混沌系工学特論 #7

情報科学研究科　井上純一

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成17年1月17日　第8回講義

学習とは何か？

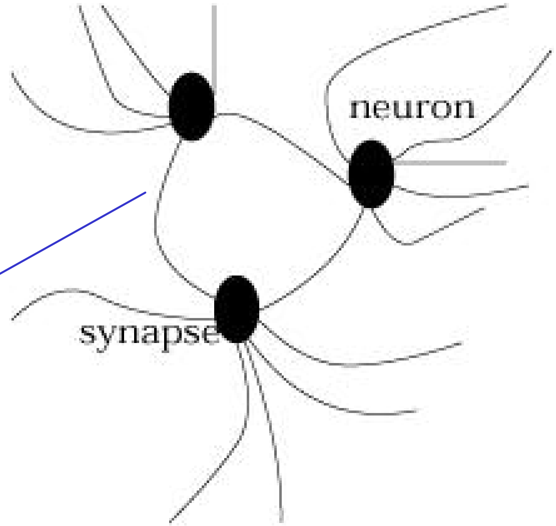
学習：外界からの刺激（信号）に応じて自らの構造を変化させること

例：神経回路網（復習）

Hebb学習

$$w_{ij}(m+1) = w_{ij}(m) + \frac{1}{N} x_i^m x_j^m, \quad w_{ij}(0) = 0$$

素子間の結合を変化させる



$$w_{ij}(p) = w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{p} x_i^m x_j^m$$

Pステップ後の結合で連想記憶が実現できた

教師あり学習と教師なし学習

この講義では主にこちらを扱う

教師あり学習

教師機械と呼ばれる仮想的ブラックボックスが存在し、その入出力関係が「例題」として生徒機械に与えられ、生徒はできる限り教師機械の入出力を模倣するように自分の構造を変えていく学習

教師なし学習

教師機械の入出力関係が陽には存在せず、環境の変化や入力刺激のみに適用して自分の構造を変化させる学習

神経回路の学習に限れば、いずれの学習も神経素子間の結合を変化させることが学習に相当する

バッチ学習とオンライン学習

バッチ学習　(オフライン学習)

学習機械がいくつかの例題をまとめて受取り、その例題全てに正解を与えるように結合を変えていく学習様式

オンライン学習

学習機械には例題が逐次的に1つずつ与えられその1つの例題をもとに結合を変えていき、用いた例題は破棄してしまう学習様式

一般的に言って

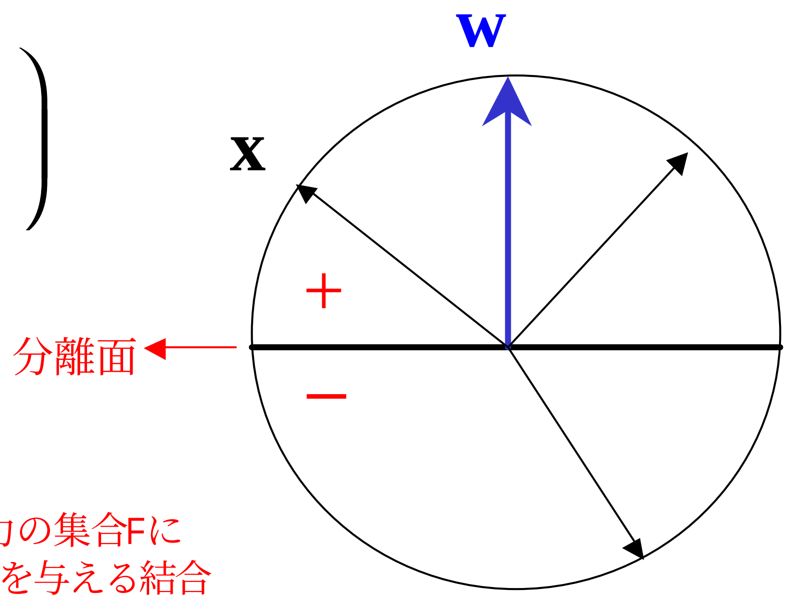
処理時間　：バッチ学習 (遅)　オンライン学習 (速)

