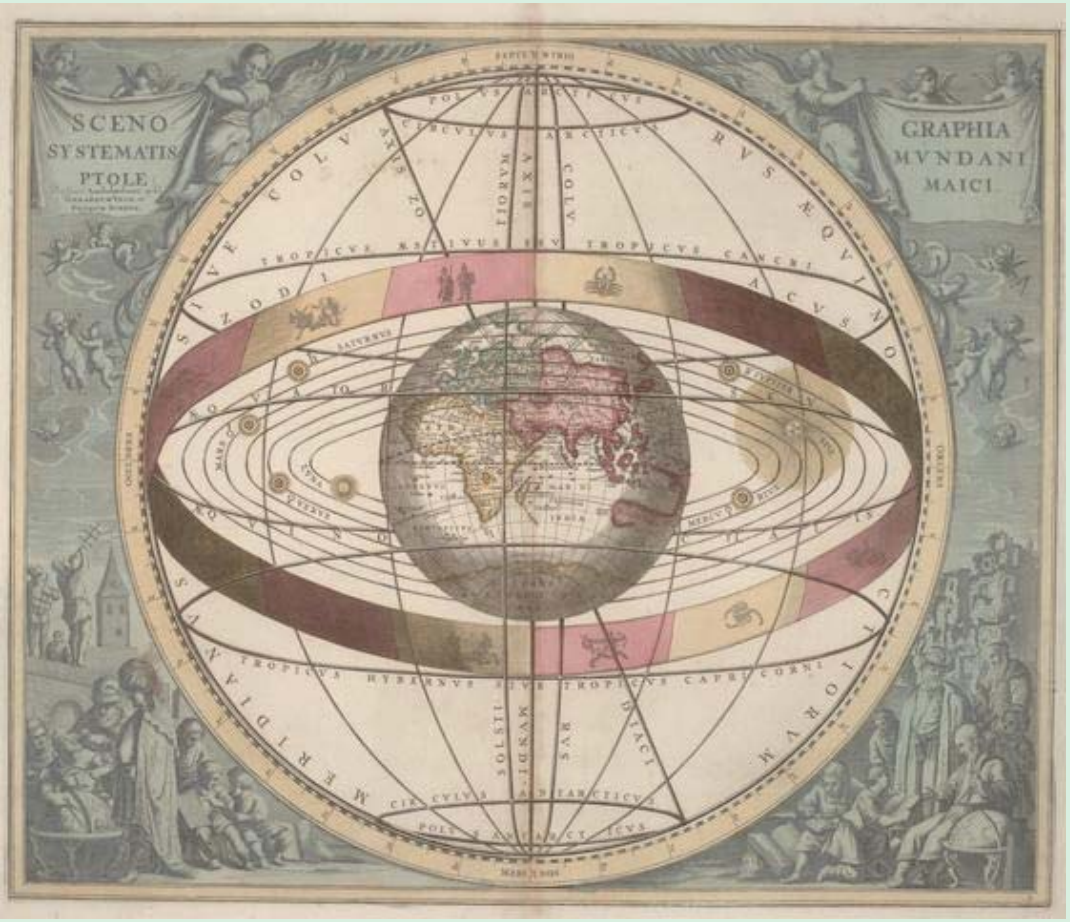
運動量 P	$P = mv$
角運動量L	$L = I\omega$

一般には $I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 d\rho$

惑星の運動― 歴史的意味

アリストテレス

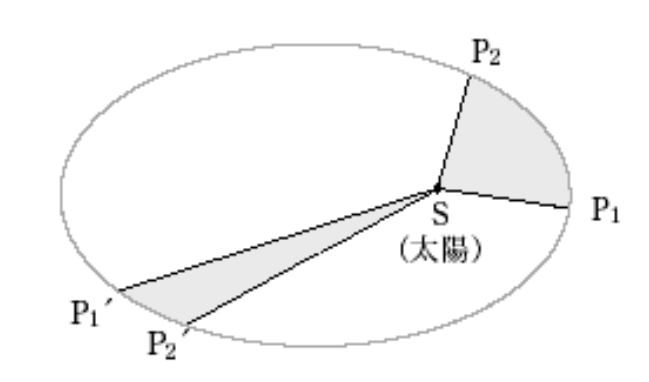




- 宇宙と地上の法則？
- 地球は宇宙の中心。宇宙が回転している。宇宙は球体で完全な世界
- → 地球は自転しながら太陽のまわりを回る。
  （コペルニクス革命）

自然界は同じ（簡単な）法則のもとに成立

惑星の運動
ーケプラーの法則ー



Kepler

1. 惑星は太陽を焦点とする楕円上を運動
2. 惑星と太陽を結ぶ線が一定時間に通過する面積（面積速度）は一定。
3. 惑星の公転周期の二乗は，軌道の半長軸の三乗に比例

ティコ・ブラーエによる測定を活用

3. 公転周期の二乗は，軌道の半長軸の三乗に比例

惑星	質量	離心率	公転周期 T	半長軸 a	T^2/a^3
水星	0.054	0.206	0.241	0.387	1.0005
金星	0.819	0.007	0.615	0.723	1.0002
地球	1.000	0.017	1.000	1.000	1.0000
火星	0.108	0.093	1.88	1.52	1.0001
木星	318.4	0.048	11.9	5.20	0.9992
土星	95.3	0.056	29.5	9.55	0.9948
天王星	14.5	0.047	84.0	19.2	0.9946
海王星	17.3	0.009	164.8	30.1	0.9946
冥王星	0.035	0.247	247.8	39.5	0.9933

今日のPoint

- 角運動量　Ｌ＝ｒ×ｐ
- 保存力なら、角運動量は保存される
- 力のモーメント　Ｎ　＝ｒ×Ｆ
- 慣性モーメント　Ｉ＝∫ｒ^{2}ｄρ

- 長年にわたる観測結果：Keplerの法則
- 　１）惑星は太陽を焦点とする楕円軌道
- 　２）面積速度一定（角運動量保存）
- 　３）惑星の公転周期TはR^3（半長軸）に比例

- この３法則はNewtonの法則で説明できる。
  （人工衛星はNewtonの法則で計算される）