

カオス・フラクタル 講義ノート #1

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/index.html

平成 23 年 4 月 12 日

目次

1	「線形」「非線形」とは何か?	1
1.1	簡単な, しかし, 身近で興味深い事例での説明	1
1.2	アカデミックな事例: 脳科学における非線形性	4
2	運動方程式とその線形化: 高校物理の復習	7
3	生態系における個体数の従う微分方程式	8
3.1	ロジスティック方程式の線形化	9
3.2	ロジスティック方程式の差分方程式	10
3.2.1	線形化されたロジスティック方程式の差分	10
3.2.2	非線形なロジスティック方程式の差分	10

この講義の前半では, 物理学, 数学, 生物学や経済学などの社会科学, 工学など非常に広範な分野で研究されているカオスについて, その性質や基礎的概念を数値実験等を用いることで理解する. 初回である今回はその「イントロ」である.

1 「線形」「非線形」とは何か?

この講義に限らず, カオスやフラクタルの分野では「線形」「非線形」という言葉が頻出する. この講義でも, これらの言葉を多用し, これらが本講義での重要なキーワードとなっているので, これからの講義内容の理解に支障がでない程度に, まずははじめに線形, 非線形とは何か, それらがこの講義ではどのような意味合いで使われることになるのかを改めて確認しておきたい.

1.1 簡単な, しかし, 身近で興味深い事例での説明

まずは身近な, そして皆さんにとって比較的差し迫った問題に似た例を取り上げて考えてみたい. 今年の 10-11 月頃, 北海道大学工学部 情報エレクトロニクス学科 情報工学コース 3 年生は希望調査の後, 各研究室に配属されることになる. そのとき, 人気のある研究室には学生が集まり, そうでない研究室には集まらない. 結果として「大所帯」の研究室と「コジンマリ」した研究室ができるとしよう. このとき, 横軸に研究室の学生数 x , 縦軸 y にその研究室のアウトプット — 例えば

「論文数」 — をとってプロットする. すると, 図 1 のように, 学生数 x が増えれば増えるほど, アウ

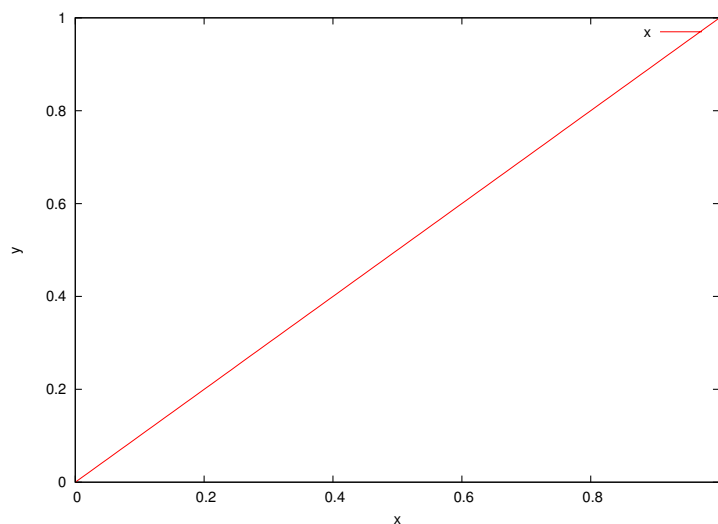


図 1: 学生数 x と研究室のアウトプット y の関係. 学生数が増えれば線形に (1 次関数で) アウトプットも増える例.

トプット y は増える¹. それでは「学生数を可能な限り増やす」という戦略が研究室のアウトプット, ひいては, 研究室のアクティビティを高めるための最善策なのであろうか?

ここで, 改めて考えてみなければならないのは, 学生数が増えるほど, 教員個々への負担も増大し, その結果として, 学生一人ひとりとディスカッションする時間は減少し, 指導時間が短くなる結果として, ある学生数を越えると「いくら学生を増やしてもアウトプットは増えないで一定値に落ち着く」という状況になりうるかもしれないという事実である (図 2 参照).

