



混沌系工学特論 #4

情報科学研究科 井上純一

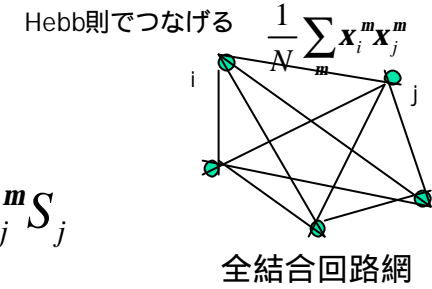
URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成16年11月15日 第4回講義

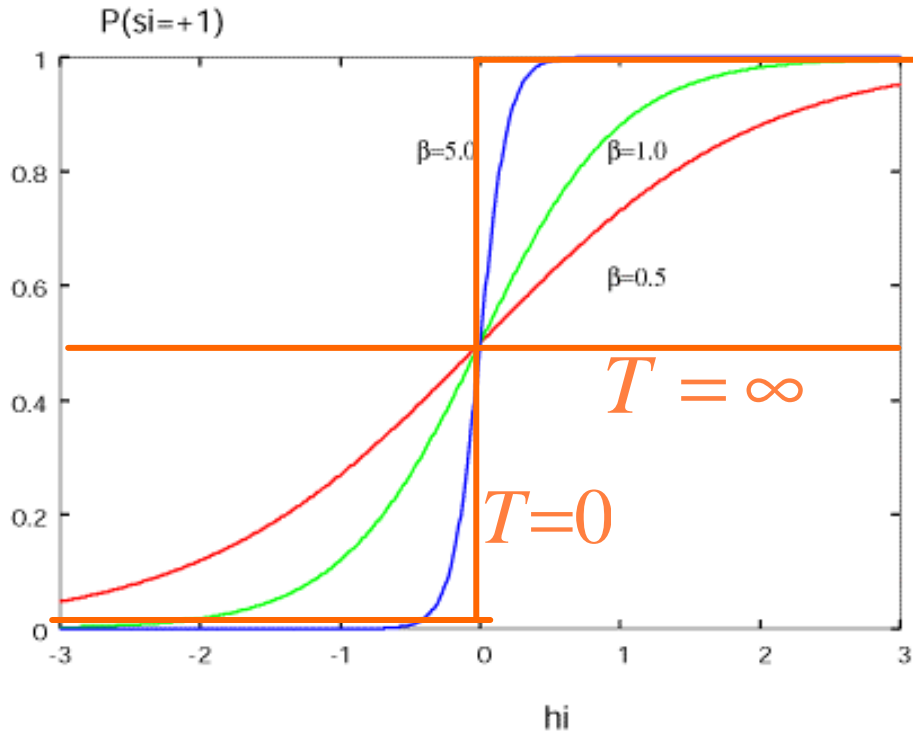
前回の復習

内部ポテンシャル = 重み付き入力

$$h_i = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \sum_m \mathbf{x}_i^m \mathbf{x}_j^m S_j$$



