カオス・フラクタル 講義ノート #1

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)
URL：http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/index.html

平成 21 年 4 月 21 日

目 次

この講義の前半では, 物理学, 数学, 生物学や経済学などの社会科学, 工学など非常に広範な分野で研究されているカオスについて, その性質や基礎的概念を数値実験等を用いることで理解する. 初回である今回はその「イントロ」である.

1 運動方程式とその線形化: 復習

力学の問題の典型例として, 質量の無視できる長さ l 紐の先に質量 m の質点を取り付け, これを重力加速度 g のもとに振る「単振子」を思い出そう. この振り子の運動方程式は鉛直方向と振り子のなす角 (ふれ角) を θ として

$$m\frac{d(l\dot{\theta})}{dt} = -mg\sin\theta \tag{1}$$

すなわち

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{2}$$

となる. この方程式はこのままでは解けないが, θ が十分小さいものとし, $\theta=0$ のまわりで線形化すると

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \tag{3}$$

となり, これは定数係数の線形微分方程式であるから, $\theta = \mathrm{e}^{\lambda t}$ を上式に代入し, λ に関する特性方程式: $\lambda^2+(g/l)=0$ を満たす $\lambda = \pm i\sqrt{g/l}$ に対し, 微分方程式の解は α,β を定数として

$$\begin{aligned}\theta &= \alpha\,\mathrm{e}^{i\sqrt{g/l}t}+\beta\,\mathrm{e}^{-i\sqrt{g/l}t} \\ &= (\alpha+\beta)\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + i(\alpha-\beta)\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t = A\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t + B\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t \end{aligned}\tag{4}$$

で与えられる $(\alpha = (A - iB)/2, \beta = (A + iB)/2)$. しかし, ふれ角 θ が大きくなってくると, $\sin\theta$ の $\theta = 0$ のまわりの展開での高次の項が無視できなくなり, 運動方程式には

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \tag{5}$$

のように, θ に関する非線形項 $(-\theta^3/3! + \theta^5/5! - \cdots)$ が現れる. この例の方程式 (2) は楕円積分と呼ばれる特殊関数を用いることで解くことができるが, 多くの場合, 非線形項を含む方程式を陽な形で解くことは難しく, たいていの場合に計算機での数値計算による解法を用いることになる. 本講義で扱うカオスも非線形微分方程式, あるいはそれを差分化した方程式を数値計算することで確認できる. そのような数値計算の技法は次週以降詳しく見ていくことになる.

2 生態系における個体数の従う微分方程式

ここでは力学の問題を離れて, 生態系におけるある個体数 N の従う方程式を考える. N は時間とともに変化する量であるから, $N(t)$ のように時間の関数であることに注意しておこう. このとき, 個体数 N の時間的な増加率が現在の個体数に比例するとすれば, 個体数 N の従う方程式は直ちに

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \tag{6}$$

と書くことができる. ここに λ は正の定数である. これはやはり線形の微分方程式であり, 変数分離操作により解くことができる. 両辺を N で割り, 辺々積分すると

$$\int_{N_0}^{N}\frac{dN}{N} = \lambda\int_0^t dt \tag{7}$$

つまり, $\log(N/N_0) = \lambda t$ であるから, 個体数は

$$N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{8}$$

のように時間とともに指数関数的に増加する.

しかし, 実際の生態系ではある特定の個体が増加し続けるということはなく, 周りの環境 (餌の欠乏, 天敵の存在など) により, 個体数が増えすぎると, それを抑制する効果が現れる. そこで, 方程式 (6) を次のように修正する.

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N - \mu' N^2 = \lambda N(1 - \mu N) \tag{9}$$

ここに $\lambda, \mu > 0$ である. これを**ロジスティック方程式**と呼ぶ. この方程式からわかることは

- $\mu \neq 0$ であれば, N に関する方程式は線形でない.
- N が大きくなると, N の変化の割合は $-\lambda\mu N^2$ の効果により減少する.

以下ではこのロジスティック方程式をいくつかの側面から詳しく見ていくことにしよう.

2.1 ロジスティック方程式の線形化

ロジスティック方程式は N に関して非線形であるから, 一見すると解くことが難しいように感じるが, 実は適切に変数を選び直すことで線形化でき, それを容易に解くことができる. $N \neq 0$ に対し, ロジスティック方程式:

$$\frac{dN}{dt} = -\mu\lambda N^2\left(1 - \frac{1}{\mu N}\right) \tag{10}$$

において, $X=1-(1/\mu N)$ と変数を変換すると, $dX/dN=1/\mu N^2$ であるから

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dX}{dt}\cdot\frac{1}{(\frac{dX}{dN})}=\mu N^2\frac{dX}{dt} \tag{11}$$

に注意すれば, 新しい変数 X に関する方程式は

$$\frac{dX}{dt} = -\lambda X \tag{12}$$

のような変数分離型となり, 直ちに $X=X_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$ がその解となる. 従って, 変数 N に戻すと

$$N(t) = \frac{1}{\mu(1-X_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t})} \tag{13}$$

となる. $t=0$ のとき, $N=N_0$ とし, X_0 を N_0 で表すと, $X_0=1-(1/\mu N_0)$ であるから結局

$$N(t) = \frac{1}{\mu-\left(\mu-\frac{1}{N_0}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}} \tag{14}$$

が解となる[1] .