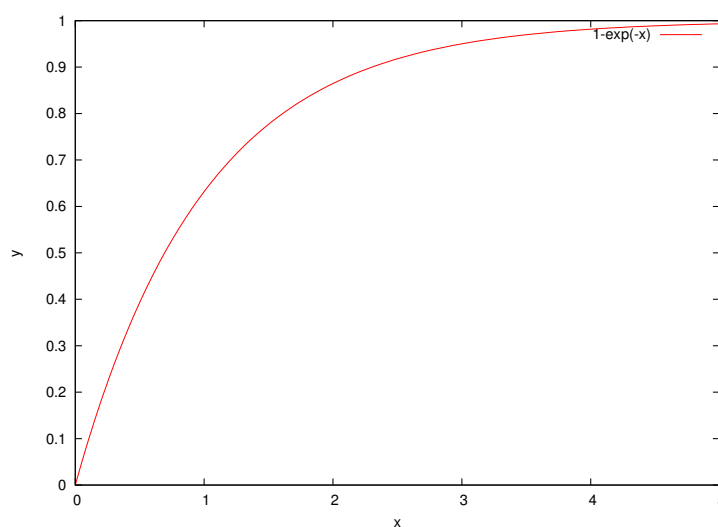


図 2: 学生数 x と研究室のアウトプット y の関係. 学生数が増えれるとはじめはアウトプットも増えるが, ほどなく「頭打ち」になり, 平衡値に近づく場合.

¹ この図の横軸のスケールは適当に決めてます. 0.2 目盛りで「一人」と見なしても良いし, 0.4 目盛りで一人と考えるのも良いであろう. 実際はどうなのかに関しては … ここではコメントを控えさせていただきます.

そればかりか、もっと最悪なシナリオとして — 人生では常に最悪のケースを想定して行動しなければならないが — 学生数を欲張って増やしたばかりに、本来ならば増えるはずのアウトプットが期待に反して学生数の増加とともに減少して行く場合もありうる (図 3 参照).

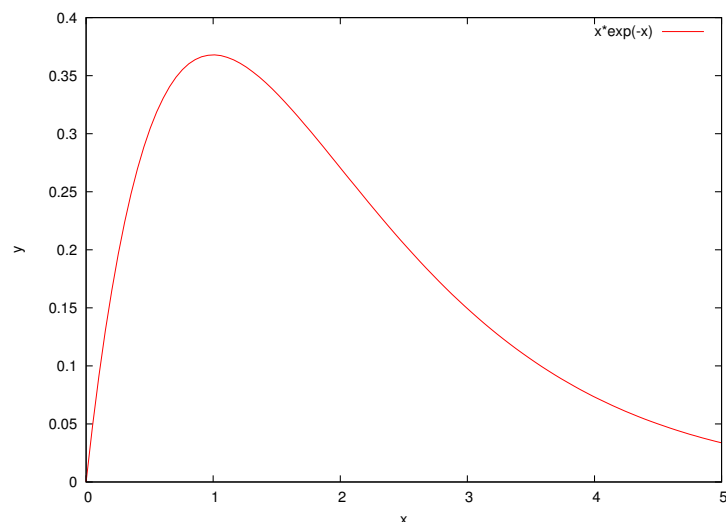


図 3: 学生数 x と研究室のアウトプット y の関係. 学生数が増えれるとはじめはアウトプットも増えるが、ほどなく「頭打ち」の状態になり、さらに学生数が増えるとアウトプットは減少に転じる例.

図 1 に示したように、学生数に比例してアクティビティも高くなるような状況を学生数の増加 (変化) とアクティビティの増加 (変化) は**線形な関係**にあると言う. 式で書くとすると、学生数を x 、アクティビティを y とおけば

$$y = ax \quad (1)$$

と「直線」で書ける場合である (今の例の場合 $a > 0$). 一方、この直線の比例関係から外れる図 2 や図 3 の場合を「線形で無い関係」ということで、**非線形な関係**と言う.

例えば、図 2 のような関係を式で書けば

$$y = 1 - \exp(-ax) \quad (2)$$

と書けるであろうし、図 3 の場合ならば

$$y = ax \exp(-x) \quad (3)$$

と書ける. また、これらを $x = 0$ の近傍でテーラー展開するとそれぞれ

$$y = 1 - \exp(-ax) \simeq ax + \frac{a^2}{2}x^2 + \dots \quad (4)$$

$$y = ax \exp(-x) \simeq ax - ax^2 + \dots \quad (5)$$

となり、 x が十分小さいのであれば、線形な関係 (1) で近似 — **線形近似** — できることがわかる. つまり、この事例で言うならば「学生数を増やせば増やすほど研究室のアクティビティが上がる」という主張は、 $x \simeq 1.0$ 程度までの「線形近似」が成り立つ範囲内では正しい². しかし、それ以上に

