

カオス・フラクタル 講義ノート #4

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/index.html

平成 23 年 5 月 17 日

目次

6	写像の折りたたみ度と軌道のエントロピー	33
6.1	写像の折りたたみ度	33
6.2	軌道のエントロピー	35
7	軌道の安定性とリアプノフ指数	35
7.1	いくつかの計算例	36
7.1.1	テント写像のリアプノフ指数	37
7.1.2	ベルヌーイ写像のリアプノフ指数	37
7.1.3	ロジスティック写像 $L_4(x)$ のリアプノフ指数	37
7.1.4	リアプノフ指数の数値計算例: $L_{a \neq 4}(x)$ のリアプノフ指数	38
7.1.5	参考: 固定点, 周期解に対するリアプノフ指数	39

課題 3 の解答例

まず前回の復習として $[0, 1]$ を 8 区間に等分割し, $1/\sqrt{3}$ を初期値とするベルヌーイ写像の軌道が各々の区間にいくつ入るかを調べてみる. 手で逐次計算していくことは非常に骨が折れるので, 計算機で実行してみる. そのサンプル・プログラムを下記に載せる.

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
#define x0 (1.0/sqrt(3.0))
#define N 80
int count[20000];
main()
{
    FILE *pt;
    double x;
    int i,bin1,bin2,bin3,bin4,bin5,bin6,bin7,bin8;
    bin1=bin2=bin3=bin4=bin5=bin6=bin7=bin8=0;
```

```
    printf("x0=%lf\n",x0);
if((pt = fopen("test3.dat","wt")) !=NULL){
    fprintf(pt,"%d.",0);
for(i = 0,x=x0; i < N; i++){
    x = 2.0*x+0.0000001;
    if(x<1.0){
    x = x;
    printf("%lf\n",x);
    count[i]=0;
    fprintf(pt,"%d",0);
    }else if(x>=1){
    printf("%lf\n",x);
    x = x-1.0+0.0000001;
    count[i]=1;
    fprintf(pt,"%d",1);
    }
    }
}
fclose(pt);
for(i=0; i< N; i++){
    if((count[i]==0) && (count[i+1]==0) && (count[i+2]==0))
bin1++;
}else if((count[i]==0) && (count[i+1]==0) && (count[i+2]==1)){
bin2++;
}else if((count[i]==0) && (count[i+1]==1) && (count[i+2]==0)){
bin3++;
}else if((count[i]==0) && (count[i+1]==1) && (count[i+2]==1)){
bin4++;
}else if((count[i]==1) && (count[i+1]==0) && (count[i+2]==0)){
bin5++;
}else if((count[i]==1) && (count[i+1]==0) && (count[i+2]==1)){
bin6++;
}else if((count[i]==1) && (count[i+1]==1) && (count[i+2]==0)){
bin7++;
}else if((count[i]==1) && (count[i+1]==1) && (count[i+2]==1)){
bin8++;}
}
printf("%d %d %d %d %d %d %d %d\n",bin1,bin2,bin3,bin4,bin5,bin6,bin7,bin8);
}
```

上記のプログラムで2進小数点以下80桁までの結果は、2進小数が

0.1001001111001101001111001101000111111001000111000110000111101000000011

0010101111

であり, それぞれのビンへ入った個数の分布が

10 12 7 10 13 5 10 13

また, 1000 桁まで使うと 2 進小数が

```
0.1001001111001101001111001101000111110010001110001100001111010000000110
0101011111101011101110101101011110110000110011001100101110010111111001110
0001111101000110110000110010001110001010011110110110010000111001011000110
0111010101010111000011111001000100000100001101100100111010101111101000001
0001001101001001000111101100101000100010000010001001101001011111001110011
1100001000011111101111100011010011011010000001011000110001100111110111101
0111110101001001010111000101101110000010110001001001010100100011011110001
0010001011100011001101010001001000110010001110110111110000011010110011110
10110000111011111111001010110110110011100001100110010111101100110000011
0011100011010001010011101101100111101100101100110001000000011110110000010
0100100110001001000110000000011111010011011100110110111101000000000010110
101101001110010110001000101111001110111111000001110001011101101001111101
1011011010000001001010111101100100001001100001010100100111101010001110101
00111101111000111000111101111100111010100011111100110
```

であり, それぞれのビンへ入った個数の分布は

120 132 109 132 133 109 132 133

となる.

