

カオス・フラクタル 講義ノート #6

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/index.html

平成 23 年 5 月 31 日

目次

9 労働市場のカオスモデル	50
9.1 背景: 労働市場におけるフィリップス曲線	51
9.2 Neugart モデル	53
9.2.1 非線形写像の導出	53
9.2.2 非線形写像の分岐構造とカオス	56
9.2.3 カオス・アトラクタとしてのフィリップス曲線	57
9.2.4 失業率と物価上昇率の稠密性と不変測度	58

課題 5 の解答例

ニュートン法の素朴なソースコードを以下に載せる。

```
/* ニュートン法 */
#include <stdio.h>
#include <math.h>
double func(x,a) /* f(x)=0 を求める. f(x) の定義 */
double x;
double a;
{
    return (pow(a*x,2)-a*(a+1)*x+a+1);
}
double Dfunc(x,a) /* f(x) の 1 階微分の定義. 微分が困難な場合には数値微分値を返すよう
にする. */
double x;
double a;
{
    return (2*a*a*x-a*(a+1));
}
main()
{
```

```

FILE *fpr;
int i,imax=100;
double x,y,a;
if((fpr = fopen("lower.dat", "wt")) !=NULL){
    for(a=3.0; a<=1.0+sqrt(6.0); a=a+0.01){ /* a の値を振る */
        for(i = 0, x=0.10; i <= imax; i++){
x = x - func(x,a)/Dfunc(x,a);
if(fabs(y-x)<1.0e-5){
            fprintf(fpr,"%lf %lf\n",a,x);
            break;
}
        }else{
            y = x;
        }
    }
}
fclose(fpr);
}

```

このプログラムでは、 a の値に対して解は 2 個しかないとわかっているため、その 2 つのうち大きい方の解を求めたい場合には x の取りうる上限値に近いところから反復をスタートさせ、逆に、小さい方の解を求めたい場合には x の取りうる下限値に近いところから反復をスタートさせればよい。ちなみに、 a を少しずつ変化させてその解を求めているが、 a を少し変化させても x の値が急激に変化しないようであれば、一つ手前の a での解 x の値を a に関するループで次の a に対する反復の初期値 x として利用し、この間、方程式が「断熱的」に振舞うと仮定してプログラムを書いてよい。具体的には次のように a のループの部分で x の値を一回だけ初期化すればよい。

```

for(a=3.0,x=0.10; a<=1.0+sqrt(6.0); a=a+0.01){ /* a の値を振る */
    for(i = 0; i <= imax; i++){

```

このプログラムからの出力を解析解とともにプロットしたものを図 27 に載せよう。

9 労働市場のカオスモデル

前回までの講義では、主にロジスティック写像:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad (123)$$

を題材にとりあげ、その振る舞いを学んできた。既に講義でみたように、ロジスティック写像は生態系を記述する微分方程式を差分化したものであるから (第 1 回講義ノートを見よ)、(それは無味乾燥な単なる漸化式にみえるが) もともと自然現象の説明を目指して提案された数理モデルである。前回 (第 5 回) の講義では、スライドを用いて「受動歩行」と呼ばれる 2 足歩行のパターンに関し、膝の間接角を変数 (ロジスティック写像における「変数 x 」に相当) に選んで得られる運動方程式を差分化して解くことで、床の傾斜角 (ロジスティック写像における「パラメータ a 」に相当) の増加とともに間接角の軌道が分岐を繰り返す、やがてその力学系はカオスとなることを簡単に紹介した。

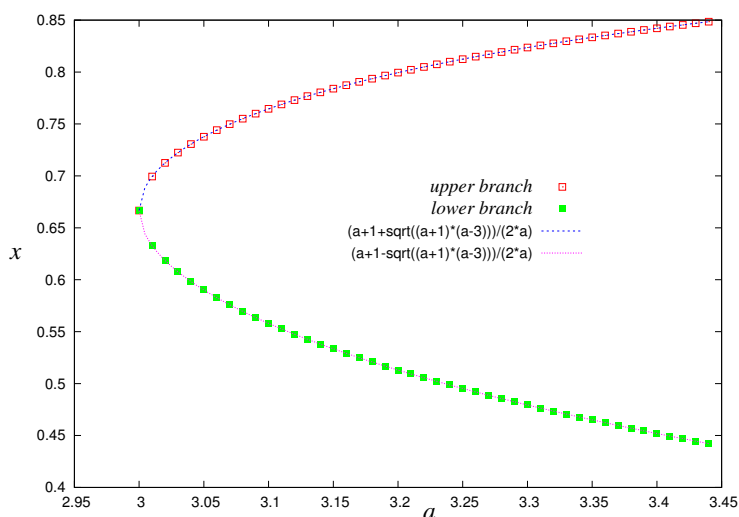


図 27: ニュートン法に基づく数値解と 2 次方程式の解公式による解析解.