素子の不正確さを確率的出力で表現する



$$P(S_i = +1) = \frac{e^{bh_i}}{e^{bh_i} + e^{-bh_i}}$$

$$T = b^{-1} \quad \text{ノイズレベル}$$

平均場近似のもとで局所重なり

$$m_i = \mathbf{x}_i^1 \langle S_i \rangle \quad \text{に関する閉じた方程式}$$

平均場方程式

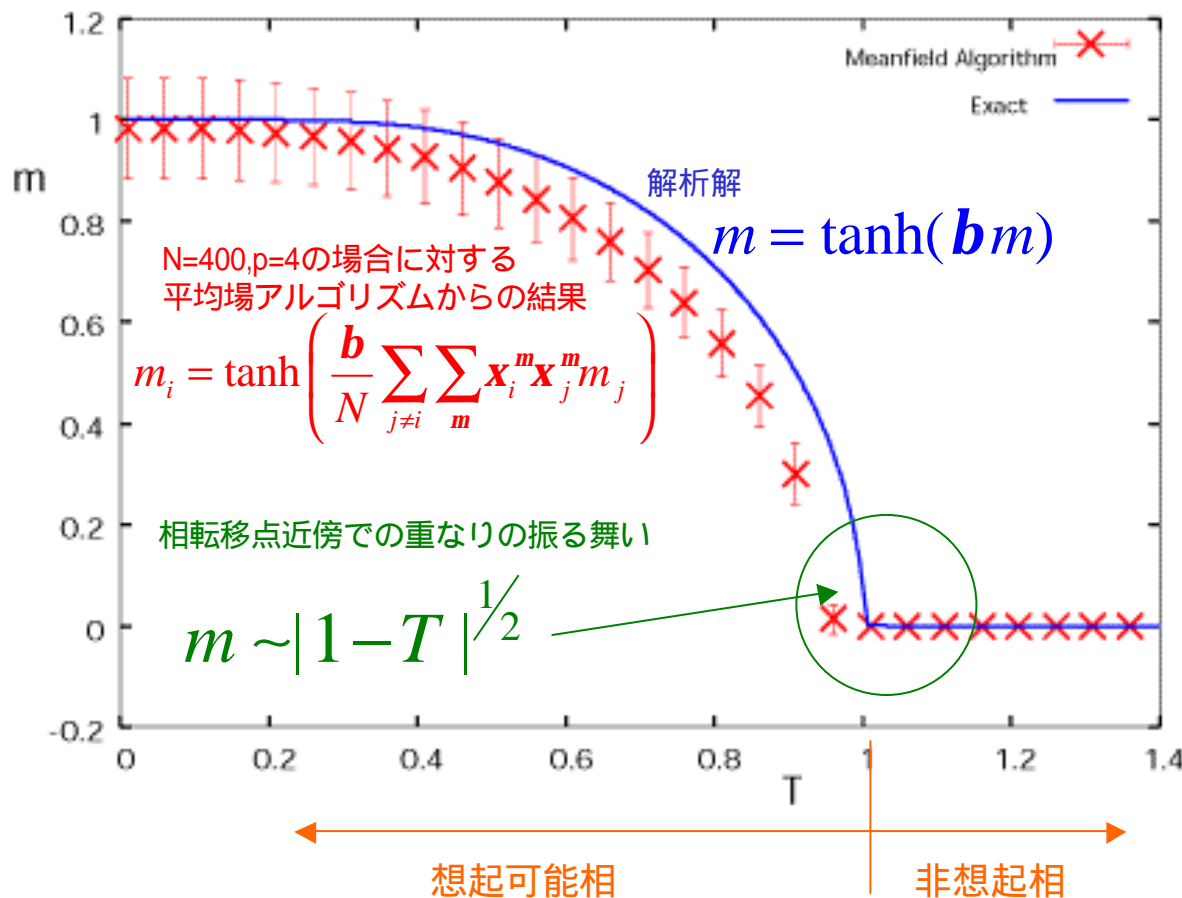
$$m_i = \tanh \left(\frac{b}{N} \sum_{j \neq i} \sum_m \mathbf{x}_i^m \mathbf{x}_j^m m_j \right) \quad \text{を解く}$$

$$\text{重なり} : m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i \quad \text{ノイズ依存性を調べる}$$