精度 :　バッチ学習 (良い)　オンライン学習 (悪い)

⇒　目的に応じて使い分ける

学習機械パーセプトロン

$$y = \mathrm{sgn}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}) = \mathrm{sgn}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i x_i \right)$$



$$d = \min_{(\mathbf{x}, y) \in F} \{ y(\underline{\mathbf{w}}^* \cdot \mathbf{x}) \} > 0$$

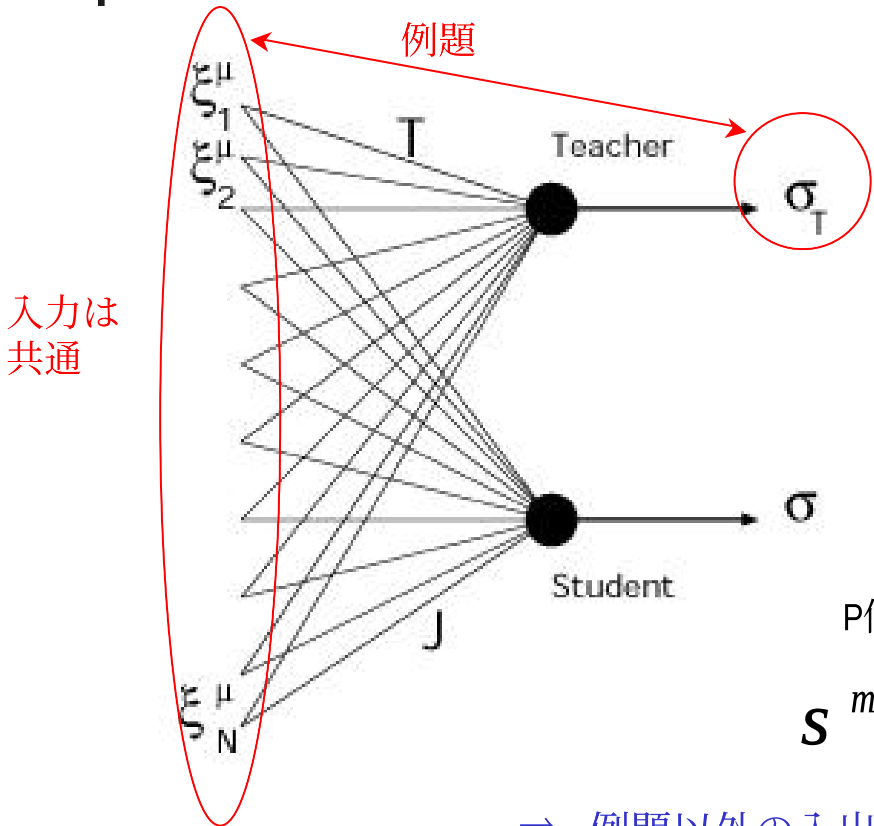
線形分離可能な入出力の集合Fに
属するもの全てに正解を与える結合

パーセプトロンの収束定理

パーセプトロンは多くても d^{-2} 以内で正解を見つけ出すことができる

⇒ 詳細は講義ノート

教師機械の導入と例からの学習



$$s_T^m = \mathrm{sgn}\left(\mathbf{T}\cdot x^m\right) = \mathrm{sgn}\left(\sum_{i=1}^{N} T_i x_i^m\right)$$

$$s^m = \mathrm{sgn}\left(\mathbf{J}\cdot x^m\right) = \mathrm{sgn}\left(\sum_{i=1}^{N} J_i x_i^m\right)$$

入力は共通

P個の例題全てに正しい答えを出す結合を選べれば

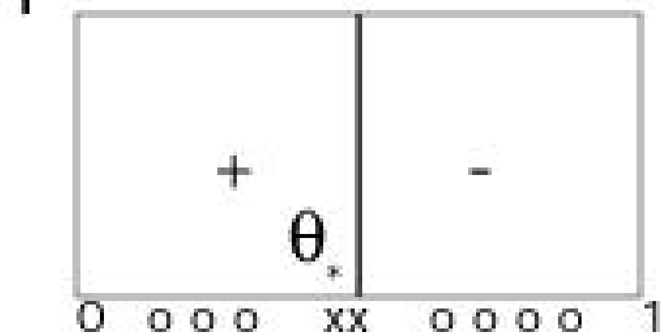
$$s^m = s_T^m \qquad (m = 1, \ldots, P)$$