2.2 ロジスティック方程式の差分化方程式

微分方程式の振る舞いを数値的に調べるための最も簡単な方策は, その方程式を差分方程式に直すことである. ここではロジスティック方程式を差分化することを考えよう. しかし, 線形化したロジスティック方程式:

$$\frac{d}{dt}\left(1-\frac{1}{\mu N}\right) = -\lambda\left(1-\frac{1}{\mu N}\right) \tag{15}$$

と非線形のままのロジスティック方程式:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(1-\mu N) \tag{16}$$

のどちらを差分化するかによって, 得られる結果が異なるかもしれない. そこで, 以下では上記 2 つのケースに対し, それぞれ差分化の結果を調べてみよう. (※ **これを調べてもらうことが今週のレポート課題**)

2.2.1 線形化されたロジスティック方程式の差分化

(15) 式を差分化すると

$$\left(1-\frac{1}{\mu N_t}\right)-\left(1-\frac{1}{\mu N_{t-1}}\right) = -\lambda\left(1-\frac{1}{\mu N_{t-1}}\right) \tag{17}$$

すなわち, $(1-1/\mu N_t)$ は初項が $(1-1/\mu N_0)$, 公比が $(1-\lambda)$ の等比級数なので

$$\left(1-\frac{1}{\mu N_t}\right) = (1-\lambda)\left(1-\frac{1}{\mu N_{t-1}}\right)=(1-\lambda)^2\left(1-\frac{1}{\mu N_{t-2}}\right)=\cdots(1-\lambda)^t\left(1-\frac{1}{\mu N_0}\right) \tag{18}$$

であるから, これを N_t について解いて

$$N_t = \frac{1}{\mu\left\{1-(1-\lambda)^t\left(1-\frac{1}{\mu N_0}\right)\right\}} \tag{19}$$

が得られる. そこで, ロジスティック方程式の解析解 (14) と差分化した方程式の解 (19) 双方を図 1 にプロットした. ここに, $\mu=1, N_0=10, \lambda=0.1$ に選んである. この図より, 線形化したロジスティック方程式を差分化した方程式の解はロジスティック方程式の解析解と極めて近い値を与えることがわかる.

[1] この線形化は単振子の線形化のように注目する変数 (θ) が十分小さい $(\theta\ll 1)$ などの近似を使っていないことに注意. $N\neq 0$ の全ての N に対して正確になりたつ.

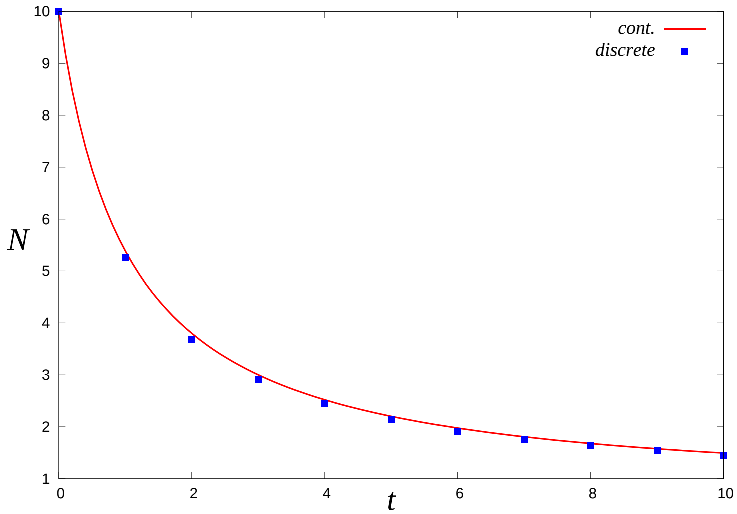

図 1: 線形化されたロジスティック方程式の解析解 ((14) 式, 実線) と差分化された方程式の解 ((19) 式, 四角点). $\mu = 1, N_0 = 10, \lambda = 0.1$ に選んである.

2.2.2 非線形なロジスティック方程式の差分化

次に非線形なロジスティック方程式 (16) を差分化することを考えよう. これも直ちに

$$N_t - N_{t-1} \quad = \quad \lambda N_{t-1}(1 - \mu N_{t-1}) \tag{20}$$

すなわち

$$N_t \quad = \quad (1+\lambda)N_{t-1} - \mu\lambda N_{t-1}^2 \tag{21}$$

が得られる[2]. 特に, $\lambda = a-1, \mu = a/(a-1)$, $a > 1$ と選ぶと, この差分方程式は

$$N_t \quad = \quad aN_{t-1}(1 - N_{t-1}) \tag{22}$$

のように書き直すことができるが, この差分方程式を特に**ロジスティック写像**と呼ぶ. この講義の前半 (カオス編) ではこの方程式の振る舞いを詳しく調べることでカオスについての理解を深めていくことになる.

レポート課題 1

(21) 式に対し, N_t を $N_0 = 10, \lambda = 0.1, \mu = 1$ に選ぶことで $t = 0$ から $t = 10$ までプロットし, それが (14)(19) 式からの結果 (図 1) と一致するか否かを調べよ. これは計算機を使わずに電卓でもできる.

レポートは次回の講義開始時に回収します.

[2] 差分化がわかりづらい場合には, $dN/dt \simeq (N_t - N_{t-\Delta t})/\Delta t$ で $\Delta t = 1$ とおき, $dN/dt = N_{t-1} - N_t$ としたと考えるとよい.