² 何人 (x) くらいまで「線形近似」が効くのかは教員や研究課題 (実験系か理論系か等) に依存する. 従って、研究室配属をシステム論的に考えると、全体のアウトプットを最大化するには、(全学生数一定のもとに) 研究室ごとに「適正サイズ (比)」が存在するので、その適切サイズのもとに配属された学生を丁寧に指導教育することであろうと思われる. 逆に学生の立場でこれをみれば、自分が学生の間で人気の無い研究室に配属されたとしても「少人数なので手厚い指導をしてくれるかもしれない」と気持ちを切り換えて、その後の勉学研究に臨むことが重要となろう.

学生数が多くなると非線形性 ((4)(5) の右辺第 2 項以降) が無視することができなく利いてきて一般にこれは成立しなくなる。

ところで, 研究室 A(学生数 x_A) と研究室 B(学生数 x_B) が合併し, 一つの新研究室ができたとしてしよう。すると, この研究室のアクティビティ y_{A+B} は, (1) 式の線形関係が成り立つのであれば

$$y_{A+B} = a(x_A + x_B) = ax_A + ax_B = y_A + y_B \quad (6)$$

となり, 単純に研究室 A と研究室 B のアクティビティの和となる。しかし, (2) や (3) の場合にはそうならない。例えば, (2) の場合には

$$y_{A+B} = 1 - \exp[-a(x_A + x_B)] \neq 1 - \exp(-ax_A) + 1 - \exp(-ax_B) = y_A + y_B \quad (7)$$

となり, どのように (7) 式を変形しようが, **単純に両研究室のアクティビティの和にはならない。**

さらに, 別な状況として, 研究室へ配属された学生が発奮して ($|c| > 1$)/怠けて ($|c| < 1$), x 人あたりの処理能力 (研究遂行能力) が実質的に cx 人分になったとしよう。このとき, 学生数とアクティビティの関係が線形 (1) ならば

$$y' = a(cx) = cax = cy \quad (8)$$

となり, 研究室のアクティビティは単純に c 倍される。しかし, 非線形な関係 (2) の場合には

$$y' = 1 - \exp[-a(cx)] \neq c\{1 - \exp(-ax)\} = cy \quad (9)$$

となり, (9) 式をどのように変形しても, **研究室のアクティビティは単純に c 倍されるわけではない。** よって, 変数 x, y の間の関係が線形ならば, 対象を (6) や (8) のような「好ましい性質」を使って, 単純な問題として議論することができる。しかし, 不幸にも非線形ならば, 問題はそんな単純にはならない。

このように, 問題を単純にして考えるため, 非線形な関係 ((2) や (3) 等) をある限定された条件下で (テラー展開などを用いて) 線形な関係 (1) として扱うことを, 関係式 (もしくは方程式) の **線形化** と呼ぶ。また, x が大きくなると, 上記の線形関係は「近似」でしかなくなり, 正確にモノゴトを調べようとするとき, 非線形な関係式をそのまま扱わなければならなくなる。これは技術的には格段に取り扱いが難しくなる場合が多い。よって, それを扱うための道具立てや諸概念を今のうちにしっかりと系統だてて学んでおく必要がある。この講義ではそのための学習を行う。

また一般的に言って, 面白く興味深い現象の背後にはこの非線形な関係がある場合が多い³。そのような複雑現象の代表がこの講義で学ぶ **カオス** と **フラクタル** である。

1.2 アカデミックな事例: 脳科学における非線形性

以上はあまりにも身近な日常例を用いた説明だったので, ここからはややアカデミックな話題を用いて「線形」「非線形」を考えてみたい。そこで, 脳とその情報処理を取り上げ, それを数理モデル化する際に現れる非線形性について見て行こう。

まずは脳における最小構成要素と考えられている **神経細胞 (ニューロン)** の実物写真を図 4(左) に示す。これに対して, このニューロンの模式図と各部位の名称を図 4(右) に載せる。

これらからわかることを要約すると, 各ニューロンは **シナプス** と呼ばれる神経機構を介して他のニューロンに結合しており, 各ニューロンは信号を電気的パルスとして伝える。電気的なパルスの