このように、自然現象や工学的対象を何らかの近似 (仮定) のもとで「非線形方程式」を用いて表現すると、その方程式 (の振る舞い) はカオスの性質を持つことが少なくない。また、工学部に所属する者には意外に思えるかもしれないが、自然現象や工学的応用のみならず、経済活動に関する社会科学的な研究対象の数値モデルにおいてさえもやはりカオスが現れ、それが考える対象の重要な一側面を説明する場合も決して少なくない。この講義「カオス・フラクタル」は情報工学コースのカリキュラムのなかにおいてはやや「異質」に思えるかもしれないが (そして学生の間では小難しく評判が悪いと伝え聞いているが)、上に述べたように、現代的問題を精密な方法で調べようとするれば非線形、とりわけカオスに関する基礎知識が必要になる場面は案外多いのである¹。

そこで、第 6 回目となる今回の講義では、ロジスティック写像を通じてカオスの基本的な性質を説明してきた通常の講義の流れから少し離れて、そうしたカオスの概念が使われる実例として「労働市場」をとりあげ、それを説明する数値モデル (方程式) が確かにカオスの性質を示すことをみていく。今まで学んだ非線形性やカオスに関するいくつかの知見がどの部分でどのように用いられるのかに着目しながら、式の一つひとつを追って行くと良いであろう。

9.1 背景: 労働市場におけるフィリップス曲線

労働は人間の基本的活動であり、労働による対価として人々は貨幣や物品 (賃金) を受け取り、それらの相互交換によって市場は形成される。一方、生産/サービス活動を行う企業は、自社の商品やサービス等を効率的に生み出すために労働者を必要とし、その労働の対価として労働者に賃金を支払う。従って、収益が低迷している企業は労働者の雇用を抑え (ときにリストラを行使し)、逆に、成長企業は自社グループ拡大のため、労働者雇用を促進する。社会全体の景気が悪化し、十分な雇用が確保できない状況では、失業者が増加し、また、その結果、国や地方自治体の税収も悪化する。そうした状況下にある国家 (例えば、現在の日本) は金利を大幅に下げ、大量の国債を発行し、それを (多くの国内/海外投資家に) 売却することで、不足した税収を国家の「借金」として補うことにな

¹ 実際にかリキュラムを作った人間は、このような理由で (思想のもとで) 「カオス・フラクタル」を必須科目として導入したと思いたい。

り、これが国としての信用を落とすばかりか、場合によっては「国家的経営破綻」につながりかねないリスクを生んでいる。よって、明らかに「失業」と「その対策」はミクロな労働者個人の文化的生活の維持のためだけでなく、よりマクロに「地方自治体レベル」「国家レベル」においても重大な(おそらくは最重要な)問題である。従って、労働者がある種の「商品」として捉え、雇用側(企業)、非雇用側(労働者)の需要と供給のバランスを考え、その「市場」がどのように振る舞うか、政府の施すマクロな政策が、どの程度、雇用の問題に対して有効なのかを系統的に調べることは社会科学における重要な研究テーマである。

我々は人工労働市場を考えるのだが、ここで注目するマクロ変数は、**失業率と物価上昇率**であり、それら変数は**フィリップス曲線**と呼ばれる関係を満たすことが知られている。

フィリップス曲線とは1958年に英国の経済学者 Alban William Housego Phillips が実データに基づいて発見した法則に基づく曲線である。具体的には物価上昇率を縦軸に、失業率を横軸に選んだとき、これらの変量間に成立する「負の相関」を示したものである。ここで言う物価上昇率とは、消費者物価指数を表しており、消費者物価指数は、全国の世帯が購入する家計に係る財及びサービスの価格等を総合した物価の変動を時系列的に測定したものであり、家計の消費構造を一定のものに固定し、これに要する費用が物価の変動によって、どのように変化するかを指数値で示したものである。