P=0(1)の場合の解析解と相転移

前回の復習

どの程度のノイズレベルまで記憶は安定であるか？



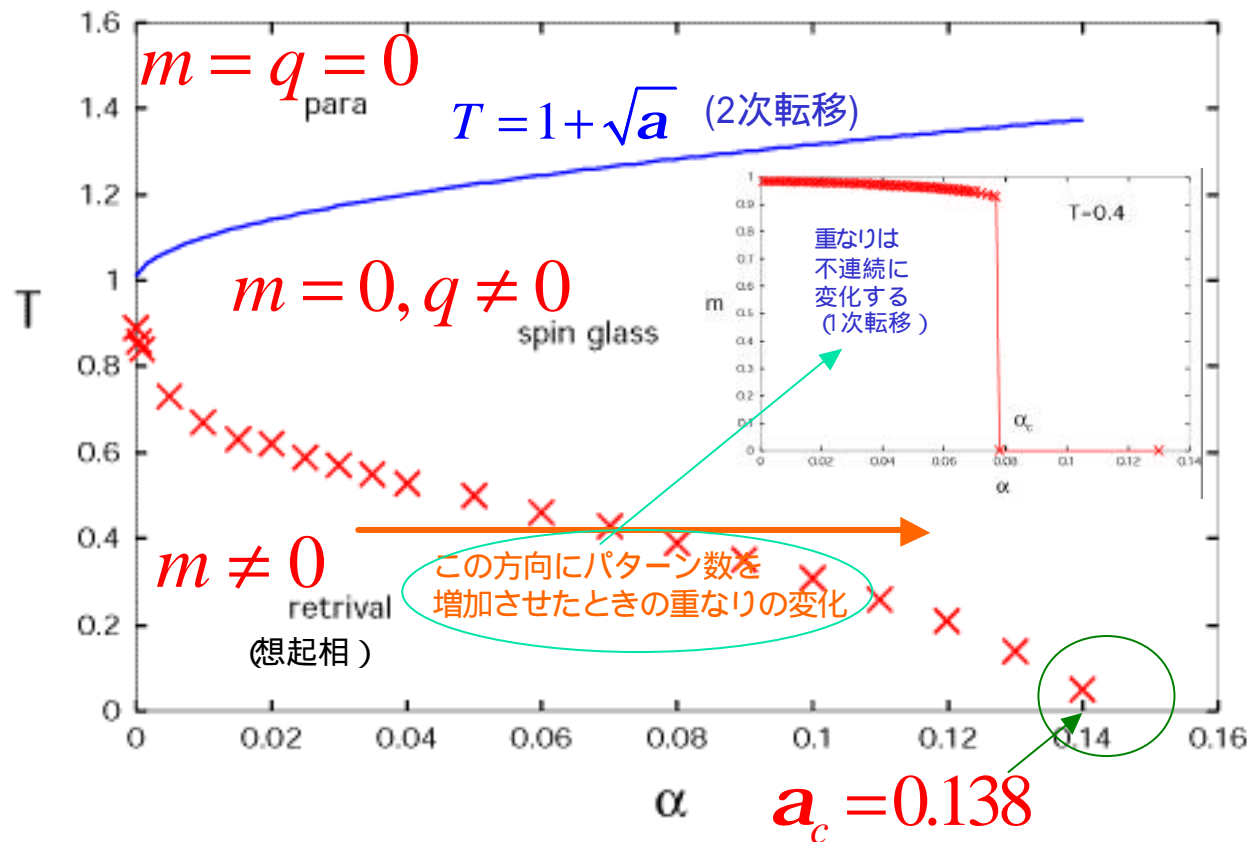
ノイズレベルを徐々に上げて
行くと想起相から非想起相への
相転移が起こる

システムの性能を調べるために
個々の素子 (マイクロ量) の変化を
追うのではなく「重なり」のような
マクロな量の外部パラメータ
(ノイズレベル) に対する変化を調べる

統計力学的なアプローチ

P=O(N)の解析解とその相転移

$p=O(1)$ のとき無視した $\frac{b}{N} \mathbf{x}_i^1 \sum_j \sum_{m \neq 1} \mathbf{x}_i^m \mathbf{x}_j^m \langle S_j \rangle$ をきちんと評価する



回路網の状態方程式

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} Dz \tanh \left[\mathbf{b}(m + z\sqrt{ar}) \right]$$

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} Dz \tanh^2 \left[\mathbf{b}(m + z\sqrt{ar}) \right]$$

$$r = q / [1 - \mathbf{b}(1 - q)]^2$$

(a, b) を固定して

(m, q, r)

について解く

詳細は講義ノート

想起過程のダイナミクス

今までの解析

$$(A) \quad h_i^1 = \mathbf{x}_i^1 \left(1 - \frac{(-\mathbf{x}_i^1)}{N} \sum_{j \neq i} \sum_{m \neq 1} \mathbf{x}_i^m \mathbf{x}_j^m \mathbf{x}_j^1 \right)$$

C_i^1 の統計的性質を調べた

ダイナミクスの固定点 \mathbf{x} の統計的安定性解析 \rightarrow^1

マクロな変数 ミクロな変数

$$(B) \quad m = \frac{1}{N} \sum_i m_i, \quad m_i = \tanh \left(\frac{b}{N} \sum_{j \neq i} \sum_m \mathbf{x}_i^m \mathbf{x}_j^m m_j \right)$$