³ ここでみた例のような皮肉な結果を「興味深い」と言っているわけではない。念のため。

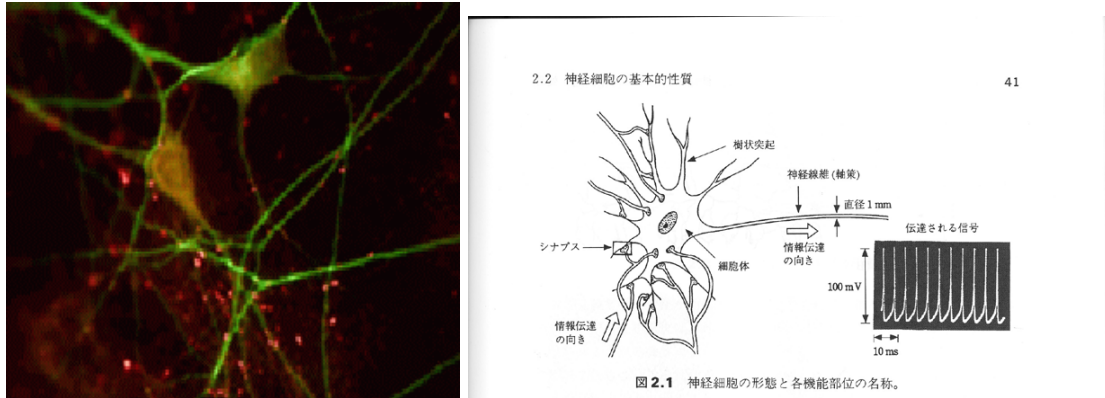


図 4: 実際の神経細胞 (左). 右はニューロンの構成要素とその電圧特性. 「神経細胞が行なう情報処理とそのメカニズム」松本元, 大津展之共編, 培風館 (1991) p. 41 の図 2.1 から抜粋.

生成過程は次の様式に従う. すなわち, 各シナプスはその結合部分に K^+ , Na^+ 等の正のイオンや Cl^- 等の負のイオンを透過させるイオンチャンネルを有し, このチャンネルを調節することにより, シナプス内部と外部の電位差 (通常は -70 mV 程) を調節することができる. 一般的には, 図 4(右)のようにこの電位差がある値 (約 -55 mV) を越えると高さ 100 V 幅 1 ms の大きさのパルスが生成され, このパルスは軸索上を電気的な信号 (イオンの流れ) として伝わっていく. その後, パルスを生成したニューロンは約 10 ms の「不応期」を経て, また, 電位差がある閾値を越えるとパルスを生成する.

これを素朴に数理モデル化すると図 5 のようになる.

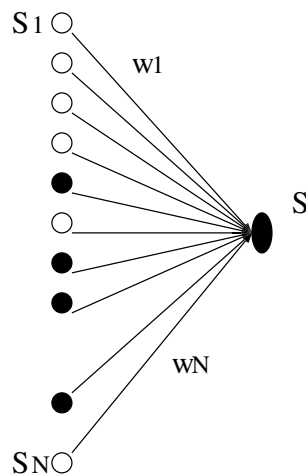


図 5: 神経素子 (ニューロン) の数理モデル. 各素子 $S_i (i = 1, \dots, N)$ は $S_i = 1$ (発火) あるいは $S_i = 0$ (静止) のどちらかの状態をとる. 注目するニューロン S の状態はこれらのニューロンからの重みつき和 $\sum_i w_i S_i \equiv \mathbf{w} \cdot \mathbf{S}$ がある閾値 θ を越えれば $S = 1$ 越えなければ $S = 0$ として決定される.

ここで, 各ニューロンは $S_i = 1$ (発火) か $S_i = 0$ (静止) の 2 つの状態のいずれかをとり, それぞれの値は注目するニューロンに重みつき和

$$h \equiv w_1 S_1 + w_2 S_2 + \dots + w_N S_N \equiv \mathbf{w} \cdot \mathbf{S} \tag{10}$$

$$\mathbf{w} \equiv (w_1, w_2, \dots, w_N) \quad (11)$$

$$\mathbf{S} \equiv (S_1, S_2, \dots, S_N) \quad (12)$$

として入力される. S はこの入力 h に対して

$$h > \theta : S \rightarrow 1 \quad (13)$$

$$h < \theta : S \rightarrow 0 \quad (14)$$

で決定される.

そこで, $\Theta(x)$ を階段関数として

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (15)$$

で定義し, 簡単のため閾値を $\theta = 0$ とすれば (結合 \mathbf{w} の各成分は負の値も取れるものとする) ニューロンの出力 S は

$$S = \Theta(h) = \Theta(\mathbf{w} \cdot \mathbf{S}) \quad (16)$$

と書くことででき, このニューロンの入力 h と出力 S の関係は研究室配属の例で説明した「非線形な関係」そのものである.