図 28 は日本の1970年代から2000年代までのフィリップス曲線を10年おきのデータからプロットしたものである。この図より、全体として負の相関が見てとれる。

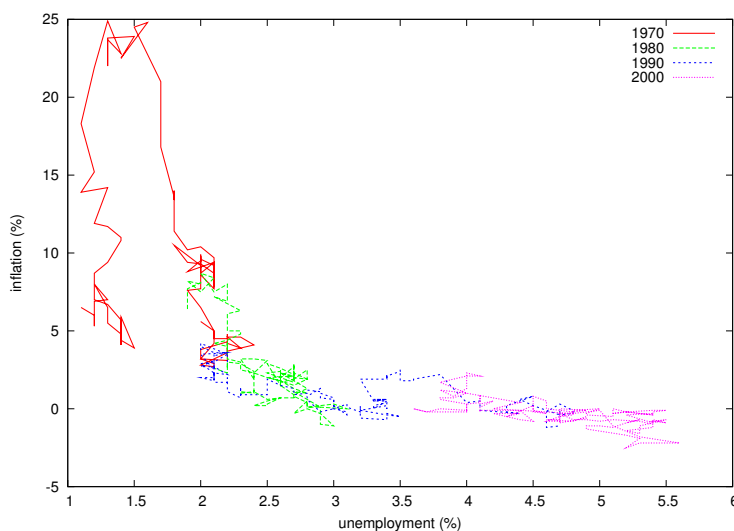


図 28: 我が国の年代別フィリップス曲線.

労働市場の振る舞いを調べるための数理モデルはこれまでも数多く提案されているが、ここでは、Neugart (2004) によって提案された、2変数 — 失業率と物価上昇率 — に関する決定論的な非線形写像で与えられるマクロなカオス労働市場モデルを紹介する。このモデルでは、フィリップス曲線が非線形写像のカオス・アトラクタとして説明されることになる。

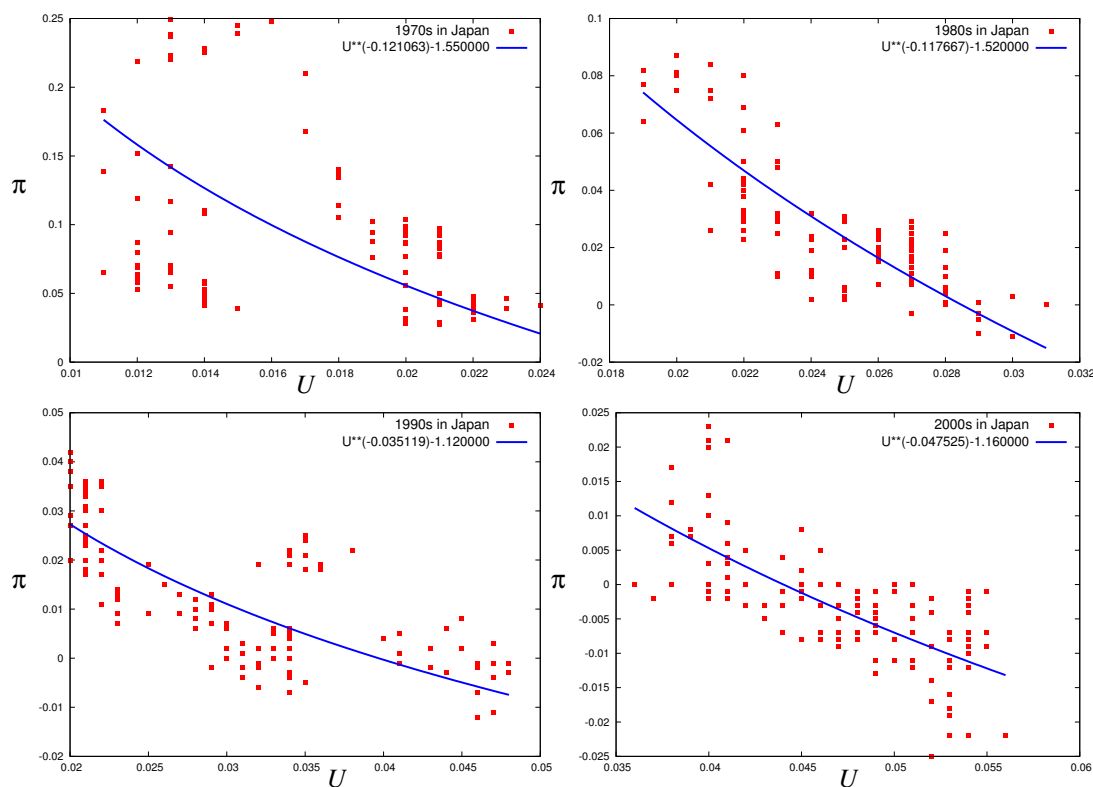


図 29: 我が国の年代別フィリップス曲線.

9.2 Neugart モデル

Neugart モデルはマクロ変数に関する決定論的非線形写像で与えられる. 具体的には, 失業率と物価上昇率の関係をマクロに与え, その年次ごとの状態更新が非線形写像を与える. その導出はやや込み入っているが, 得られる「連立写像」はパラメータの選び方次第ではカオスの性質を持つ.