6 写像の折りたたみ度と軌道のエントロピー

前回ではロジスティック写像などから生成される軌道の複雑さを「稠密性」という観点から見てきた. 今回はこの複雑さを別の指標を用いて考えてみたい.

6.1 写像の折りたたみ度

既に学んだように, ロジスティック写像からの軌道をグラフを用いて求める方法においては, $L_a(x), L_a^2(x) = L_a(L_a(x)), \dots, L_a^n(x)$ のグラフと $y = x$ の交点の関係によって, [固定点] [周期解] [複雑な軌道] のいずれになるのかが決まった. そこで, 例えば, 軌道が固定点に収束する $a = 2$ のロジスティック写像: $L_2(x) = 2x(1-x)$ に対し, $L_2^2(x), L_3^2(x), L_4^3(x)$ を x の関数としてプロットしてみると図 17 のようになる. この図と, $a = 4$ のロジスティック写像で同様な振る舞いをプロットした第 2 回講義ノート p.14 の図 7 を比べてみると, 遙かに $a = 4$ のロジスティック写像の $L_4^n(x)$ の形状の方がより複雑である.

そこで, 写像の n 解繰り返し $L_a^n(x)$ において単調に増加 (あるいは減少) する区間がいくつあるのかを数え, それを「写像の折りたたみ度」として定義し, $w_a(n)$ と表記することにしよう. p.14 の図 7 より, $a = 4$ の場合にこの $w_4(n)$ は明らかに n の増加とともに倍々に増えていくから, $w_4(n) = 2^n$

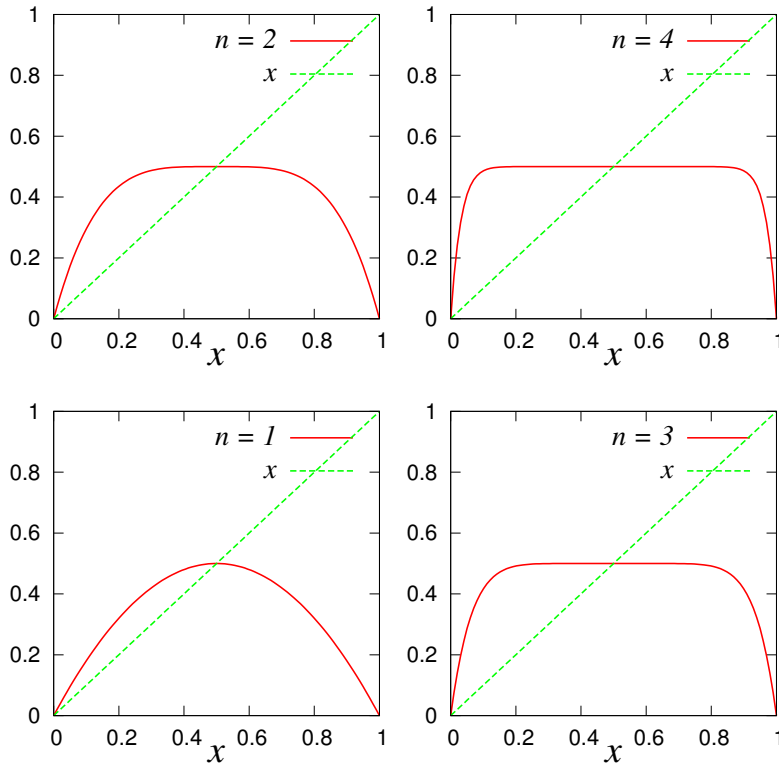


図 17: $y = L_2^1, \dots, L_2^4$ と $y = x$. $L_2(x) = 2x(1-x)$ である.