例えば, 注目するニューロン S へ i 番目の他ニューロンからの入力を $h_i = w_i S_i$ で定義し, ニューロン S の出力がこれらの入力に対して「線形」: $S^{(i)} = ah_i$ ならば, N 個のニューロンからの入力の総和に対するニューロン S の出力は

$$S = a(h_1 + h_2 + \dots + h_N) = ah_1 + ah_2 + \dots + ah_N = S^{(1)} + S^{(2)} + \dots + S^{(N)} \quad (17)$$

となり, S の出力はそれぞれのニューロンの入力の単純な和で書けることになる. しかし, 出力が (15)(16) 式のような階段関数であれば (17) のような単純な関係式は得られない.

このように非線形素子の数学的な取り扱いが難しくなることが予想されるが, ニューロンをある種の「情報処理機械」として見た場合, この非線形性が思いのほか役立つ側面もある.

例えば, N 個のニューロンからの入力 $h \equiv \sum_{i=1}^N h_i$ に小さな「ノイズ」 ϵ が加わったものがニューロン S に入力されるとしよう. このとき, 線形入出力関係を持つ素子であれば, 出力 S' は

$$S' = a(h + \epsilon) = ah + a\epsilon = S + a\epsilon \neq S \quad (18)$$

となり, 入力誤差 ϵ が a 倍された $a\epsilon$ だけの誤差が出力側からも観測されてしまう. 一方, 非線形素子の場合には

$$S' = \Theta(h + \epsilon) \quad (19)$$

となり, h と ϵ の符号が同じであれば, 出力は $S' = \Theta(h + \epsilon) = \Theta(h) = S$ となって不変であるし, h と ϵ の符号が逆であっても, $|h| > |\epsilon|$ が成り立つ範囲内では $S' = \Theta(h + \epsilon) = \Theta(h) = S$ となり, **ニューロン S の出力は加法的なノイズの影響を受けにくい**ことになる.

このように, 非線形素子はノイズの影響を受けにくい — 入力誤差に対する動作が**ロバスト**である — という利点を持っており, 従って, この「非線形性」が**雑音が多い生体内での信号処理を脳がうまく実行している理由の一つ**になっていると考えることができる.

この基本的事実を踏まえて, このようなニューロンの持つ非線形な入出力関係が脳のもつ「記憶」や「学習」などの高次機能にどのように関わっているのかを調べることは興味深く, 実際, 様々な学問分野で研究が進められている. この講義ではその詳細を述べる余裕はないが, 興味のある者は担当者達が大学院で担当している講義「脳科学入門 V: 神経回路の情報処理」:

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/BASIC_MATH/basic_math2011.html

を参考程度に覗いてみると良いであろう。

多くの皆さんにとって、この「脳」に関する話題は初めて聞く内容であったに違いない。しかし、気がつかなかったかもしれないが、実は我々が高校生のときに学んだ物理(力学)でも、上記の意味での「非線形な方程式」の「線形化」を行い、問題を単純化して扱っていた。別な言い方をすれば、高等学校のときには触れることができなかった現象を数値計算などを使って調べてみるのがこの講義の目的の一つである。それを次節で取り上げ、ここで述べた「線形」「非線形」の観点から再検討してみよう。

2 運動方程式とその線形化: 高校物理の復習

力学の問題の典型例として、質量の無視できる長さ l 紐の先に質量 m の質点を取り付け、これを重力加速度 g のもとに振る「単振り子」を思い出そう。この振り子の運動方程式は鉛直方向と振り子のなす角(ふれ角)を θ として

$$m \frac{d(l\dot{\theta})}{dt} = -mg \sin \theta \quad (20)$$

すなわち

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (21)$$

となる。この方程式はこのままでは解けないが、 θ が十分小さいものとし、 $\theta = 0$ のまわりで線形化すると

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \quad (22)$$

となり、これは定数係数の線形微分方程式であるから、 $\theta = e^{i\lambda t}$ を上式に代入し、 λ に関する特性方程式: $\lambda^2 + (g/l) = 0$ を満たす $\lambda = \pm i\sqrt{g/l}$ に対し、微分方程式の解は α, β を定数として

$$\begin{aligned} \theta &= \alpha e^{i\sqrt{g/l}t} + \beta e^{-i\sqrt{g/l}t} \\ &= (\alpha + \beta) \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t + i(\alpha - \beta) \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t = A \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t + B \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t \end{aligned} \quad (23)$$

