

カオス・フラクタル 講義ノート #3

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/index.html

平成 23 年 5 月 10 日

目次

5 軌道の稠密性	23
5.1 ベルヌーイ写像	23
5.1.1 2進小数の復習	24
5.1.2 2進小数のビットシフト演算とベルヌーイ写像	25
5.2 稠密性再考	26
5.3 テント写像とベルヌーイ写像の関係	26
5.4 テント写像とロジスティック写像の関係	27
5.5 軌道の密度関数	28

課題 2 の解答例

次のようなテント写像¹：

$$x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n| = \begin{cases} 2x_n & (0 \leq x_n \leq 1/2) \\ 2 - 2x_n & (1/2 < x_n \leq 1) \end{cases} \quad (53)$$

はロジスティック写像同様に複雑な挙動を示す。簡単なプログラムなので、「計算機プログラミング I・同演習」の復習を兼ねて下記にプログラム例を書く

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define x0 0.10 /* 写像の初期値 */
#define N 100
main()
{
    FILE *pt; /* ファイルポインタ */
    double x;
    int i;
    if((pt = fopen("tent_map.dat","wt")) != NULL){ /* ファイルオープン*/
        for(i = 0, x=x0; i <= N; i++){
```

¹ なぜ「テント」写像と呼ばれるのか、は $y = 1 - |1 - 2x|$ を $x \in [0, 1]$ の関数として図示してみるとわかる。