⇒ 例題以外の入出力を正しく与える保障はあるか？

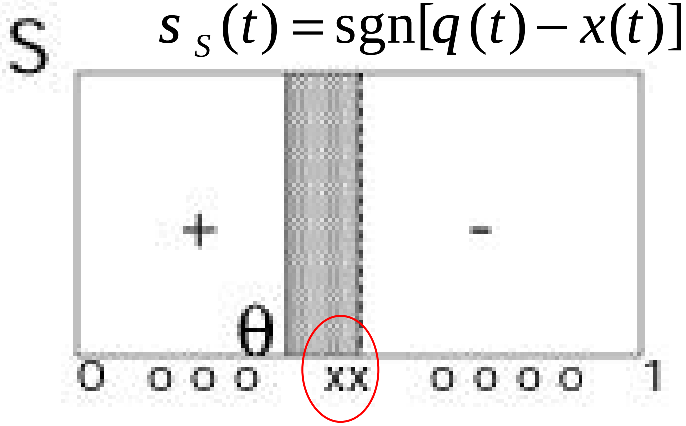
訓練データを数多く与えることのできる環境下ではこの疑問に答えることができる

訓練誤差と汎化誤差

$$s_T(t) = \mathrm{sgn}[q_* - x(t)]$$



$$s_S(t) = \mathrm{sgn}[q(t) - x(t)]$$

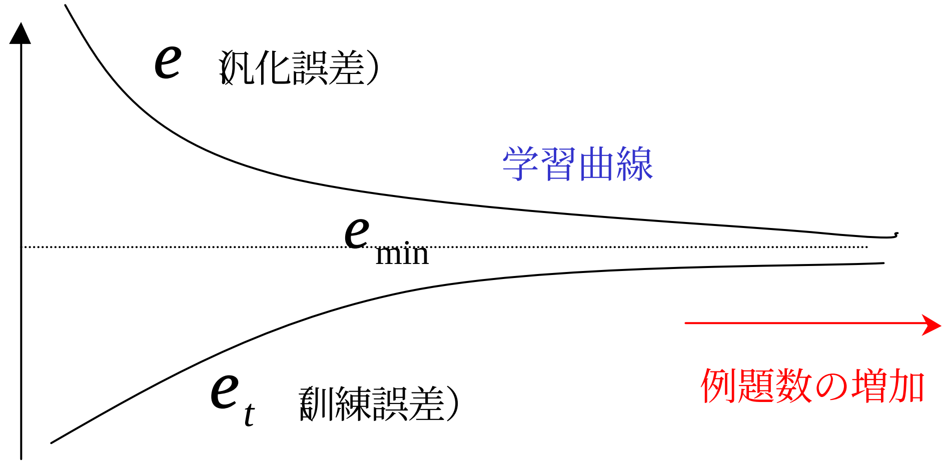


この領域に落ちた入力に対して
間違った結果を出力する

○印の例題に対しては正解するが、×印は誤る

訓練誤差 ： $e_t = \dfrac{1}{P}\sum_{m=1}^{P} \Theta(-s_T s)$

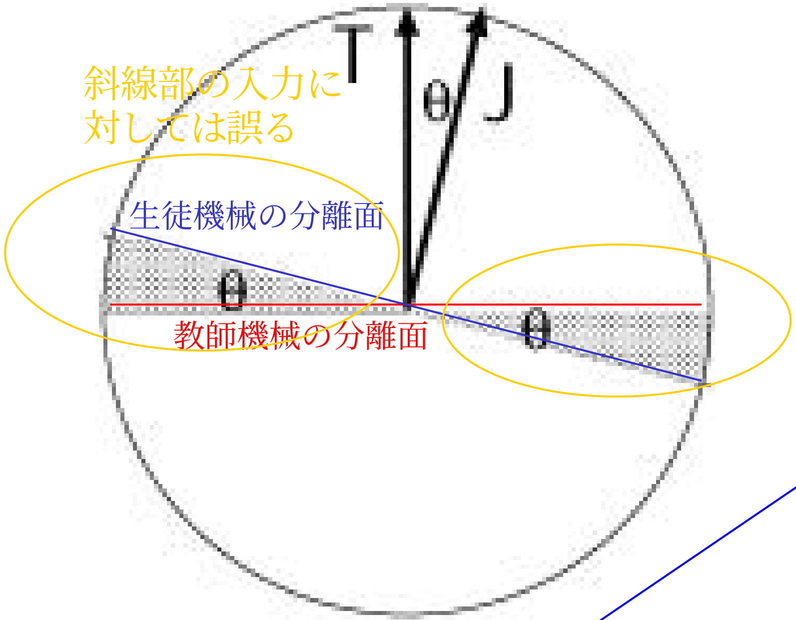
汎化誤差 ： $e = \sum_{\{S\}} P_S(\mathbf{S})\Theta(-s_T s)$

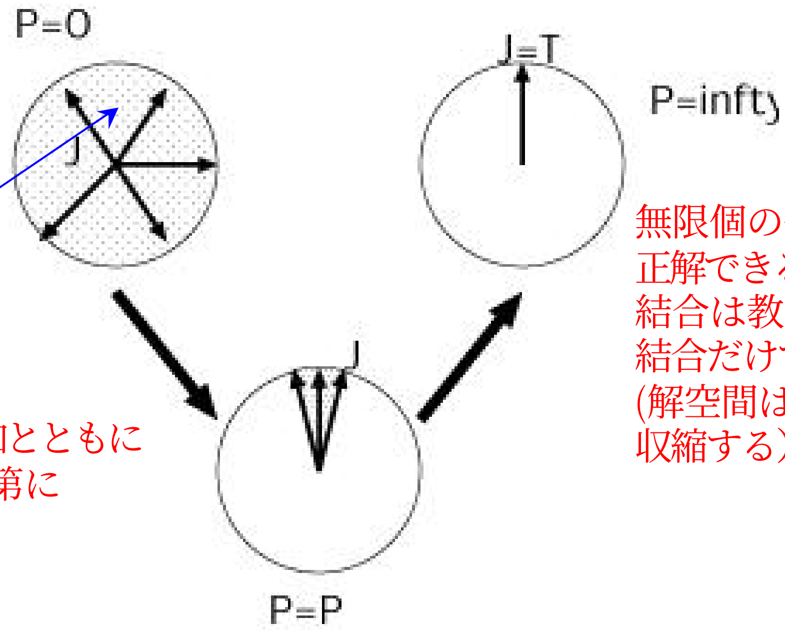


統計力学による解析：解空間

$$R = \frac{1}{N}(\mathbf{J}\cdot\mathbf{T}) = \cos q$$ （マクロな量）

汎化誤差は $$e = \frac{q}{p} = \frac{1}{p}\arccos(R)$$





与えられた例題数に
対して形成される解空間の
中の1点をランダムに選ぶ
戦略がギブス学習

例題数の増加とともに
解空間は次第に
縮んでいく

無限個の例題に
正解できるような
結合は教師機械の
結合だけである
(解空間は1点に
収縮する)

解空間のエントロピーとその評価

$$P = a N$$

P個の例題数に対する解空間の体積

$$\Omega_P(e) = \Omega_{P-1}(e)(1-e) = \cdots = \Omega_0(e)(1-e)^P$$

$$\Omega_0(e)(1-e)^P = (1-e)^P \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{J} d(\mathbf{J}^2 - N) d\left(\frac{1}{N}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{T}) - \cos(pe)\right)}$$

$$= \exp\left(Ns(e,a)\right)$$

(導出の詳細は講義ノート参照)