である. 一方, $a = 2$ の場合には図 17 より, n に依らずに $w_2(n) = 2$ であるように思われる. 実際, これはきちんと確かめることができる. そのためには $dL_2^n(x)/dx = 0$ が $x = 1/2$ のみを解に持つことを示せばよい. 陰関数の微分:

$$\frac{d}{dx}\{f(g(x))\} = \frac{df(x)}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx} \tag{78}$$

を思い出すと, これを繰り返し用いることにより

$$\begin{aligned} \frac{dL_2^n(x)}{dx} &= \frac{dL_2^n(x)}{dL_2^{n-1}(x)} \cdot \frac{dL_2^{n-1}(x)}{dL_2^{n-2}(x)} \cdot \frac{dL_2^{n-2}(x)}{dL_2^{n-3}(x)} \cdots \frac{dL_2^2(x)}{dL_2(x)} \cdot \frac{dL_2(x)}{dx} \\ &= 2(1 - 2L_2^{n-1}(x)) \cdot 2(1 - 2L_2^{n-2}(x)) \cdots 2(1 - 2L_2(x)) \cdot 2(1 - 2x) = 0 \end{aligned} \tag{79}$$

が得られる. 従って, $L_2(x) = L_2^2 = \dots = L_2^{n-1}(x) = 1/2$ を満たす x は $x = 1/2$ であり, $L_2^n(x) = 0$ の解は n に依らずに $x = 1/2$ の一つだけである¹ 従って, L_2^n の単調な区間数は n に依らずに $w_2(n) = 2$ である.

¹ 念のため証明しておく. まず, $L_2^{(n)}(1/2) = 1/2$ が任意の n で成り立つことを帰納法で示す. $L_2(x) = 1/2$ は $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 = 0$ なので $n = 1$ のとき成立. $L_2^n(1/2) = 1/2$ の成立を仮定すれば, $L_2^{n+1}(1/2) = L_2(L_2^n(1/2)) = L_2(1/2) = 1/2$ なので $n + 1$ で成立. よって, $L_2^{(n)}(1/2) = 1/2$ が任意の n で成り立つ. 実解 $x = 1/2$ の唯一性は $L_2(x) = 1/2$ のときに $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 = 0$ なので実解は $x = 1/2$ のみ. 従って, $L_2^2 = L_2(L_2(x)) = 1/2$ を満たす $L_2(x)$ は $L_2(x) = 1/2$ のみであるが, $L_2(x) = 1/2$ を満たす x は $1/2$ のみだったので, 結局, $L_2^2(x) = 1/2$ を満たす x も $1/2$ のみ. この議論を繰り返していけばよい.

6.2 軌道のエントロピー

そこで、この写像の折りたたみ度をもとに**軌道のエントロピー**: h_a を次式で定義する.

$$h_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log w_a(n)}{n} \quad (80)$$

よって、この式に従えば $a = 2$ の場合には

$$h_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{n} = 0 \quad (81)$$

であり、 $a = 4$ の場合には

$$h_4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 2}{n} = \log 2 \quad (82)$$

となり、有限の値を持つ。そこで、この軌道のエントロピーが有限値をとるような軌道を複雑 — カオス — であると定義することにする。簡単にわかるが、先に学んだテント写像、ベルヌーイ写像に対する軌道のエントロピーは全て有限値をとるから、この意味でカオスであると言える。このことは写像の重なり度に立ち戻って考えると、写像の反復数 n とともに単調部分が指数関数的に増加していく写像から生成される軌道はカオスであるということになる。

7 軌道の安定性とリアプノフ指数

図 18 のように、写像 $x_{n+1} = f(x_n)$ において x_0 からスタートした写像の 1 反復で初期値のずれ Δx_0 が Δx_1 に拡大した (あるいは縮小) とすると