```

    x = 1.0-fabs(1.0-1.99999*x); /* テント写像 */
    fprintf(pt,"%d %lf\n",i,x); /* ファイル書き込み */
  }
}
fclose(pt); /* ファイルクローズ*/
}

```

となる. ここで得られる結果を横軸に繰り返し回数 n , 縦軸にその n での数列の値をプロットすると図 9 のようになる.

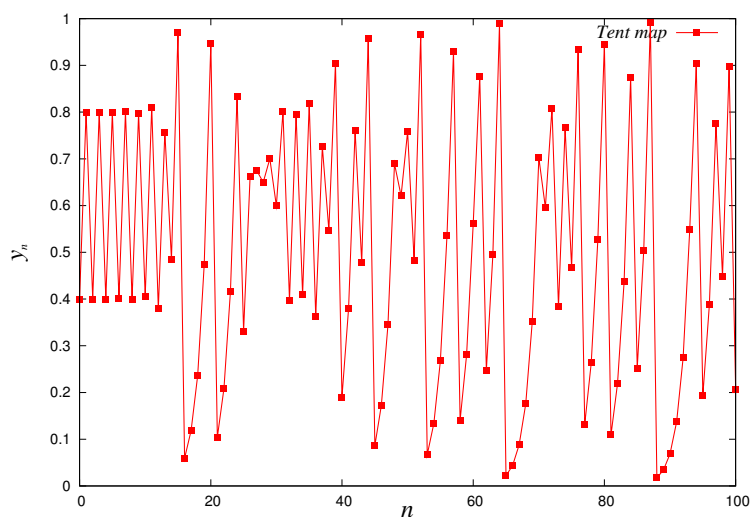


図 9: テント写像から生成される数列 x_n の様子.

※ この課題に関する Remark

$T(x) = 1 - |1 - 2x|$ に対し, $x_0 = 0.1 = 1/10$ として, $x_{n+1} = T(x_n)$ より具体的にはじめの数項を書き出してみると

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 1 - \left| 1 - \frac{2}{10} \right| = 1 - \left| \frac{4}{5} \right| = \frac{1}{5} \\
 x_2 &= 1 - \left| 1 - \frac{2}{5} \right| = 1 - \left| \frac{3}{5} \right| = \frac{2}{5} \\
 x_3 &= 1 - \left| 1 - \frac{4}{5} \right| = 1 - \left| \frac{1}{5} \right| = \frac{4}{5} \\
 x_4 &= 1 - \left| 1 - \frac{8}{5} \right| = 1 - \left| -\frac{3}{5} \right| = \frac{2}{5} \\
 x_5 &= 1 - \left| 1 - \frac{4}{5} \right| = 1 - \left| \frac{4}{5} \right| = \frac{4}{5} \\
 \dots &= \dots
 \end{aligned}$$

となり, 以降は $2/5 = 0.4, 4/5 = 0.8$ を繰り返す 2 周期を示す.

また, $x_0 = 0.3 = 3/10$ とすると, 同様に, $x_1 = 3/5, x_2 = 4/5, x_3 = 2/5, x_4 = 4/5, x_5 = 2/5, \dots$ のように, やはり $2/5, 4/5$ を繰り返す 2 周期を示す. さらに詳しくみていくと, 初期値 x_0 の値

が $0.\gamma_1$ ($\gamma_1 \neq 0,5$) の形をした全ての小数点以下 1 桁目まで残した数に対し, $2/5, 4/5$ を繰り返す 2 周期を示すことがわかり, $x_0 = 0.\gamma_1\gamma_2$ ($\gamma_2 \neq 0,5$) に対しては 10 周期を与え, 一般に $x_0 = 0.\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_N$ ($\gamma_N \neq 0,5$) に対しては $2 \cdot 5^{N-1}$ 周期を持つことがわかる. 図 10 に $x_0 =$

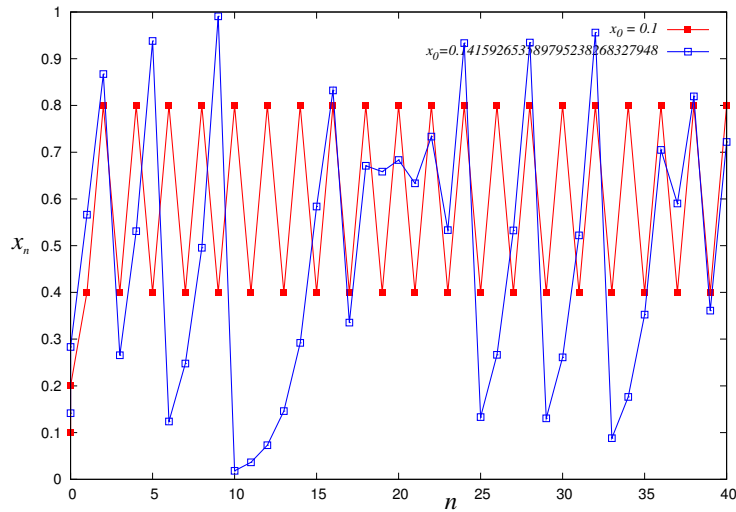


図 10: $x_0 = 0.1, x_0 = 0.141592653589795238268327948$ から開始したテント写像からの数列の様子.

$0.1, x_0 = 0.141592653589795238268327948$ を初期値に選んだ場合のテント写像からの数列を計算機によって生成した結果を示す. 上で述べたように, $x_0 = 0.1$ の場合には 2 周期が得られ, $N = 27$ である $x_0 = 0.141592653589795238268327948$ に選んだ場合には $2 \cdot 5^{26} = 2980232238769531250$ 周期が得られる. これは実質的に観測することが難しいほど長い周期である.

また, $x_0 = 0.1$ の場合, 計算機内で 0.799999 と 0.8 を区別できないことにより, それ以降の数列がこの微妙な差により変化して行き, 最終的に 0.5 に到達した時点で, x_n の値は 0 に収束してしまう. 実際に, データファイルを見てみると

```

35 0.400000
36 0.799999
37 0.400002
38 0.800003
.....
.....
52 0.750000
53 0.500000
54 1.000000
55 0.000000
    
```

このような症状は $x_0 = 0.141592653589795238268327948$ の場合も同様である. 従って, 数値計算の際にはテント写像の式で $2 = 1.999$ とするなどの工夫が必要となる.

5 軌道の稠密性

前回学んだ $a = 4.0$, あるいは $a = 3.9$ の場合のロジスティック写像: $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$, 上記に見たテント写像から得られる数列: x_0, x_1, x_2, \dots , は一見すると全くランダムな点列のように見える. この数列は 0 から 1 の間の実数値をとるので, これを $[0, 1]$ の一様乱数と比較してみることは興味深い. そこで, x_n が取り得る範囲 $[0, 1]$ を 1000 等分し, 写像の各ステップで x_n の値がこの 1000 等分された「ビン」の中にどれくらい入るかを数えてみることにする. つまり, ここでのビンのサイズ (幅) は 0.001 である. もし, 十分な繰り返し回数 (例えば $n = 100000$ 程度) とり, 1000 個のビンの中にほぼ均等に x_n の値が入れば, この写像は一様乱数に近いことが言える. これをプログラミングするためには, 先に例示したプログラムのメイン関数を次のように書き換えればよい.