9.2.1 非線形写像の導出

まず, ステップ t での失業率² を U_t , 外的な社会要因のためそれまで定職にあった者が職を失う「離職率」を i とする. また, それまで失業中だった者が職にありつき, 「就労者組」へと流れ込む確率を就職率として o_t とする. ここに, この就職率はステップ t に依存することに注意されたい. このとき, ステップ $t+1$ での失業率 $U_{t+1} (\leq 1)$ は前ステップ t での失業率 U_t を用いて

$$U_{t+1} = U_t + i(1 - U_t) - o_t U_t \tag{124}$$

で与えられるものとする. この式の意味するところは, ステップ $t+1$ での失業率 U_{t+1} は, 前ステップの失業率 U_t にステップ t で職にありつけた労働者のために「失業組」が減る寄与: $-o_t U_t$ と, このステップで職を失った労働者: $i(1 - U_t)$ の和で与えられるという事実である.

² 「ステップ t 」をここでは「年次」と考えるとイメージしやすいと思われる.

Neugart モデルでは離職率 i は時間的に変化せず、「外的コントロールパラメータ」として扱う。具体的にはカオス力学系として広く知られるロジスティック写像:

$$x_{t+1} = ax_t(1-x_t) \quad (125)$$

における分岐パラメータ a と同様の扱いとする。後に見ることになるが、この離職率 i を変化させていくことで、システムは周期軌道からカオス軌道への分岐を見せることになる。

一方、ステップ t で職を見つける労働者の割合 o_t はステップに依存して変化するものとして扱う。具体的にはステップ t での値が次式によって与えられるものとする。

$$o_t = \frac{J_s + J_{c,t}}{U_t + d(1-U_t)} \quad (126)$$

$$J_{c,t} = \gamma(m - \pi_t) \quad (127)$$

ここに、(126) 式分子に現れる $J_s + J_{c,t}$ は考える社会における全求人数を与える。この2項のうち第1項 J_s は定数であり、時間が経過しようが不変に保たれる社会が供給する一定数の求人数を意味する。一方、第2項 $J_{c,t}$ は社会情勢等によって変化をうける一定求人数 J_s からの「偏差」であり、この時間的に変化する求人数は、Neugart モデルにおいては (127) 式のように貨幣価値の成長率 m と物価上昇率 π_t の差によって決まるものと仮定される。 γ は $0 < \gamma < 1$ を満たす定数である。従って、貨幣価値が上昇すればするほど、実質求人数 $J_s + J_{c,t}$ は増加し、逆に、物価上昇率が上がればあがるほど減少する。

分母は現在 (ステップ t) に職にありつけていない求職者数であり、分母第2項 $d(1-U_t)$ は職にありつきながら、より良い職を探している就労者の数を表し、この項と第1項である離職者数 U_t を合算したものの $U_t + d(1-U_t)$ が社会全体の求職者数を与えることになる。従って、 d は所謂 *On the job searching* の割合を表すパラメータと考えることもできる。

以上を総合すると、(126) 式はステップ t で職にありつける人の割合は求人数に比例し、求職者数に反比例するという事実を表すことになる。

次に、期待物価上昇率 $\pi_{e,t}$ 、交渉賃金 $w_{b,t}$ 、(実質)賃金 w_p を定義する。期待物価上昇率とは、将来に予想される物価上昇率のことである。Neugart モデルでは、ステップ $t+1$ における期待物価上昇率が、ステップ t における期待物価上昇率と物価上昇率 π_t との間の、パラメータ a ($0 \leq a \leq 1$) を用いた加重平均として、次式で定義される。

$$\pi_{e,t+1} = a\pi_t + (1-a)\pi_{e,t} \quad (128)$$

また、物価上昇率 π_t を定義するために、以下で、労働者の賃金 w_p 、ステップ t での交渉賃金 $w_{b,t}$ を以下に説明するように定義する。

まずは賃金を次で定義する。

$$w_p = (1-\mu)y \quad (129)$$

ここに、 y は労働者一人当たりの生産量であり、 μ は「需要弾力度」の逆数を表す。需要弾力度とは、需要の増加にもなって価格が下落する割合を表し、この価格の下落率が小さいほど需要弾力度が大きいものとして定義される (図 30 参照)。従って、労働者の実質賃金は、需要の弾力性が大きければ大きいほど高くなる。これは例えば、いわゆる「贅沢品」の需要弾力性は大きい、日用品の弾力性は低いということからわかるように、一人あたりの生産量 (y) が同じであれば、より高価なものを生産すればするほど、その労働者の実質賃金は上昇することを意味している。これは理にかなった設定である。簡単のため、以下では $y = 1$ として議論を進める。