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} = \tan \theta = |f'(x_0)| \quad (83)$$

つまり

$$\Delta x_1 = |f'(x_0)| \Delta x_0 \quad (84)$$

が成り立つ。ここに、 $f'(x_0) = (df(x)/dx)|_{x=x_0}$ のような略記を用いたことに注意されたい。そこで、さらに、 Δx_1 が次の反復で Δx_2 に拡大された (あるいは縮小) とすれば、上記の議論を繰り返すことで

$$\Delta x_2 = |f'(x_1)| \Delta x_1 = |f'(x_1)| |f'(x_0)| \Delta x_0 \quad (85)$$

が得られる。従って、これを n 回繰り返せば

$$\Delta x_n = |f'(x_{n-1})| |f'(x_{n-2})| \cdots |f'(x_1)| |f'(x_0)| \Delta x_0 \quad (86)$$

となる。従って、写像の n 回反復により、初期値のずれ Δx_0 は $|f'(x_{n-1})| |f'(x_{n-2})| \cdots |f'(x_1)| |f'(x_0)| \Delta x_0$ に拡大 (あるいは縮小) される。

感じをつかむために、最も簡単な場合に対し、上記の拡大 (あるいは縮小) についてみてみよう。まず、全ての反復に対し、 $|f'(x_i)| \geq \delta$ ($\delta > 1$ の定数) とすると

$$\Delta x_n \geq \delta^n \Delta x_0 = e^{n \log \delta} \Delta x_0 \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \quad (87)$$

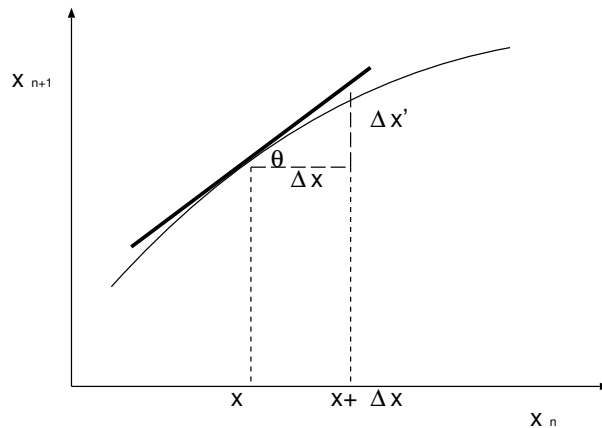


図 18: 写像の 1 反復で初期値のずれ $\Delta x = \Delta x_0$ が $\Delta x' = \Delta x_1$ に拡大する.

となり, 初期値のずれは繰り返し回数の増加とともに無限に拡大されることがわかる. 従って, 軌道のずれが拡大されるかどうかは上記の指数の肩に乗っている $\log \delta$ の符号をみればよいことがわかる. これはつまり

$$\begin{aligned} \lambda &= \underbrace{\frac{1}{n} \log \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta x_0} \right)}_{\text{対数スケールで測った単位ステップあたりの拡大率}} \\ &= \frac{1}{n} \log |f'(x_{n-1})| |f'(x_{n-2})| \cdots |f'(x_1)| |f'(x_0)| \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \log |f'(x_{n-1})| + \cdots + \log |f'(x_0)| \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x_i)| \end{aligned} \quad (88)$$

で λ を定義すると, これが正の場合には初期値のずれは無限に拡大されることを意味する. つまり, 上式の第 1 行目を $\Delta x_n / \Delta x_0$ に関して解くと

$$\frac{\Delta x_n}{\Delta x_0} = e^{n\lambda} \quad (89)$$

となり, $\lambda > 0$ ならば, 軌道の拡大率 $\Delta x_n / \Delta x_0$ は $n \rightarrow \infty$ で $e^{n\lambda} \rightarrow \infty$ のように指数関数的に発散する. 逆に $\lambda < 0$ ならば, 初期値の誤差 Δx_0 は写像の繰り返しと共に指数関数的に小さくなっていき, しまいには, 初期値の異なる 2 つの軌道は一致してしまう.

この λ は **リアプノフ指数** と呼ばれる. 従って, 初期値のずれが反復回数とともに指数的に増加していくような複雑な軌道 — カオス — を判定するためには, このリアプノフ指数を計算し, その符号の正負を調べればよい. すなわち, **カオスは正のリアプノフ指数で特徴づけられる.**

7.1 いくつかの計算例

以下で直ぐに計算のできるいくつかの例を見ておこう.