```
for(k=0; k<=999;k++){
    count[k]=0; /* ビンの初期化 */
}
for(i = 0, x=x0; i <= N; i++){
    x = 1.0-fabs(1.0-1.99999*x);
    for(k=0; k<=999; k++){
        if((x>=0.001*k) && (x<0.001*(k+1))){
            count[k]++;
        }else{
            count[k]=count[k];
        }
    }
}
for(k=0; k<=999; k++){
    fprintf(pt, "%lf %lf\n", 0.001*k, (double)count[k]*1000/N);
}
}
```

そこで, まずは上記のテント写像についての結果を図 11 に載せる. この結果を見ると, テント写像から生成される数列は一様分布すると考えられる. 以上は計算機に基づく数値計算からの実験結果であるが, これをもう少し手計算により別な角度から直接的に理解したい. そこで, ここでは**ベルヌーイ写像**と呼ばれる第三の写像を導入し, それについてみていくことにする.

5.1 ベルヌーイ写像

次のような写像 $B(x)$ を考える.

$$x_{n+1} = B(x_n) = \begin{cases} 2x_n & (0 \leq x_n < 1/2) \\ 2x_n - 1 & (1/2 \leq x_n \leq 1) \end{cases} \quad (54)$$

この写像は既に学んだテント写像との間に関係を持ち, $0 \leq x < 1/2$ で $B(x) = T(x)$ となり, $1/2 \leq x \leq 1$ で $B(x) = 1 - T(x)$ を満たす.

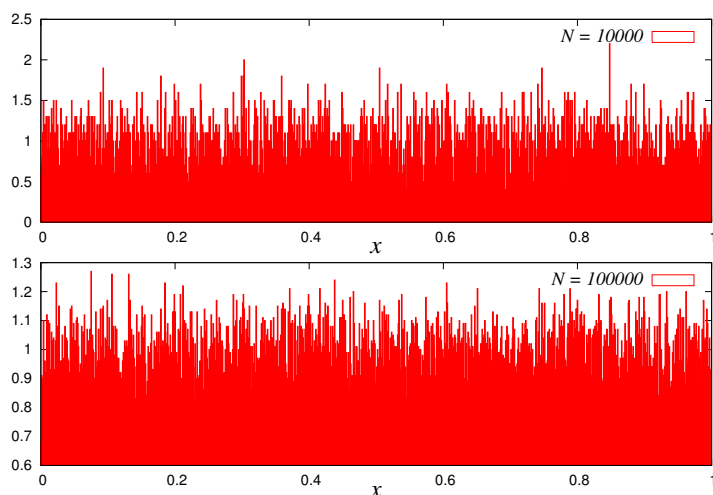


図 11: テント写像の各ビンに落ちる x_n の割合.

5.1.1 2進小数の復習

ここではベルヌーイ写像に関する性質を調べる前に、簡単に2進数の復習をしておこう。ここでは $0 \leq x \leq 1$ の実数のみを扱っているので、2進小数のみを考える。このとき、10進小数 x が

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \cdots \quad (55)$$

のように表現できたとすると、この x の2進小数は

$$x = (0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots)_2 \quad (56)$$

となる²。従って、例えば、 $x = 0.5$ であれば

$$0.5 = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \cdots + \frac{0}{2^n} + \cdots \quad (57)$$

であるから、その2進小数は $x = (0.1)_2$ であり、 $x = 1$ ならば

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \quad (58)$$

であるから、その2進数表示は $x = (0.111\cdots)_2$ となる。

それでは、10進少数 x の値からは簡単に(55)式の形が推測できない場合はどうするのであろうか。これを見るために、 $x = 0.2009$ を考える。この値の2進小数を得るための「レシピ」は、まず、この値を2倍し、整数部1桁目 (α_0) に「0」が来るか、「1」が来るかを調べ、「0」が来れば「0.」、 「1」が来れば「1.」から開始し、逐次2をかけて、整数部1桁目に「0」が来るか、「1」が来るかを調べていき、「0」が来れば「 $\alpha_0.0$ 」、 「1」が来れば「 $\alpha_0.1$ 」のように繰り返していく。その過程で整数部に1が現れた場合には、次のステップで2をかける直前に整数部の1を消すために1を引しておく。

² $(\cdots)_2$ の添え字「2」はカッコ内の小数が2進小数であることを明示するためのものである。そうすると10進小数は $(\cdots)_{10}$ ということになるが、この場合添え字「10」は省略する。