多くの就労者は労働組合に加入しており、労働組合は次年度の賃金³、を引き上げるために交渉

³ 多くの場合には、給与の基本的部分 (「ベース」) の引き上げ、つまり、ベースアップ (所謂「ベア」)。

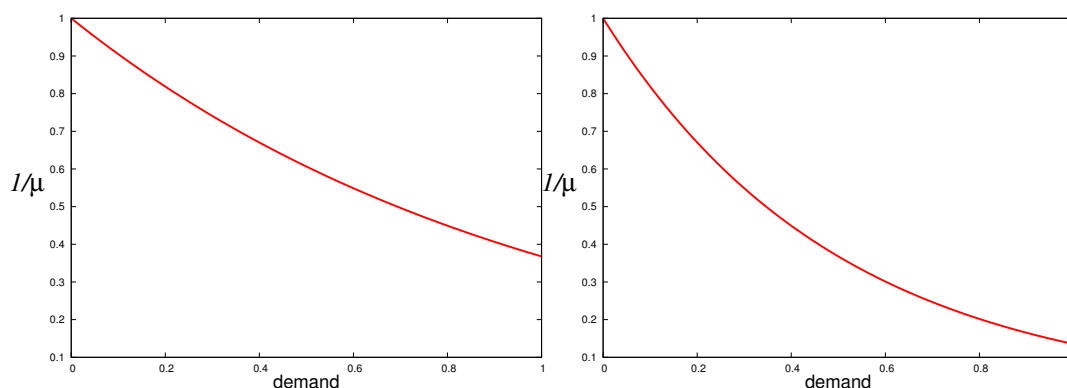


図 30: 重要弾力度 $1/\mu$ の需要 (demand) 依存性. 左図が弾力性が高く, 右図が低い.

を行う. この交渉が成功すれば賃金は上昇する. 従って, 次にステップ t での交渉賃金を

$$w_{b,t} = 1 - (1 - b)U_t \tag{130}$$

で定義する. ここに, パラメータ b は $0 < b < 1$ の値をとることから, 交渉賃金は離職率が高ければ高いほど減少し⁴, 逆に離職率ゼロの極限, つまり, 全ての労働者が就労している状況下においては, 一人あたりの生産量, すなわち, $y = 1$ に一致する⁵. これらを用いて, ステップ t での物価上昇率を次式で定義する.

$$\pi_t = \frac{1}{\delta} \left(\pi_{e,t} + \frac{w_{b,t} - w_p}{w_p} \right) = \frac{1}{\delta} \left(\pi_{e,t} + \frac{\mu - (1 - b)U_t}{1 - \mu} \right) \tag{131}$$

ここで, 上式の説明のため, ステップ t での賃金上昇率を

$$\Delta w_t \equiv \frac{w_{b,t} - w_p}{w_p} \tag{132}$$

で定義しよう. つまり, Δw_t はある時刻における賃金 w_p に対し, 時刻 t における交渉賃金 $w_{b,t}$ がどの程度まで上昇したかの割合を w_p を基準に測ったものである.

従って, (131) 式の意味は, ステップ t での賃金上昇率が正 ($\Delta w_t > 0$) ならば, ステップ t での物価上昇率は, 期待される物価上昇率 $\pi_{e,t}$ より大きくなり, 逆に, 賃金上昇率が負 ($\Delta w_t < 0$) ならば, 物価上昇率は, 期待物価上昇率よりも小さく押さえられる. このことは, 賃金が労使交渉によって上昇し, 消費者でもある就労者にお金がまわれば回るほど, 人々の購買意欲が上がり, 多くの消費材の需要が増加することで, それらの価格も高騰していくことを考えると, 合理的な設定であると思われる.

また, (131) 式における δ は, (131) 式において $w_p = w_{b,t}$ とおけば明らかのように, 物価上昇率と期待上昇率の間のスケール変換 (大きさの調整) を表すパラメータである.

以上から, 物価上昇率 π_t と離職率 U_t の間の連立非線形写像を得ることができる. 具体的には, (124) 式に (126), (127) 式を (131) 式に (128) 式を代入すると

$$U_{t+1} = U_t + i(1 - U_t) - U_t \frac{J_s + \gamma(m - \pi_t)}{U_t + d(1 - U_t)} \tag{133}$$

⁴ 労働組合の構成員が減少するため, 賃金交渉が十分適切に行われないと考える.