7.1.1 テント写像のリアプノフ指数

テント写像:

$$x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n| = \begin{cases} 2x_n & (0 \leq x_n \leq 1/2) \\ 2 - 2x_n & (1/2 < x_n \leq 1) \end{cases} \quad (90)$$

の場合, x の値によらずに $|f'(x)| = |T'(x)| = 2$ であるから, このリアプノフ指数は

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |T'(x_i)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 2}{n} = \log 2 > 0 \quad (91)$$

となり, 瞬時に求めることができる. 従って, テント写像から生成される軌道はカオスである.

7.1.2 ベルヌーイ写像のリアプノフ指数

ベルヌーイ写像:

$$x_{n+1} = B(x_n) = \begin{cases} 2x_n & (0 \leq x_n < 1/2) \\ 2x_n - 1 & (1/2 \leq x_n \leq 1) \end{cases} \quad (92)$$

の場合, テント写像と同様に $|f'(x)| = |T'(x)| = 2$ であるから, このリアプノフ指数は $\lambda = \log 2$ であり, ベルヌーイ写像から生成される軌道はカオスであると結論つけられる.

7.1.3 ロジスティック写像 $L_4(x)$ のリアプノフ指数

$a = 4$ のロジスティック写像 $L_4(x) = 4x(1-x)$ の場合, $|L_4'(x)| = |4(1-2x)|$ であるから, x の値によって 1 階微分の係数の値は異なる. 従って, 定義式に立ち返って (88) 式を数値的に評価する必要があるように思われるが, 前回みたように密度関数 $P(x)$ が解析的に与えられているので, これを用いて計算を進めることができる. 具体的には

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x_i)| = \int_0^1 dx P(x) \log |L_4'(x)| = \int_0^1 dx \frac{\log |4(1-2x)|}{\pi \sqrt{x(1-x)}} \quad (93)$$

のように和を積分に置き換えることができる. あとはこの x に関する積分が実行できればよい. 被積分関数が $x = 1/2$ を中心に対称であることに注意し, 前回まで度々出てきた $x = \sin^2 \theta$ なる変換を施すと

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{1/2} dx \frac{\log |4(1-2x)|}{\pi \sqrt{x(1-x)}} &= 2 \int_0^{\pi/4} \frac{\log(4 \cos 2\theta)}{\pi \sin \theta \cos \theta} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= \log 4 + \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \log(\cos 2\theta) d\theta \equiv \log 4 + I \end{aligned} \quad (94)$$

となる. この最終式第 2 項の積分は次のようにいくつかの変数変換, および, 積分区間の対称性から次のように書き換えることができる.

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log(\cos \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log(\sin \theta) d\theta \quad (95)$$