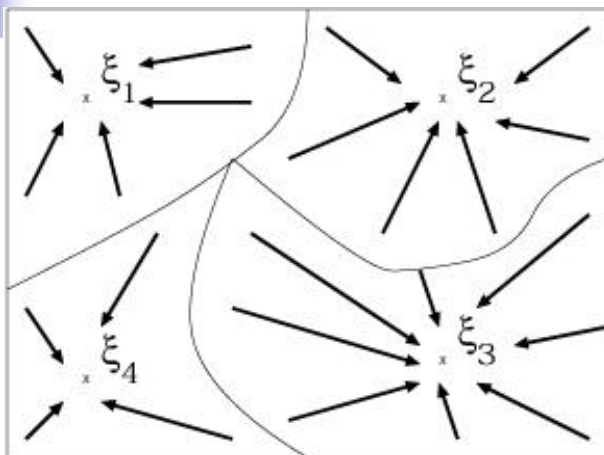
マクロな変数を通じてシステムのノイズに対する耐性を調べた

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T S_i(t) = \langle S_i \rangle \equiv m_i$$

(熱)平衡状態での配位平均 = 長時間平均

(A)(B)いずれも「想起のプロセス」自体を扱ってはいない

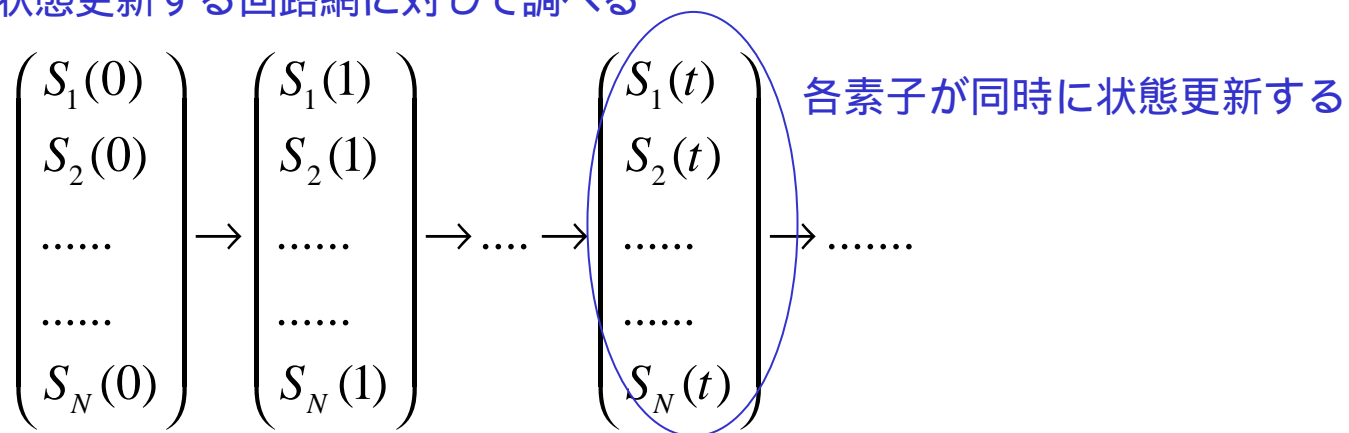
想起過程の解析からわかること



個々のアトラクタ (記憶) への引き込み域、収束速度、場合によっては周期運動やカオス等の振る舞い

平衡状態の解析からはわからない

これらを同期的状態更新する回路網に対して調べる



シグナル- ノイズ解析

$$h_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^p \mathbf{x}_i^m \mathbf{x}_j^m S_j(t)$$
$$= \underbrace{\mathbf{x}_i^1 \left(\frac{1}{N} \sum_j \mathbf{x}_j^1 S_j(t) \right)}_{\text{シグナル}} + \underbrace{\frac{1}{N} \sum_j \sum_{m \neq 1} \mathbf{x}_i^m \mathbf{x}_j^m S_j(t)}_{\text{ノイズ}} \equiv \mathbf{x}_i^1 m_t + N_i^t$$

$$m_{t+1} = \frac{1}{N} \sum_j \mathbf{x}_j^1 S_j(t+1) = \frac{1}{N} \sum_j \mathbf{x}_j^1 \text{sgn}(h_i(t)) = \frac{1}{N} \sum_j \text{sgn}(m_t + \mathbf{x}_j^1 N_j(t))$$

$$N_i(t) = \frac{1}{N} \sum_j \sum_{m \neq 1} \mathbf{x}_i^m \mathbf{x}_j^m S_j(t)$$