マクロな量を指定した場合の
解空間の体積

$$s(e,a) = \frac{1}{2}(1+\log 2p) + \frac{1}{2}\log\sin^2(pe) + a\log(1-e)$$

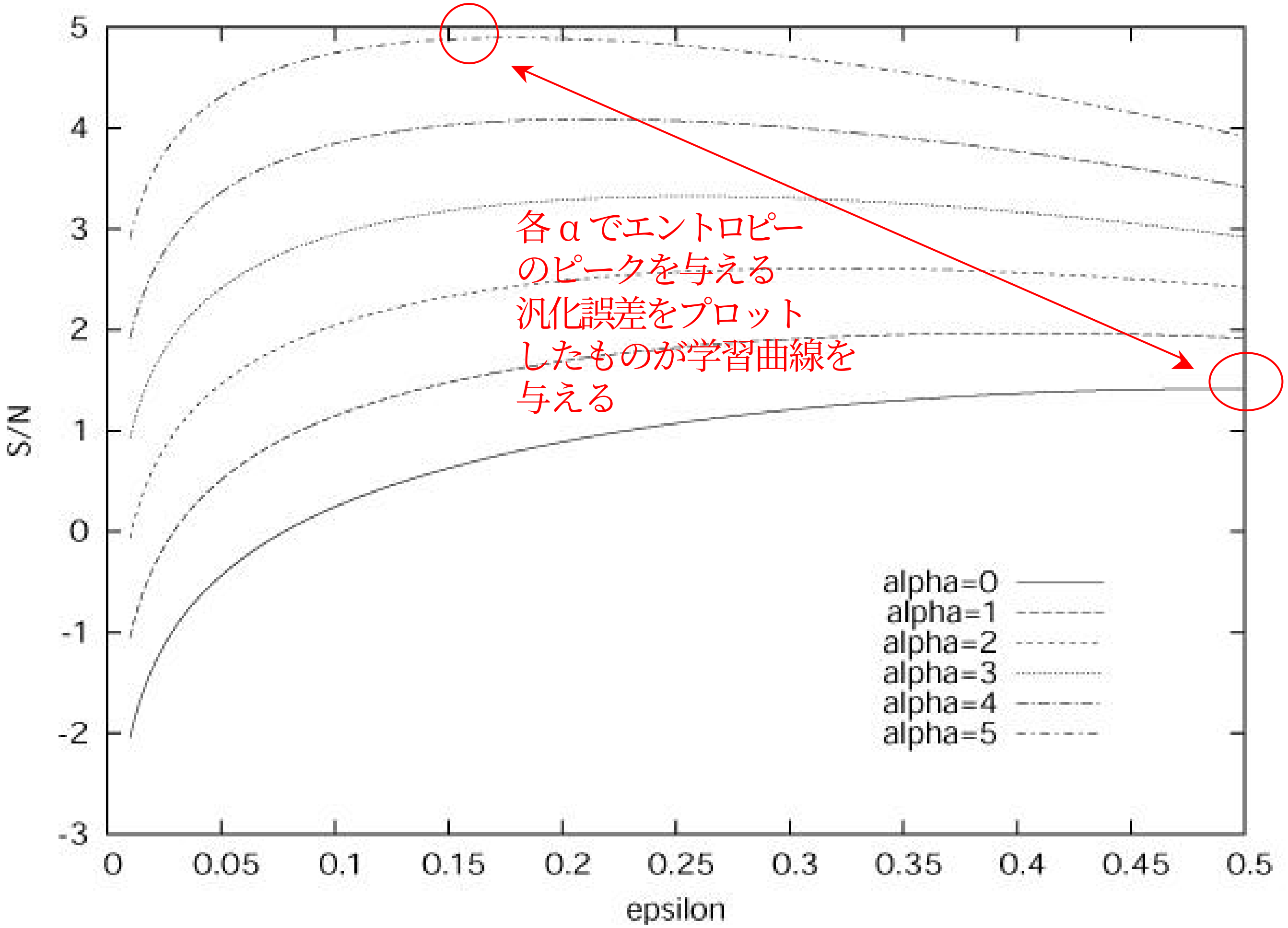
1入力あたりの解空間のエントロピー

$$\boxed{e(a) = \arg\max_e s(e,a)}$$

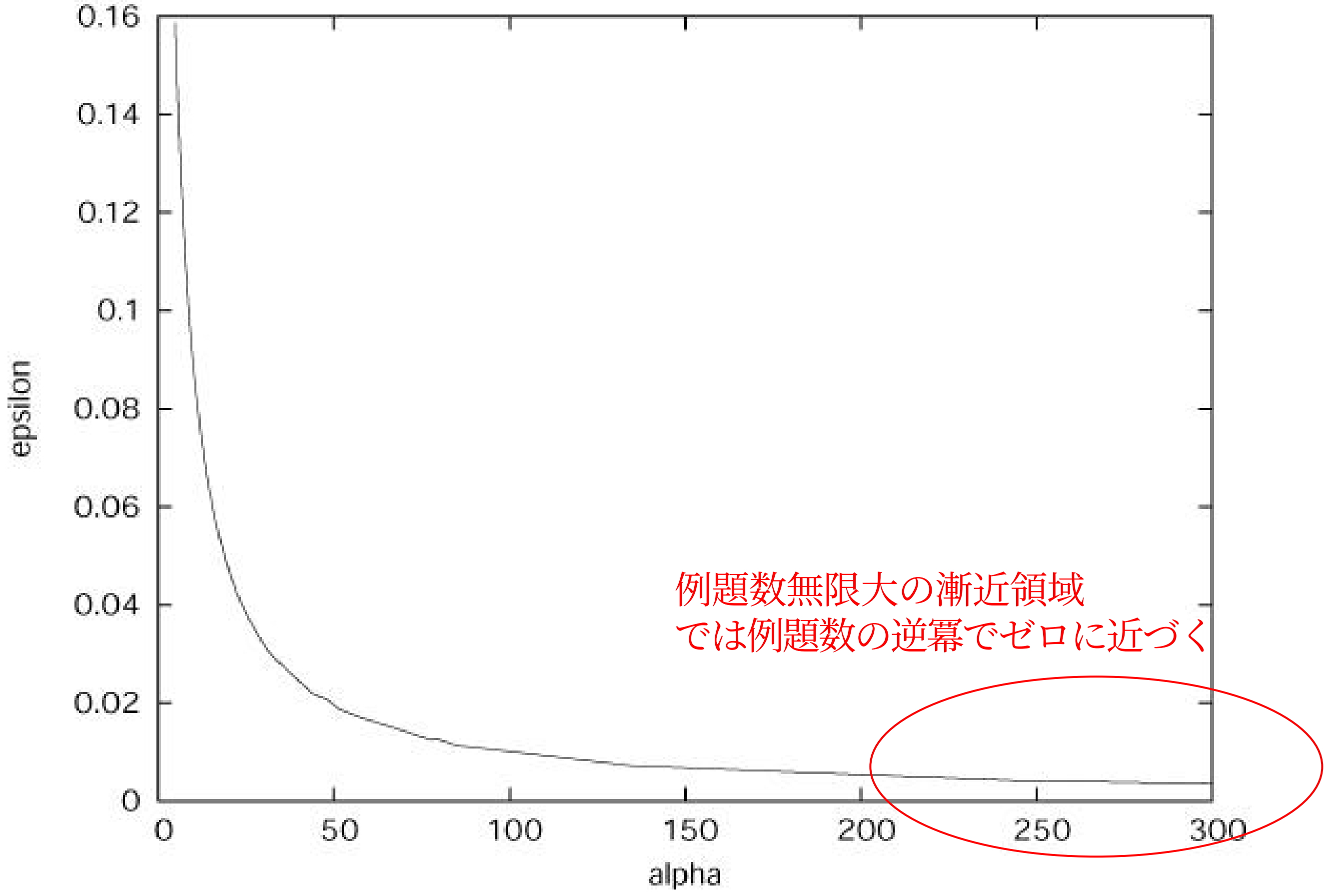
各αでエントロピーを
最大化するようなεが
汎化誤差を与える