具体的に $x = 0.2009$ の場合には $0.2009 \times 2 = 0.4018$ なので、まず $x = (0.0)_2$ であり、 $0.4018 \times 2 = 0.8036$ なので $x = (0.00)_2$ である。次いで、 $0.8306 \times 2 = 1.6072$ なので $x = (0.001)_2$ であり、整数部に 1 がきたので、次に 2 をかける前に 1 を引いておき、 $1.6072 - 1 = 0.6072$ に 2 をかける。すると、 $0.6072 \times 2 = 1.2144$ なので $x = (0.0011)_2$ 、次は $0.2144 \times 2 = 0.4288$ なので $x = (0.00110)_2 \dots$ のように逐次的に 2 進小数が求まっていくことになる。筆算でやると面倒極まりないが、電卓などを使うか、簡単な計算プログラムを作成することで、例えば

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106811865472440084436210485 = (0.10110101000001001111001010011100\dots)_2 \quad (59)$$

なども手軽に得られる。

5.1.2 2 進小数のビットシフト演算とベルヌーイ写像

前節の (55) 式より、 $x < 1/2$ であれば、 $\alpha_1 = 0$ であり、このとき x は

$$x = \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \dots = (0.0\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots)_2 \quad (60)$$

と書ける。従って、この x を $x < 1/2$ の場合のベルヌーイ写像 $B(x) = 2x$ に作用させると

$$\begin{aligned} B((0.0\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots)_2) &= B\left(\frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \dots\right) \\ &= 2\left(\frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \dots\right) \\ &= \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^{n-1}} + \frac{\alpha_{n+1}}{2^n} + \dots = (0.\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n)_2 \quad (61) \end{aligned}$$

となる。ここで得られた $x = (0.\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n)_2$ に対し、さらに $B(x)$ を作用させて $B^2(x)$ を計算してみると

$$\begin{aligned} B^2((0.0\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots)_2) &= B((0.\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots)_2) \\ &= \left(\frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^{n-1}} + \frac{\alpha_{n+1}}{2^n} + \dots\right) \\ &= \frac{\alpha_2}{2^0} + \frac{\alpha_3}{2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^{n-2}} + \frac{\alpha_{n+1}}{2^{n-1}} + \dots = (\alpha_2.\alpha_3\alpha_4\dots\alpha_n\dots)_2 \quad (62) \end{aligned}$$

となる。しかし、最後の式で $\alpha_2 = 1 \neq 0$ であれば、 $x > 1$ となってしまうので、 $\alpha_2 = 0$ でなければいけないから、結局、 $B((0.\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots)_2) = (0.\alpha_3\alpha_4\dots\alpha_n\dots)_2$ であることがわかる。この結果より、**ベルヌーイ写像は 2 進小数の小数点以下のビット (0, 1 の並び) を 1 ずつ左へずらす作用を持つことがわかる。**