ノイズが素子の状態を介して
時間依存していることに注意する必要あり

発展方程式#1

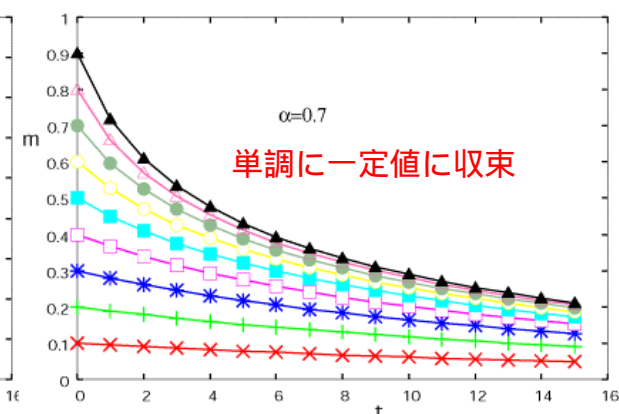
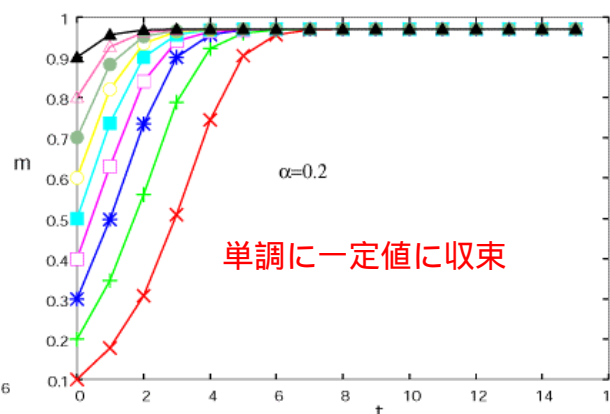
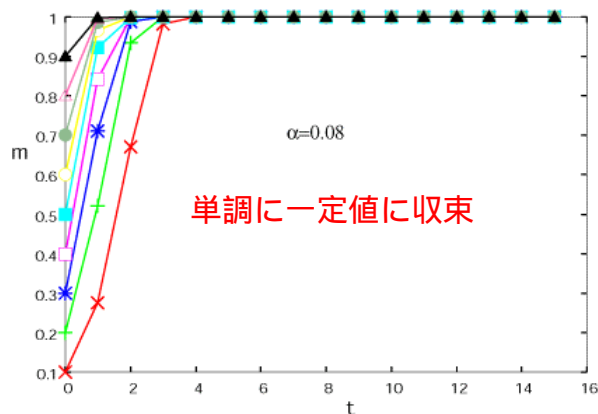
ノイズ項を固定分散ガウスで近似した場合

$$N_i^t \sim N(0, \mathbf{s}^2), \mathbf{s}^2 = p/N = \mathbf{a}$$

分散の時間依存性を完全に落としてしまう

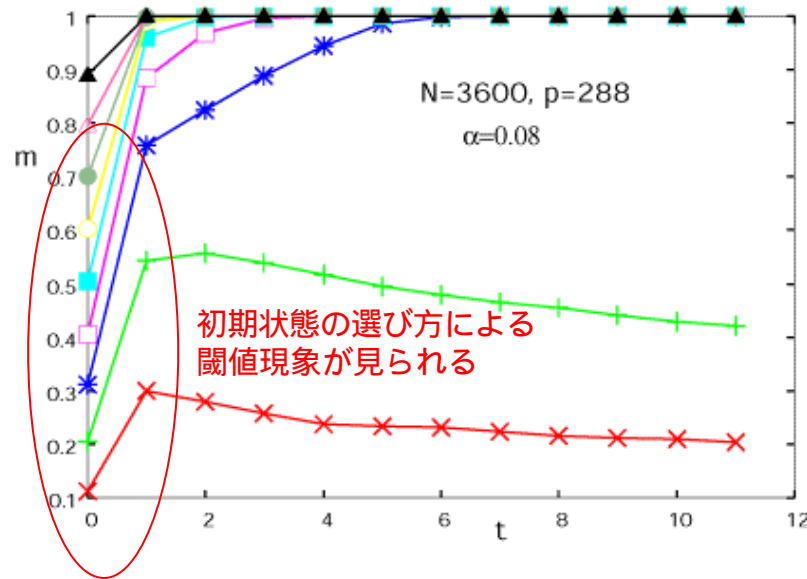
$$m_{t+1} = \frac{1}{N} \sum_j \text{sgn}(m_t + \mathbf{x}_j^1 N_j(t)) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^{m_t/s} dz e^{-z^2/2} = 1 - 2H\left(\frac{m_t}{\sqrt{a}}\right)$$