で与えられる ($\alpha = (A - iB)/2, \beta = (A + iB)/2$)。しかし、ふれ角 θ が大きくなってくると、 $\sin \theta$ の $\theta = 0$ のまわりの展開での高次の項が無視できなくなり、運動方程式には

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \quad (24)$$

のように、 θ に関する非線形項 ($-\theta^3/3! + \theta^5/5! - \dots$) が現れる。前節で非線形項がある場合には取り扱いが難しくなる、と述べたが、この場合もそれが当てはまる。線形の場合と同じように、 $\theta = e^{i\lambda t}$ を (24) に代入して、 λ に関する特性方程式を作ろうとすると

$$\lambda^2 = \frac{g}{l} \left(1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} - \dots \right) \quad (25)$$

となり, θ に依らない (t に依らない) λ として特性方程式の解が求まるのは, 上式右辺の非線形項 ($-\theta^2/3! + \theta^4/5! - \dots$) が無視できる場合だけであることがわかる. 従って, 非線形振動の方程式は $\theta = e^{i\lambda t}$ のような「調和振動」の解を持たない.

この例での方程式 (21) は楕円積分と呼ばれる特殊関数を用いることで解くことができるが, 多くの場合, 非線形項を含む方程式を陽な形で解くことは難しく, たいていの場合に計算機での数値計算による解法を用いることになる. 本講義で扱うカオスも非線形微分方程式, あるいはそれを差分化した方程式を数値計算することで直接的に確認できる. 従って, この講義ではその手の数値計算の技法のいくつかを学習することも目標の一つとなる. そのような数値計算の技法は次週以降詳しく見ていくことになる.

3 生態系における個体数の従う微分方程式

ここでは力学の問題を離れて, 生態系におけるある個体数 N の従う方程式を考える. N は時間とともに変化する量であるから, $N(t)$ のように時間の関数であることに注意しておこう. このとき, 個体数 N の時間的な増加率が現在の個体数に比例するとすれば, 個体数 N の従う方程式は直ちに

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (26)$$

と書くことができる. ここに λ は正の定数である. これはやはり線形の微分方程式であり, 変数分離操作により解くことができる. 両辺を N で割り, 辺々積分すると

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = \lambda \int_0^t dt \quad (27)$$

つまり, $\log(N/N_0) = \lambda t$ であるから, 個体数は

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} \quad (28)$$

のように時間とともに指数関数的に増加する.

しかし, 実際の生態系ではある特定の個体が増加し続けるということではなく, 周りの環境 (餌の欠乏, 天敵の存在など) により, 個体数が増えすぎると, それを抑制する効果が現れる. そこで, 方程式 (26) を次のように修正する.

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N - \mu' N^2 = \lambda N(1 - \mu N) \quad (29)$$

ここに $\lambda, \mu > 0$ である. これを**ロジスティック方程式**と呼ぶ. この方程式からわかることは

- $\mu \neq 0$ であれば, N に関する方程式は線形でない.
- N が大きくなると, N の変化の割合は非線形項: $-\lambda\mu N^2$ の効果により減少する.

この方程式は生態系の方程式ではあるが, 見方を変えれば, 様々な社会科学上の問題にも適用できる. 例えば, 最近, 私の自宅の周りにいくつかのコンビニエンス・ストアができたが, 各社がどのような計画 (戦略) のもとに新たな店舗を出しているのか, ということに思いを馳せるととても興味深い. あまり地理的に近い場所に競合店舗を出してしまうと, 顧客の奪い合いになり, 収益が下がることは明らかである⁴. 上記生態系での個体を「コンビニエンス・ストア」に, 餌を「顧客」にみな

⁴ もちろん, 実際には, その店舗にしかない特別な商品で差別化をはかることで, 集客力を高める努力もされるであろう.

せば, 上記の方程式が当てはまりそうなことはすぐにわかる. 実際には, それ以外のファクタも取り込んで行かなければ現実を反映したモデルにならないこともまた明らかなので, 逐次「立地条件」や「人口密度 (空間的な構造)」などの要因を取り込んでモデル (方程式) を複雑にしていく. 一般的に方程式が複雑になればなるほど, その非線形性は強くなるので, やはり非線形についての基礎的な知識を養っておくことは重要なのである⁵.