一方、 $1/2 \leq x \leq 1$ であれば、ベルヌーイ写像としては $B(x) = 2x - 1$ で与えられたので、 x として $x = (0.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots)_2$ ($\alpha_1 = 1 \neq 0$) を作用してみて、上記の「ビットずらし」の効果があるのかを確かめなければならない。実際に計算してみると

$$\begin{aligned} B((0.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots)_2) &= B\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \dots\right) \\ &= 2\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \dots\right) - 1 \\ &= \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^{n-1}} + \dots - 1 \\ &= (\alpha_1 - 1) + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^{n-1}} + \dots = (0.\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots)_2 \quad (63) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\alpha_1 = 1$ という事実をつかった。従って、やはり、2 進小数の小数点以下のビットを左へずらす作用があることがわかる。

5.2 稠密性再考

ここまで学んだ知識を用いて先に言及した「稠密性」を再度考えてみよう。このとき、写像 $x_{n+1} = f(x_n)$ から得られる軌道 $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ が「稠密」であることをもう少し正確に言うと

ここで考える稠密性
 区間 $[0, 1]$ 上のどんな無限小区間 $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ の中にも軌道 $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ の点が必ず入る。

となる。

これを具体的にみるために、 $[0, 1]$ を 4 等分し、 $I_1 = [0, 1/4], I_2 = [1/4, 1/2], I_3 = [1/2, 3/4], I_4 = [3/4, 1]$ とすると、 $1/4 = (0.01)_2, 1/2 = (0.10)_2, 3/4 = (0.11)_2$ であるから、この区間はそれぞれ 2 進小数の小数点以下 2 桁でもって $I_1 \rightarrow (0.00)_2, I_2 \rightarrow (0.01)_2, I_3 \rightarrow (0.10)_2, I_4 \rightarrow (0.11)_2$ と特徴付けることができる。このとき、ベルヌーイ写像から得られる軌道が上記 4 区間のどれに入るのかを調べてみたい。そのために、ベルヌーイ写像の初期値を $x_0 = 1/\sqrt{2}$ とする。この値は先にみたように、2 進数小数表示のもとでは

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106811865472440084436210485 = (0.10110101000001001111001010011100\dots)_2 \quad (64)$$

であったから、これを「1 ビットずらし」の効果を持つベルヌーイ写像に作用させると、そのたびに小数点以下 1 桁ずつが左にずれていく。そのときの小数点以下 2 桁目までが、上記、 I_1, I_2, I_3, I_4 のどれに該当するのかを調べていけばよい。具体的にやってみると