いくつかのプロット結果 (重なりに関する非線形写像をプロット)



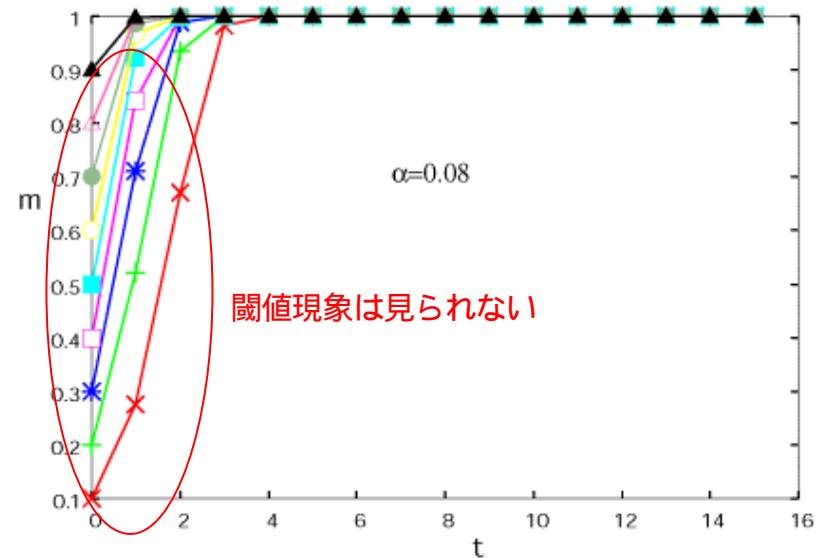
計算機シミュレーションとの比較

計算機シミュレーションからの結果



定性的にも両者は食い違っている

$$m_{t+1} = 1 - 2H\left(m_t / \sqrt{a}\right)$$



ノイズ分散一定の仮定は荒すぎる

発展方程式 #2 : Amari-Maginu理論

ノイズ項を時間依存分散ガウスで近似した場合

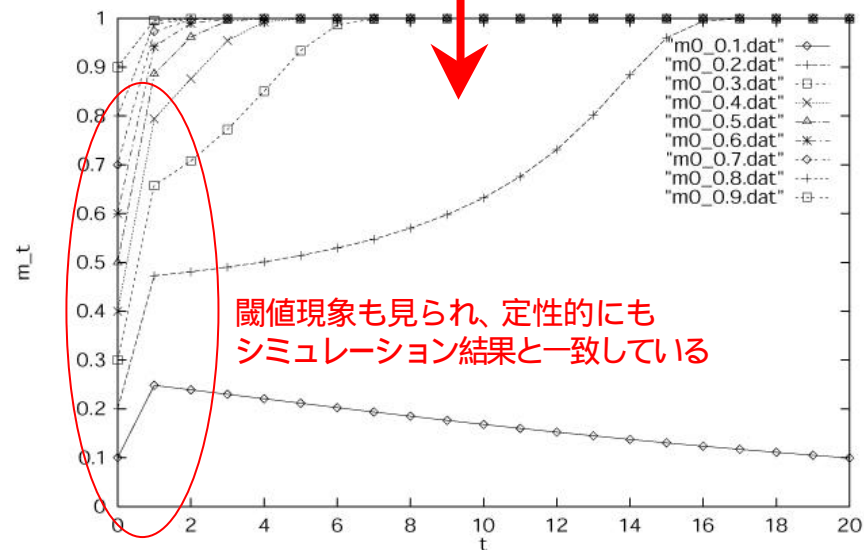
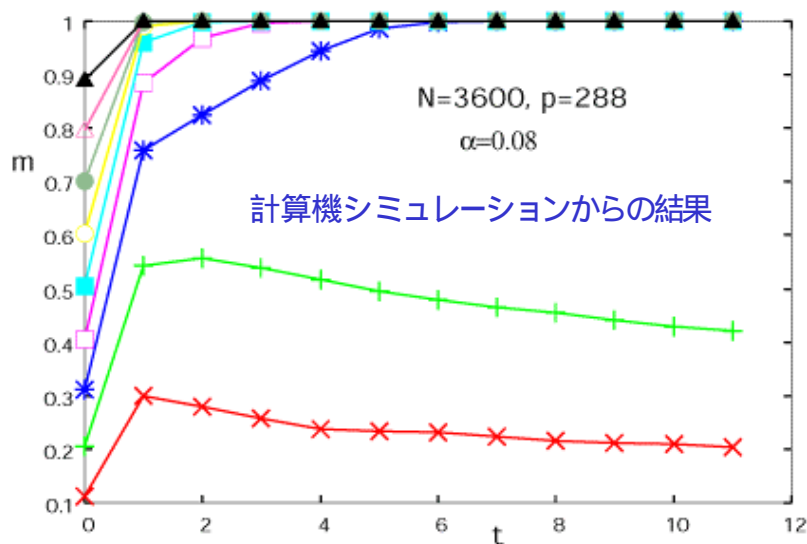
$$m_{t+1} = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^{m_t/s_t} dz e^{-z^2/2} \rightarrow \text{分散に時間依存性を持たせる}$$