⁵ 労働組合の構成員による賃金交渉の結果, 就労者の意見が取り入れられ, 生産量に見合った賃金が得られると考える.

$$\begin{aligned} \pi_{t+1} = & \frac{1}{\delta} \left(\frac{\mu}{1-\mu} + a\pi_t + (1-a) \left(\delta\pi_t - \frac{\mu - (1-b)U_t}{1-\mu} \right) \right) \\ & - \frac{1}{\delta} \left(\frac{1-b}{1-\mu} \left(U_t + i(1-U_t) - U_t \frac{J_s + \gamma(m - \pi_t)}{U_t + d(1-U_t)} \right) \right) \end{aligned} \quad (134)$$

となる。つまり、 U_t と π_t は上記の非線形写像に従って、ともに決定論的に状態更新していくことになる。

ところで、上記の非線形写像 (133)(134) の固定点 $U^* = U_{t+1} = U_t, \pi^* = \pi_{t+1} = \pi_t$ は直ちに

$$U^* = \frac{\mu - m(\delta - 1)(1 - \mu)}{1 - b} \quad (135)$$

$$\pi^* = m \quad (136)$$

のように求めることができる。ここでは、物価上昇率の固定点 π^* が、貨幣価値の上昇率 m に等しい、すなわち、 $\pi^* = m$ と仮定すると (つまり、固定点の条件のうちで (136) のみを仮定すると)、(133) 式で、 $U^* = U_{t+1} = U_t, \pi^* = \pi_{t+1} = \pi_t = m$ とおくことで

$$U^* + i(1 - U^*) - U^* \frac{J_s}{U^* + d(1 - U^*)} = U^* \quad (137)$$

すなわち

$$J_s = \frac{i(1 - U^*)(U^* + d(1 - U^*))}{U^*} \quad (138)$$

として社会が供給する一定数の求人数 J_s が定まる。以下の数値計算では、上記 (138) の条件下で非線形写像 (133)(134) の振る舞いを調べて行くことにする。

9.2.2 非線形写像の分岐構造とカオス

前出の非線形写像 (133)(134) は分岐パラメータ i を変化させていくことで、やがてカオス的振る舞いを見せる。図 31 に分岐パラメータを $i = 0.18$ と選んだ場合の失業率 U_t と物価上昇率 π_t の時

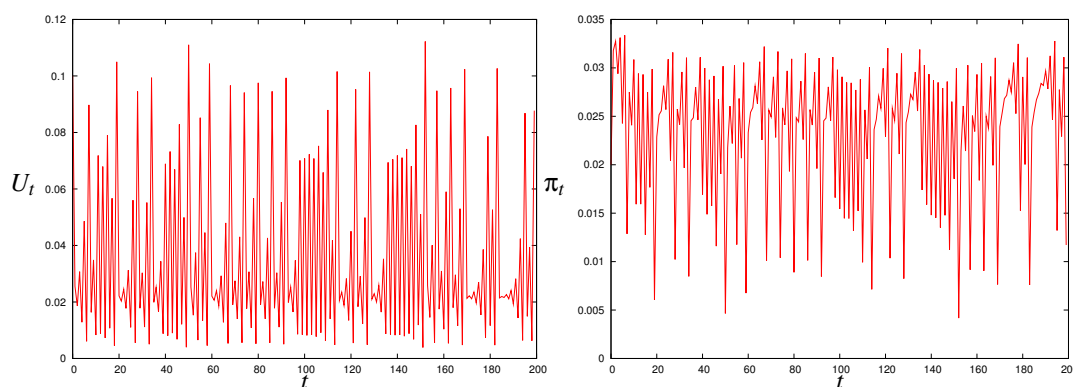


図 31: 分岐パラメータを $i = 0.18$ と選んだ場合の失業率 U (左) と物価上昇率 (右) の時間変化。各種パラメータは、 $d = 0.01, b = 0.5, \mu = 0.04, \gamma = 0.5, \delta = 2, a = 0.5, m = 0.03$ と選んだ。

間変化を $t = 200$ 程度までプロットした。この図から明らかにそれぞれの軌道は固定点へ収束することもなく、また、周期軌道をとることもなく、「複雑な振る舞い」をみせることがわかる。そこで、

分岐パラメータを $i = 0.1$ から $i = 0.185$ 程度まで増加させた場合の U_t, π_t のとりうる値をプロットし、この非線形写像の分岐構造を調べてみる。結果を図 32 に載せる。ここに、 i 以外の各種パラメータは、 $d = 0.01, b = 0.5, \mu = 0.04, \gamma = 0.5, \delta = 2, a = 0.5, m = 0.03$ と設定した。この図から、 $i \simeq 0.13199$ を境に分岐し、パラメータ i が増加していくと分岐が増え、カオス的な振舞をみせることがわかる。このカオスを発生させる分岐パラメータとしては、 m や d でも同様であり、これらの