$$\begin{aligned} x_0 &= (0.\underline{1}0110101000001001111001010011100\dots)_2 \rightarrow I_3 \text{ に入る} \\ B(x_0) &= (0.0\underline{1}10101000001001111001010011100\dots)_2 \rightarrow I_2 \text{ に入る} \\ B^2(x_0) &= (0.1\underline{1}0101000001001111001010011100\dots)_2 \rightarrow I_4 \text{ に入る} \\ B^3(x_0) &= (0.10\underline{1}01000001001111001010011100\dots)_2 \rightarrow I_3 \text{ に入る} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ B^8(x_0) &= (0.000001001111001010011100\dots)_2 \rightarrow I_1 \text{ に入る} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

となる。これより、4 つの区間のいずれにも軌道が入り、かつ、この場合、それらはほぼ同数（この例の場合、それぞれの個数は $|I_1| = 7, |I_2| = 9, |I_3| = 10, |I_4| = 6$ ）となっているから 4 区間に一様に分布することがわかる。もちろん、区間 $[0, 1]$ をより細かく等分割し、小数点以下数桁の判定で軌道がどこに入るのかを調べることもできるが、その場合でも、その各々の区間にはほぼ同数の軌道上の点が入ることを示すことができる（今週のレポート課題）。

5.3 テント写像とベルヌーイ写像の関係

既に述べたように、テント写像 $T(x)$ とベルヌーイ写像 $B(x)$ の間には $T(x) = 1 - B(x)$ の関係がある。従って、例えば、 $1/2 \leq x \leq 1$ において $x = (0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n \dots)_2$ を $T(x)$ に作用してみると、1 の 2 進小数表示が $(0.111\dots)_2$ であったことを思い出して

$$\begin{aligned} T((0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n \dots)_2) &= 1 - B((0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n \dots)_2) \\ &= (0.111\dots)_2 - (0.\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n \dots)_2 \\ &= (0.(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3) \dots (1 - \alpha_n) \dots)_2 \equiv (0.\beta_2\beta_3 \dots \beta_n \dots)_2 \quad (65) \end{aligned}$$

が得られる. ここに, $\beta_k \equiv 1 - \alpha_k$ ($k = 2, 3, \dots$) であり, α_k が「1」ならば β_k は「0」, α_k が「0」ならば β_k は「1」となる. (ちなみに, $x < 1/2$ の場合には, $x = (0.0\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n\cdots)_2$ であり, $T(x) = B(x)$ だったので, $T((0.0\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n\cdots)_2) = (0.\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n\cdots)_2$ である.) 従って, $1/2 \leq x \leq 1$ の場合には**テント写像 $T(x)$ は 2 進小数の小数点以下のビットを左に一つずつずらし, かつ, 得られる小数点以下のビット列を反転させる**ことがわかる. この事実と前節での稠密性の定義を思い出すと, ベルヌーイ写像が $[0, 1]$ 上の任意の小区間に必ずその軌道が入り, かつ, $[0, 1]$ 上に一様分布するのであれば, テント写像も同様の性質を持つことが直ちに言えることになる. なぜならば, 例えば, 前節でみた 4 つの各区間の定義において, 小数点以下で「0」と「1」を交換し, $I_1 \rightarrow (0.11)_2, I_2 \rightarrow (0.10)_2, I_3 \rightarrow (0.01)_2, I_4 \rightarrow (0.00)_2$ としても結果は変わらないことは明らかだからである.