学習曲線

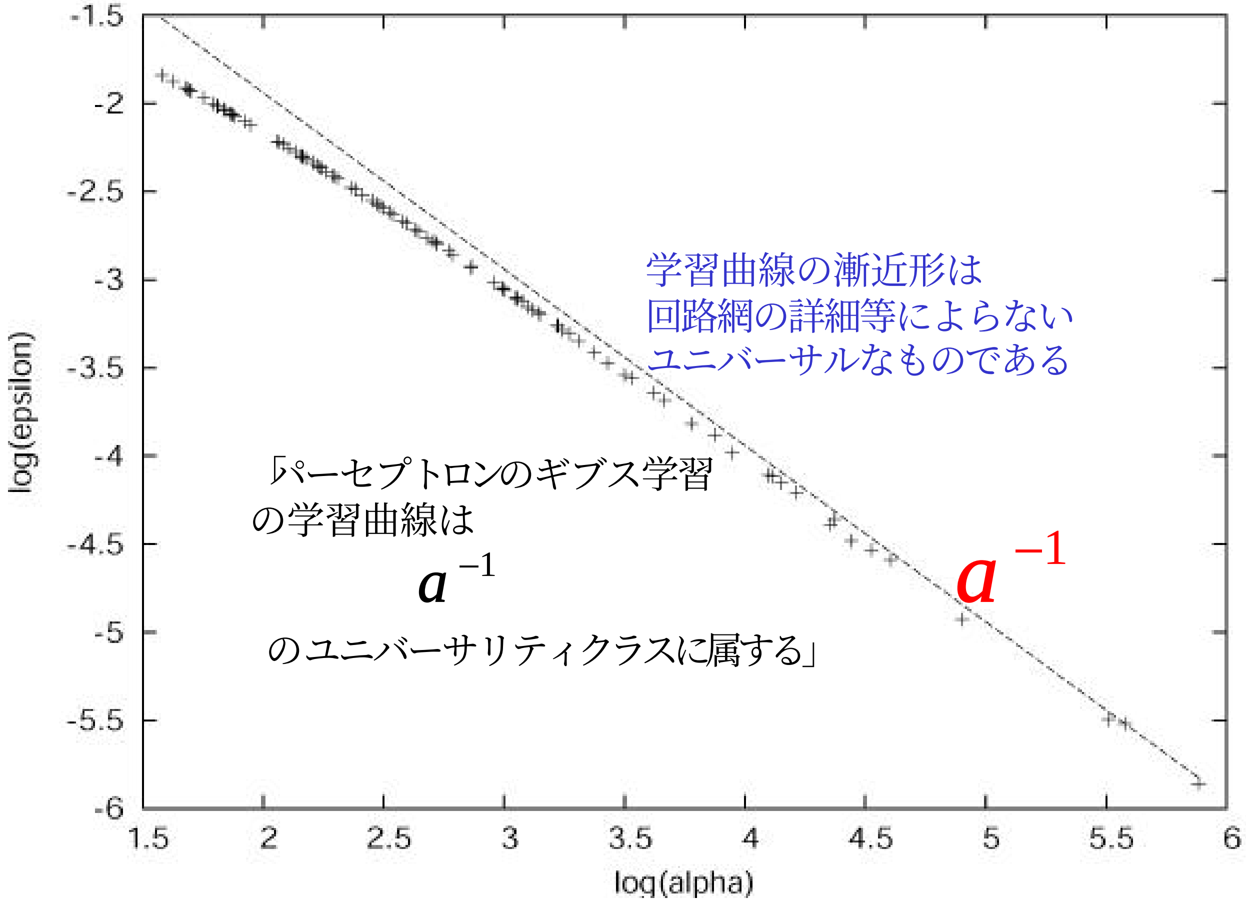
解空間のエントロピー


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
S/N
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
epsilon
alpha=0
alpha=1
alpha=2
alpha=3
alpha=4
alpha=5
各αでエントロピー
のピークを与える
汎化誤差をプロット
したものが学習曲線を
与える

パーセプトロンの学習曲線



学習曲線の漸近形


-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
-4.5
-5
-5.5
-6
log(epsilon)
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
log(alpha)
学習曲線の漸近形は
回路網の詳細等によらない
ユニバーサルなものである
「パーセプトロンのギブス学習
の学習曲線は
a^{-1}
のユニバーサリティクラスに属する」
a^{-1}