$$m_t = \operatorname{erf}\left(\frac{m_{t-1}}{\sqrt{2s_{t-1}}}\right)$$

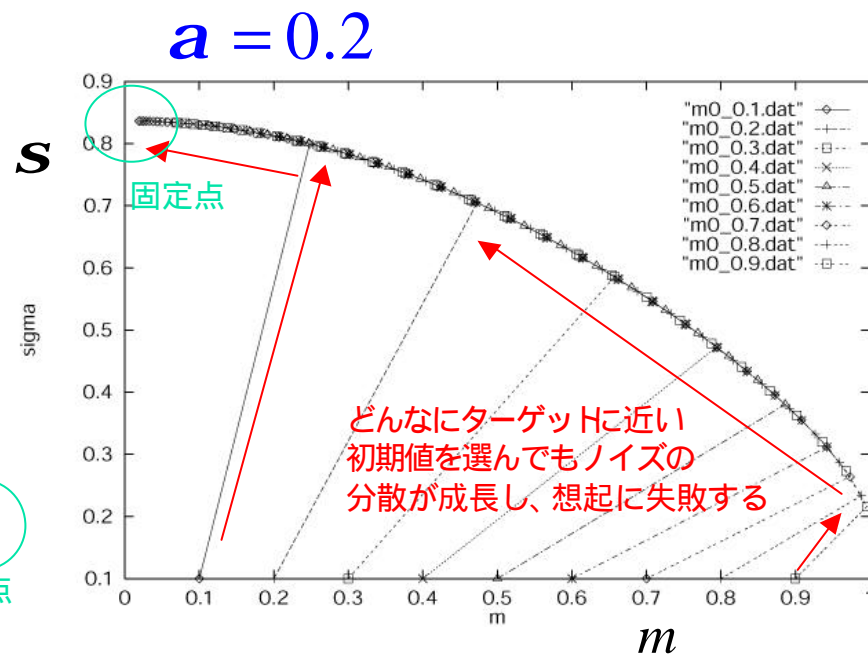
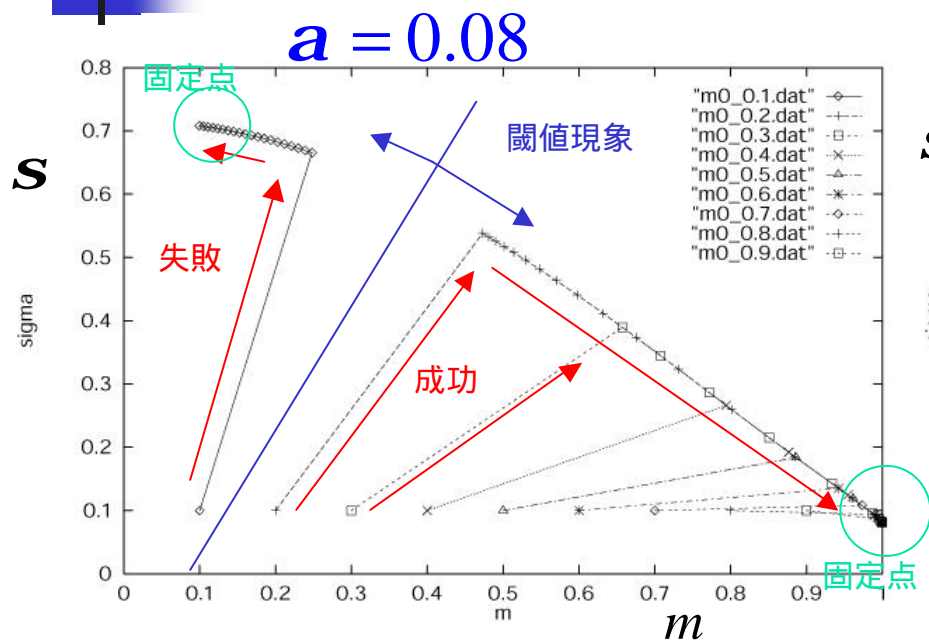
$$s_t^2 = a + 4P\left(\frac{m_{t-1}}{s_{t-1}}\right)^2 + 4a\left(\frac{m_{t-1}m_t}{s_{t-1}}\right)P\left(\frac{m_{t-1}}{s_{t-1}}\right)$$