情報科学/工学コースでは数学や物理コースと違って, カオスや非線形方程式そのものを研究することは少ないが, 研究対象を数学的にモデル化し, それを数値的に調べる際, 非線形性/カオスが必然的に現れる (例えば, 2足歩行の計算機シミュレーション等でもカオスの「歩行パターン」が現れる). 今はピンと来ないかもしれないが, 近い将来, それらの知識を持っている上で問題に取り組むのと, そうでないのとでは, 研究を進めて行く上で明らかに違いがあるのである.

以下ではこのロジスティック方程式をいくつかの側面から詳しく見ていくことにしよう.

3.1 ロジスティック方程式の線形化

ロジスティック方程式は N に関して非線形であるから, 一見すると解くことが難しいように感じるが, 実は適切に変数を選び直すことで線形化でき, それを容易に解くことができる. $N \neq 0$ に対し, ロジスティック方程式:

$$\frac{dN}{dt} = -\mu\lambda N^2 \left(1 - \frac{1}{\mu N}\right) \quad (30)$$

において, $X = 1 - (1/\mu N)$ と変数を変換すると, $dX/dN = 1/\mu N^2$ であるから

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dX}{dt} \cdot \frac{1}{\left(\frac{dX}{dN}\right)} = \mu N^2 \frac{dX}{dt} \quad (31)$$

に注意すれば, 新しい変数 X に関する方程式は

$$\frac{dX}{dt} = -\lambda X \quad (32)$$

のような変数分離型となり, 直ちに $X = X_0 e^{-\lambda t}$ がその解となる. 従って, 変数 N に戻すと

$$N(t) = \frac{1}{\mu(1 - X_0 e^{-\lambda t})} \quad (33)$$

となる. $t = 0$ のとき, $N = N_0$ とし, X_0 を N_0 で表すと, $X_0 = 1 - (1/\mu N_0)$ であるから結局

$$N(t) = \frac{1}{\mu - \left(\mu - \frac{1}{N_0}\right) e^{-\lambda t}} \quad (34)$$

が解となる⁶.

⁵ この講義で後ほど紹介する予定だが, 我々の研究室で最近はじめた「労働市場」の数学モデルにおいても, この講義で扱う「カオス」が現れる. 興味のある者は, 今春に卒業された日野光さんの修士論文が HUSCAP からダウンロードできるので, 軽く読んでみると良いであろう. <http://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/handle/2115/44985> 質問があれば, 著者の日野さんは卒業されてしまったので井上まで遠慮なくどうぞ.

⁶ この線形化は単振子の線形化のように注目する変数 (θ) が十分小さい ($\theta \ll 1$) などの近似を使っていないことに注意. $N \neq 0$ の全ての N に対して正確になりつつ.

3.2 ロジスティック方程式の差分方程式

微分方程式の振る舞いを数値的に調べるための最も簡単な方策は、その方程式を差分方程式に直すことである。ここではロジスティック方程式を差分方程式することを考えよう。しかし、線形化したロジスティック方程式:

$$\frac{d}{dt} \left(1 - \frac{1}{\mu N} \right) = -\lambda \left(1 - \frac{1}{\mu N} \right) \quad (35)$$

と非線形のままのロジスティック方程式:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(1 - \mu N) \quad (36)$$

のどちらを差分化するかによって、得られる結果が異なるかもしれない。そこで、以下では上記2つのケースに対し、それぞれ差分化の結果を調べてみよう。(※ **これを調べてもらうことが今週のレポート課題**)

3.2.1 線形化されたロジスティック方程式の差分化

(35) 式を差分化すると

$$\left(1 - \frac{1}{\mu N_t} \right) - \left(1 - \frac{1}{\mu N_{t-1}} \right) = -\lambda \left(1 - \frac{1}{\mu N_{t-1}} \right) \quad (37)$$

すなわち、 $(1 - 1/\mu N_t)$ は初項が $(1 - 1/\mu N_0)$ 、公比が $(1 - \lambda)$ の等比級数なので

$$\left(1 - \frac{1}{\mu N_t} \right) = (1 - \lambda) \left(1 - \frac{1}{\mu N_{t-1}} \right) = (1 - \lambda)^2 \left(1 - \frac{1}{\mu N_{t-2}} \right) = \dots (1 - \lambda)^t \left(1 - \frac{1}{\mu N_0} \right) \quad (38)$$