以上の議論より, テント写像もまた稠密性を満たすことがわかった.

5.4 テント写像とロジスティック写像の関係

それでは前回学んだロジスティック写像: $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ の稠密性はどうか? ここでもまずは感じをつかむために, 計算機を使った数値実験をしてみると図 12 のようになる. この図

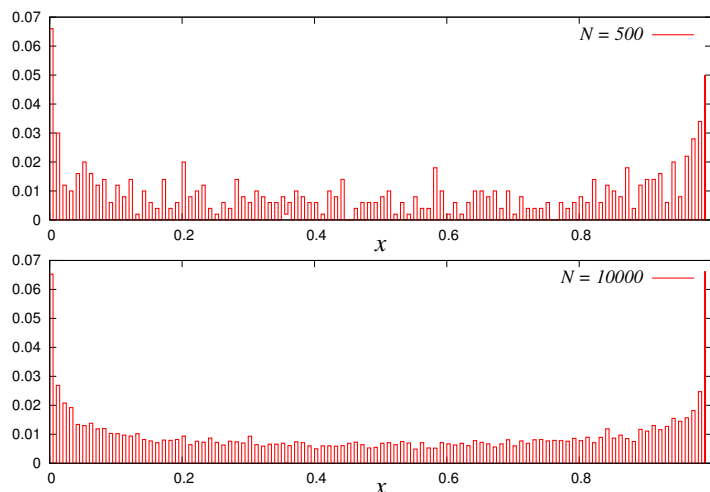


図 12: ロジスティック写像: $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ の各ビンに落ちる x_n の割合. $[0, 1]$ を 100 等分したビンを考えている.

を見ると, 繰り返し回数の増加にともなって, 「分布」の形は滑らかになっていくが, 一様分布とみなすためには, $x_n = 0, 1$ 近くの両端に x_n の値が来る頻度が高くなっているように見える.

この場合をテント写像に対する前節での結果を用いて理解するために, ロジスティック写像 $x_{n+1} = L_4(x_n)$ において³ 前回行った変数変換: $x_n = \sin^2 \theta_n$ を行うと, $\sin^2 \theta_{n+1} = \sin^2 2\theta_n$ であるから, $a = 4$ のロジスティック写像は

$$\theta_{n+1} = \begin{cases} 2\theta_n & (0 \leq \theta_n < \pi/4) \\ \pi - 2\theta_n & (\pi/4 \leq \theta_n \leq \pi/2) \end{cases} \quad (66)$$

³ ここから簡単のため, $L_a(x) = ax(1 - x)$ と定義する.

と書き直すことができる。従って、例えば、 $y_n = (2/\pi)\theta_n$ で y_n を定義すれば、 y_n はテント写像となる(各自が確認すること)。従って、テント写像が稠密であれば、ロジスティック写像 ($a = 4$) も稠密であることがわかる。以上の議論より、 $B(x) \rightarrow T(x) \rightarrow L_4(x)$ の順に稠密性を示すことができることを確認することができた。しかし、図より、ロジスティック写像 $L_4(x)$ の軌道がある微小区間 x と $x = x + \delta x$ に入る頻度 — **密度関数** — はベルヌーイ写像 $B(x)$, テント写像 $T(x)$ のそれと比べるとかなり異なる形をしている。この $L_4(x)$ の密度関数はどのような関数形で与えられるのかを次節で見よう。

5.5 軌道の密度関数

前節までの結果からみてテント写像、ベルヌーイ写像は $[0, 1]$ の間に一様に分布するわけであるから、軌道の密度関数 $P(x)$ は $P(x) = 1$, つまり

$$\int_0^1 P(x)dx = 1 \tag{67}$$

を満たす。また、写像からの軌道: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ が与えられたとき、その密度関数は一般に

$$P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \tag{68}$$

で与えられる⁴。さて、テント写像とベルヌーイ写像の場合の密度関数はともに $P(x) = 1$ であったが、ロジスティック写像: $L_4(x)$ の場合のその形状は自明ではない。そこで、前節での結果を使ってこれを求めよう。

$a = 4$ のロジスティック写像において、 $x_n = \sin^2 \theta_n$ と変数変換し、 $\theta_n = (\pi/2)y_n$ とすると、 y_n はテント写像になったので、その密度関数は $P(y) = 1$ であることに注意しよう。そこで、 $x_n = \sin^2 \theta_n$ の両辺を θ_n で微分すると

$$\frac{dx_n}{d\theta_n} = 2 \sin \theta_n \cos \theta_n = 2\sqrt{x_n(1-x_n)} \tag{69}$$

となる。一方、 $\theta_n = (\pi/2)y_n$ の両辺を y_n で微分すると、 $d\theta_n/dy_n = (\pi/2)$ であるから、これらより

$$dx_n = 2\sqrt{x_n(1-x_n)} d\theta_n = 2\sqrt{x_n(1-x_n)} \frac{\pi}{2} dy_n \tag{70}$$