ここで、最後の変形では変数変換: $\theta \rightarrow \pi/2 - \theta$ を用いたことに注意されたい。この式の2番目と3番目の表現を用いると

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} \log(\cos \theta) d\theta + \int_0^{\pi/2} \log(\sin \theta) d\theta \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log(\cos \theta \sin \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \{\log(\sin 2\theta) - \log 2\} \\
 &= -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log(\sin \theta) d\theta = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{I}{2} \tag{96}
 \end{aligned}$$

となる。ここで最後の等式では $2\theta \rightarrow \theta$ と変数変換したことに注意されたい。従って、これを I について解いて、 $I = -\log 2$ が得られる。従って、ロジスティック写像 $L_4(x)$ のリアプノフ指数は

$$\lambda = \log 4 - \log 2 = \log 2 \tag{97}$$

となり、これはテント写像、ベルヌーイ写像と同じ値となる。

7.1.4 リアプノフ指数の数値計算例: $L_{a \neq 4}(x)$ のリアプノフ指数

前節までの結果はリアプノフ指数が比較的簡単な解析計算で求まる場合であった。しかし、そのような場合はむしろ特殊であり、通常は計算機を用いて数値計算を行わなければリアプノフ指数を求めることはできない。そのような数値計算のなかで軌道の生成メカニズムとして写像が与えられている場合は比較的簡単であり、定義 (88) に従ってリアプノフ指数を数値計算すればよい²。例えば、ロジスティック写像 $L_{a \neq 4}(x)$ の場合には $|L'_a(x)| = a|1 - 2x|$ であったから、そのリアプノフ指数は

$$\lambda_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log(a|1 - 2x_i|) \tag{98}$$

と与えられる。従って、いつものように反復で生成される x_0, x_1, \dots を用いて上記の和を直接計算すればよい。しかし、計算機上では上記の n の無限大極限は取れないので、大きな有限の n で置き換える。結果を図 19 に載せる。この図を得るために、写像の繰り返し回数を $n = 1000000$ 、 a の刻み幅を 0.001 に選んだ (担当者のノート型パソコンで 5, 6 分の計算時間)。この図より、 a の変化とともにリアプノフ指数の形状は複雑に変化し、いくつかの a の値に対し、リアプノフ指数は負になっている。また、図 19 の区間 $[0.82 : 0.85]$ を拡大したものを図 20(左) に、また、この図をさらに拡大したものを図 20(右) に載せる。この図から、リアプノフ指数の形状には「自己相似的」(各部分が全体の縮小版となっている) な性質をみることができる。このあたりの詳細は後日に見ていくことになる。

² 単にデータ x_0, x_1, \dots のみが与えられている状況では工夫が必要となる。例えば、このデータから「実質的」な写像の形を推定し、その数値的に推定された写像 (関数) を補間しつつ数値微分を用いて和 (88) を計算したりする。そのような計算例は時間が許せば後の講義で紹介したい。

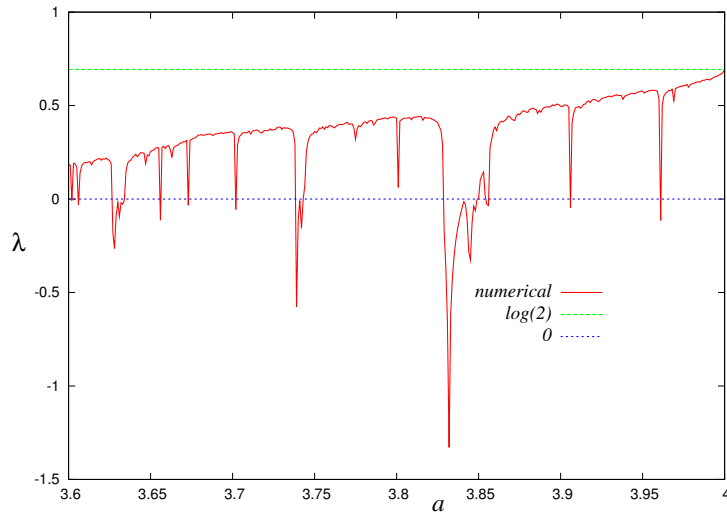


図 19: ロジスティック写像 $L_a(x)$ のリアプノフ指数. 写像の繰り返し回数を $n = 1000000$, a の刻み幅を 0.001 に選んだ.

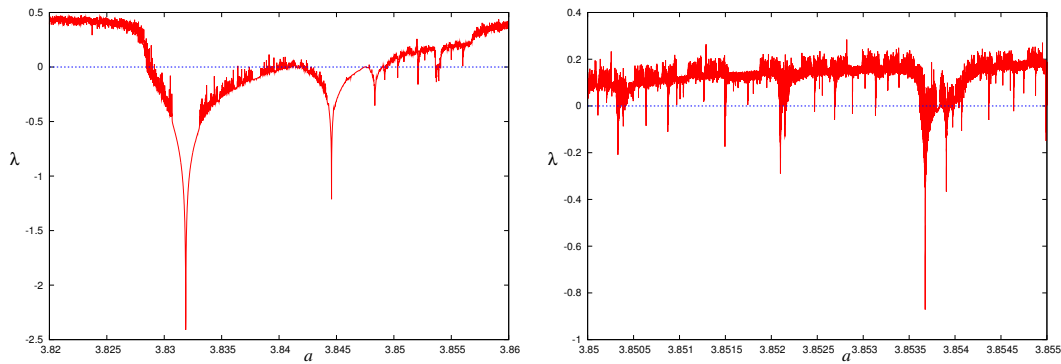


図 20: 図 19 の拡大図.