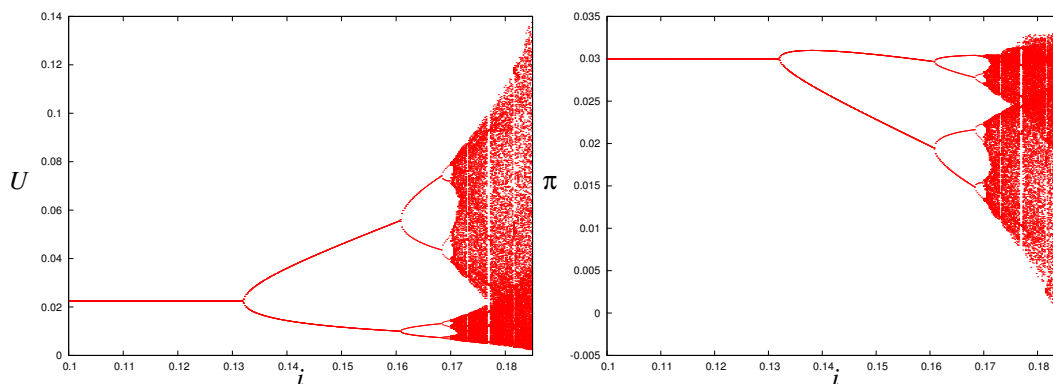


図 32: パラメータ i を変化させた場合の失業率 U (左) と物価上昇率 (右) の分岐構造。 $i = 0.18$ 程度でカオスが生じる。各種パラメータは、 $d = 0.01, b = 0.5, \mu = 0.04, \gamma = 0.5, \delta = 2, a = 0.5, m = 0.03$ と選んだ。

分岐パラメータが、ある一定の値を超えた時、パラメータと失業率 U や物価上昇率 π の関係はカオスになる。

9.2.3 カオス・アトラクタとしてのフィリップス曲線

分岐パラメータ i (離職率) をカオスが出現するような値を取った時の失業率 U と物価上昇率 π の関係は図 33 のようになる。図 33 から、失業率 U と物価上昇率 π が負の関係を表すフィリップス曲

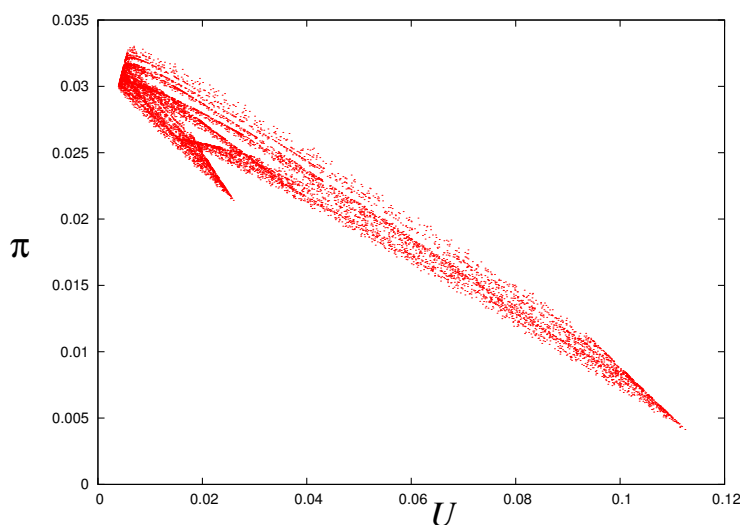


図 33: 失業率 U と物価上昇率 π の関係 (フィリップス曲線)。各種パラメータは、 $d = 0.01, b = 0.5, \mu = 0.04, \gamma = 0.5, \delta = 2, a = 0.5, i = 0.18, m = 0.03$ と選んだ。

線が現れていることがわかる。

また, 図 34 には, 失業率, および, 物価上昇率の時間発展を横軸を時刻 t , 縦軸を $t+1$ での値にそれぞれプロットした. スケールを変えてプロットを眺めて行くと, 自己相似な構造が見える. 従って, Neugart モデルでは, このような「カオス・アトラクタ」がフィリップス曲線を与えることがわかる.