導出の詳細は講義ノート

(m_t, s_t) に関する非線形写像を解く



重なりと分散の流れ図



a_c について

$$m = \operatorname{erf}\left(\frac{m}{\sqrt{2}s}\right)$$

$$s^2 = a + 4P\left(\frac{m}{s}\right)^2 + 4a\left(\frac{m^2}{s}\right)P\left(\frac{m}{s}\right)$$

a を増加させつつ
方程式を解き、重なりが
有限からゼロになるときを
調べる

課題 5

Hebb学習について

回路におけるもう一つの時間スケール

$$S_i(t+1) = \text{sgn} \left(\sum_{j \neq i} w_{ij} S_j(t) \right), w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^p \mathbf{x}_i^m \mathbf{x}_j^m$$

コンピュータシミュレーションを行う際には予め固定した

想起が行われる以前に学習により神経系に分散記憶された

ここでの変化とは結合の変化のこと

学習：ある機能を獲得するために外界からの刺激により、あるいは自己組織的に回路網を変化させること

Hebb 学習則

$$w_{ij}(m+1) = w_{ij}(m) + \frac{1}{N} \mathbf{x}_i^m \mathbf{x}_j^m, w_{ij}(0) = 0$$

pステップ後には

$$w_{ij}(p) = w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^p \mathbf{x}_i^m \mathbf{x}_j^m$$

我々はこのを用いた。学習後、結合は変化しないと考える(変化があるとしてもそれは十分に「遅い」変化)

→
 S : 速い変数
→
 w : 遅い変数

これらを同じ時間スケール内で動かしたらどうなるか？

課題7

対称結合回路網とエネルギー関数

ノイズゼロでの非同期ダイナミクス：

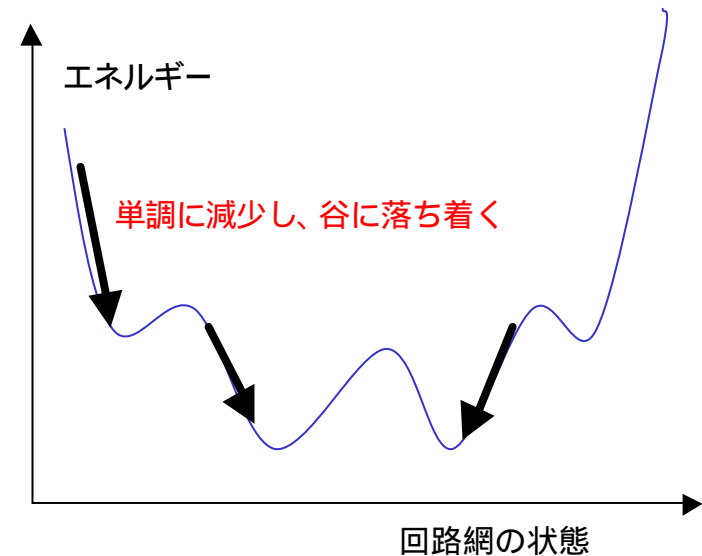
ある時刻に $S_1' = \text{sgn} \left(\sum_{k=2}^N w_{1k} S_k \right)$ と更新したとすると

エネルギー関数：
$$E = - \sum_{ij} w_{ij} S_i S_j$$
 は

$$E(S_1') - E(S_1) = \Delta E \leq 0$$

エネルギーは単調減少

いわゆる Hopfield model



次回から[最適化問題の数理]に移ります