7.1.5 参考: 固定点, 周期解に対するリアプノフ指数

固定点に引き込まれる場合, 周期解を持つ場合のリアプノフ指数は一部解析的に求めることができる. 例えば, 固定点 x_* ($0 \leq x_* \leq 1$) を持つ場合のリアプノフ指数は, 密度関数がデルタ関数を用いて $P(x) = \delta(x - x_*)$ で与えられるので, デルタ関数に関する恒等式: $\int_0^1 \delta(x - x_*) f(x) dx = f(x_*)$ に注意して

$$\lambda = \int_0^1 \delta(x - x_*) \log a |1 - 2x| dx = \log a |1 - 2x_*| = \log a \left| 1 - \frac{2(a-1)}{a} \right| \quad (99)$$

となる. ここで, 最後の等式は $ax_*(1 - x_*) = x_*$ 非零の解, $x_* = (a - 1)/a$ を用いた. これを図 21(左) にプロットする. この図より, 数値的に求めたリアプノフ指数と上記 (99) 式はロジスティック写像が固定点を持つ範囲内で一致することがわかる. また, ロジスティック写像が周期解を持つ

場合, その周期が $T: (x_1^*, x_2^*, \dots, x_T^*)$ であるとする, 密度関数が

$$P(x) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \delta(x - x_i^*) \tag{100}$$

で与えられることに注意して, リアプノフ指数は

$$\lambda = \frac{1}{T} \int_0^1 \sum_{i=1}^T \delta(x - x_i^*) \log a |1 - 2x| dx = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \log a |1 - 2x_i^*| \tag{101}$$

と形式的に書くことができる. この式から明らかなように, これを使うためには, 周期解を構成する x の値 $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_T^*)$ を全て求めておく必要があり, T が増えるにつれてこの方法もやはり厄介になってくる. 図 21(右) に $[1, 4]$ の範囲内の a に対するリアプノフ指数を載せる.

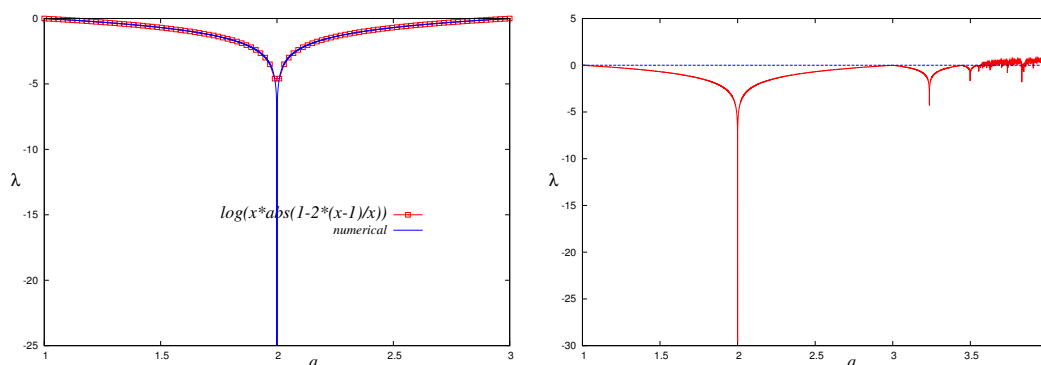


図 21: 固定点を持つ場合のロジスティック写像のリアプノフ指数 (左). 右図は $[1, 4]$ の範囲内の a に対するリアプノフ指数.

以上の結果より, ロジスティック写像のパラメータ a を変化させると, 軌道がある軌道から別の軌道へ移り変わることが示唆される. そこで, 今回はこのような写像における分岐現象について詳しく見ていくことにする.

レポート課題 4

既に学んだテント写像はパラメータ a を導入することで, 次のように一般化することができる.

$$T_a(x) = a(1 - |1 - 2x|), \quad x_{n+1} = T_a(x_n) \tag{102}$$

a を $1/2 \leq a \leq 1$ の範囲で変化させ, 各 a でリアプノフ指数を計算し, 図 19 に倣って結果を図示せよ.