であるから、これを N_t について解いて

$$N_t = \frac{1}{\mu \left\{ 1 - (1 - \lambda)^t \left(1 - \frac{1}{\mu N_0} \right) \right\}} \quad (39)$$

が得られる。そこで、ロジスティック方程式の解析解 (34) と差分化した方程式の解 (39) 双方を図 6 にプロットした。ここに、 $\mu = 1, N_0 = 10, \lambda = 0.1$ に選んである。この図より、線形化したロジスティック方程式を差分化した方程式の解はロジスティック方程式の解析解と極めて近い値を与えることがわかる。

3.2.2 非線形なロジスティック方程式の差分化

次に非線形なロジスティック方程式 (36) を差分化することを考えよう。これも直ちに

$$N_t - N_{t-1} = \lambda N_{t-1}(1 - \mu N_{t-1}) \quad (40)$$

すなわち

$$N_t = (1 + \lambda)N_{t-1} - \mu\lambda N_{t-1}^2 \quad (41)$$

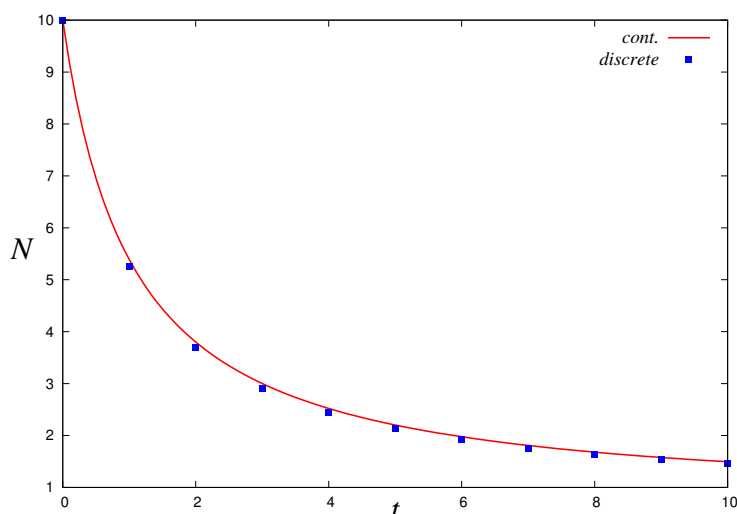


図 6: 線形化されたロジスティック方程式の解析解 ((34) 式, 実線) と差分化された方程式の解 ((39) 式, 四角点). $\mu = 1, N_0 = 10, \lambda = 0.1$ に選んである.

が得られる⁷. 特に, $\lambda = a - 1, \mu = a/(a - 1), a > 1$ と選ぶと, この差分方程式は

$$N_t = aN_{t-1}(1 - N_{t-1}) \quad (42)$$

のように書き直すことができるが, この差分方程式を特に**ロジスティック写像**と呼ぶ.

この方程式 (42) は何の変哲もない, 一本の単純な 2 項間漸化式に見えるが, その見かけ上のシンプルさに反し, それの示す振る舞いは面白く, 持っている内容は深く, 我々はカオスに関する基本的知識の多くをこの方程式から学ぶことができる.

そこで, この講義の前半 (カオス編) ではこの方程式の振る舞いを詳しく調べることでカオスについての理解を深めていくことになる.

レポート課題 1

(41) 式に対し, N_t を $N_0 = 10, \lambda = 0.1, \mu = 1$ に選ぶことで $t = 0$ から $t = 10$ までプロットし, それが (34)(39) 式からの結果 (図 6) と一致するか否かを調べよ. これは計算機を使わずに電卓でもできる.

レポートは次回の講義開始時に回収します.

注意事項:

この講義では, 毎回のレポート解答例などを前年度までに全員が履修した (計算機プログラミング I, II・同演習) プログラミング言語である C 言語を用いて提示します. しかし, 皆さんの**レポート作成においては特にプログラミング言語を指定しません**. しかし, 万が一, 多くの人々の知らない, マニアックで特殊な言語でソースコードを記述し, それを添付する際には, その旨を明記してください (参考文献や適切な URL など).

⁷ 差分化がわかりづらい場合には, $dN/dt \simeq (N_t - N_{t-\Delta t})/\Delta t$ で $\Delta t = 1$ とおき, $dN/dt = N_t - N_{t-1}$ としたと考えるとよい.