すなわち

$$dy_n = \frac{dx_n}{\pi\sqrt{x_n(1-x_n)}} \tag{71}$$

が得られる。従って、上式を用いることで積分 $\int_0^1 P(y)dy$ を x についての積分に変換することができて

$$\int_0^1 P(y)dy = \int_0^1 1dy = 1 = \int_0^1 \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 P(x)dx \tag{72}$$

⁴ これら密度関数 $P(x)$ を「不変測度」と呼んだりもする。ここで、(68) が規格化条件 (67) を満たすことは次のように簡単に示すことができる。

$$\int_0^1 P(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^1 \delta(x - x_i)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times n = 1$$

となるから密度関数は

$$P(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \tag{73}$$

であることがわかる。これは図 13 より、計算機実験による結果とも良く一致する。ところで、ロジ

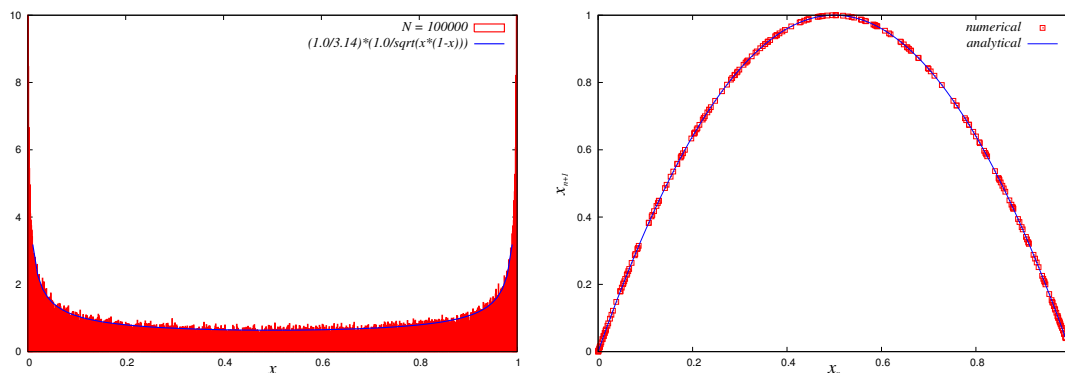


図 13: $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$ の各ビンに落ちる x_n の頻度から求めた x_n の確率密度関数 (左). 実線は (73) 式. 右図は x_n, x_{n+1} の関係. この図から「稠密」であれば、曲線: $y = 4x(1-x)$ の上を点が隙間無く埋める (図では説明のため、繰り返し回数 500).

スティック写像において密度関数を解析的に求めることのできるのは $a = 4$ の場合のみである。このような解析的な密度関数は、例えば関数 $g(x)$ の軌道にわたる平均値を密度関数 $P(x)$ の期待値として

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) = \int_0^1 g(x)P(x)dx \tag{74}$$

が計算できるので有益である⁵。しかし、 $a \neq 4$ の場合には密度関数の定義式 (68) に戻って計算機による数値計算を用いて算出することになる。例として図 14 にいくつかの $a (\neq 4)$ の場合を載せる。これらの図からわかるように、一般に $P(x)$ の形状は非常に複雑となる。

以上で我々はいくつかの写像から得られる複雑な軌道 (数列) を稠密性という観点からとらえることのできることを学んだ。しかし、この「稠密性」は軌道が複雑であるために必要な条件ではあるが、それで十分ではないことを忘れてはいけない。例えば、先の 4 つの区間に入るかどうか、また、一様に分布するのかわ確認した実験において、軌道が規則的に $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots$ のように周期 4 であったとしても、全ての区間に入り、かつ、一様に分布する。従って、稠密性とは別の尺度で軌道の複雑さを測る必要がありそうである。そこで、今回はそのような尺度である「軌道のエントロピー」「リアプノフ指数」とその計算方法について学び、ある特殊な場合に対し、これらの指標を解析的に求めることができることをみていく。これらを学習することで、我々がここまで「複雑な軌道」と呼んでいたものが、これらの指標から「カオス」と呼ばれる運動であることが明らかとなる。

⁵ 実際、今回の講義では「軌道のエントロピー」「リアプノフ指数」と呼ばれる物理量がこの方法によって解析的に計算できることを学ぶ。

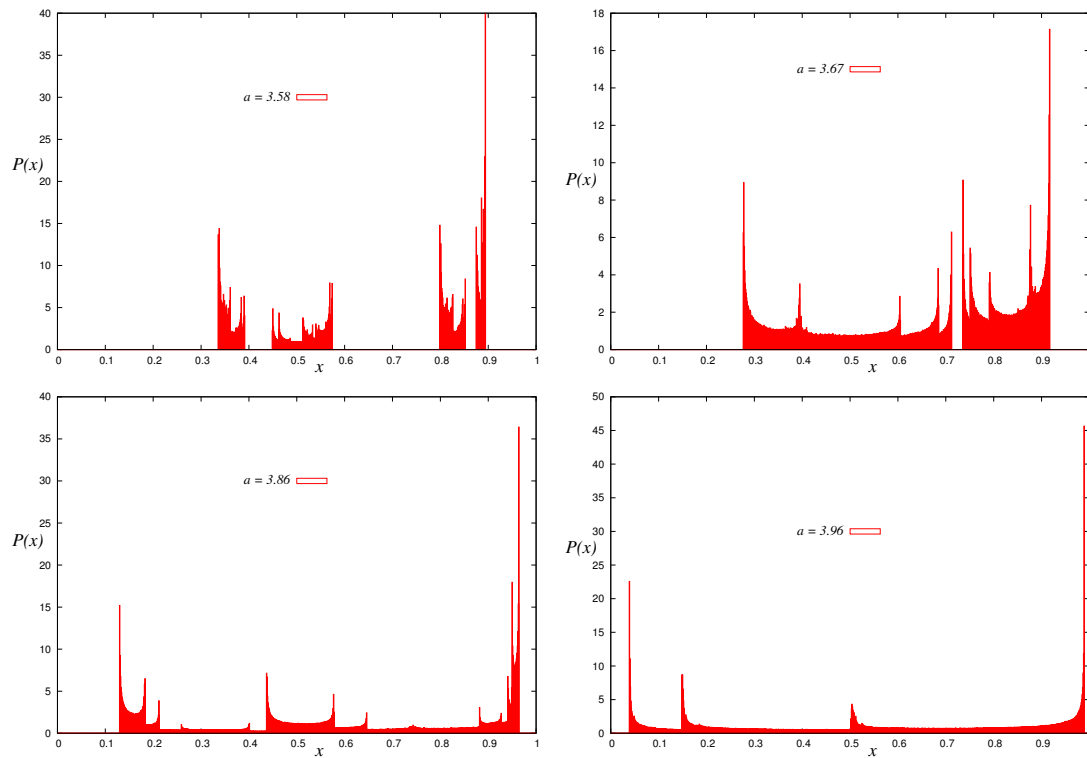


図 14: ロジスティック写像: $x_{n+1} = L_a(x) = ax(1-x)$ の密度関数. 定義 (68) を用いて数値計算した. 繰り返し回数を 1000000, 区間 $[0, 1]$ を千等分したビンを用意した.

レポート課題 3

$[0, 1]$ を 8 区間に等分割し, $1/\sqrt{3}$ を初期値とするベルヌーイ写像の軌道が各々の区間にいくつ入るかを調べよ. ただし, $1/\sqrt{3}$ の 2 進小数表示は小数点以下 80 桁程度までとること.

※ 計算機を用いて算出したものは, 計算プログラム・コードを添付すること.