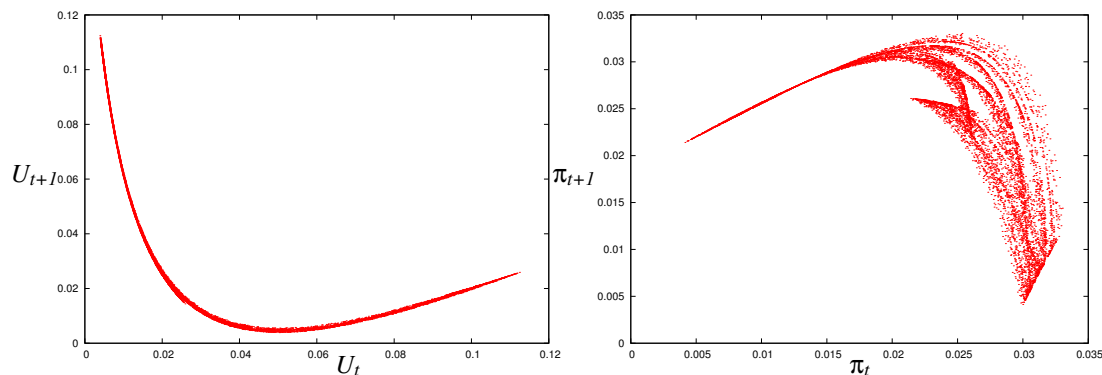


図 34: 分岐パラメータを $i = 0.18$ と選んだ場合の失業率 U (左) と物価上昇率(右) の時間変化を横軸を時刻 t , 縦軸を $t+1$ での値にそれぞれプロットしたもの. 各種パラメータは, $d = 0.01, b = 0.5, \mu = 0.04, \gamma = 0.5, \delta = 2, a = 0.5, m = 0.03$ と選んだ.

9.2.4 失業率と物価上昇率の稠密性と不変測度

U_t, π_t で記述される力学系はカオスであるから, 有界区間の全ての微小領域をそれらの軌道が埋め尽くし, 結果として, これらの変数に関する不変測度 (密度関数) $P(U), P(\pi)$ が得られる. その結果を図 35 に示す. 従って, Neugart モデルは決定論的な状態更新の非線形写像によって失業率と物

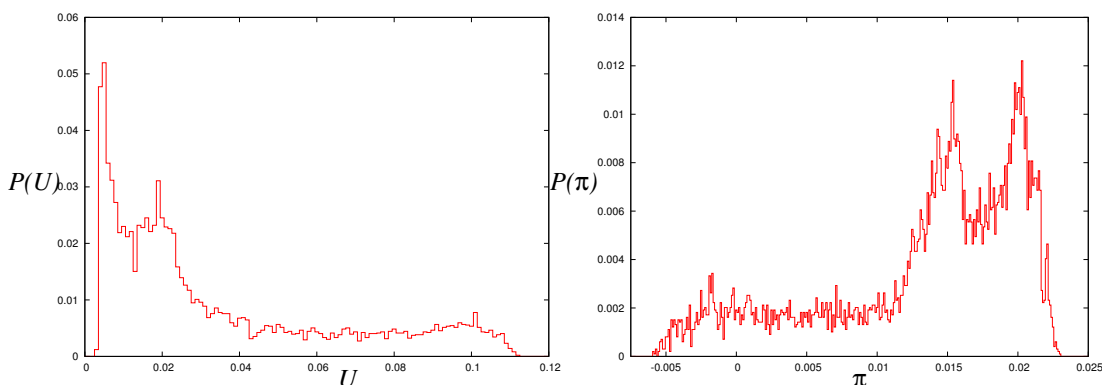


図 35: 失業率と物価上昇率の不変測度, $P(U)$ (左), および $P(\pi)$ (右). $d = 0.01, b = 0.5, \mu = 0.04, \gamma = 0.5, \delta = 2, a = 0.5, m = 0.03$ と選んだ.

価上昇率が決まるが, その写像からのサンプリングを行うと, それは上記のような不変測度を持ち, ある種のバイアスのかかった「乱数生成装置」のような性質も兼ね備えていることがわかる. しかし, 重要なのは, 各ステップでは決定論的な状態更新式に従って, 失業率と物価上昇率が変化する点で

ある.

(参考): 以上の議論および, その背景は混沌系工学研究室を昨年度終了した日野光さんの修士論文に詳しい. また, この Neugart モデルを踏まえて, 我々の研究グループがどのような課題に取り組んだのかも書いてあります. 日野さんの修士論文は北大の図書館が運営している HUSCAP から誰でもダウンロードできるようになっています.

<http://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/handle/2115/43998>

内容に関してももちろんであるが, 修士論文 (あるいは卒業論文) はどのような形で書かれるものなのか (つまり, どんな「感じ」なのか), 今のうちから参考程度に見ておくと良いと思います.

また, この研究課題の進捗状況は陳鶴さんの HP:

<http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~chen/>

から参照できます.

(連絡): 次週 (6/7) は担当者 (井上) が学会で出張のため休講とします. ちなみに, その学会では, 今回この講義で紹介した労働市場に関する話をしてきます.

今回のレポート課題はありません.