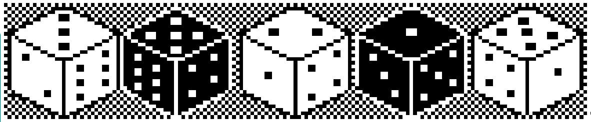
混沌系工学特論 #2

情報科学研究科　井上純一

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

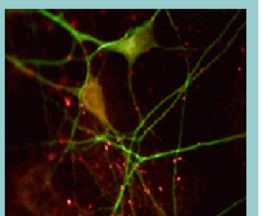
平成17年10月24日　第2回講義

確率を用いた柔らかな情報処理

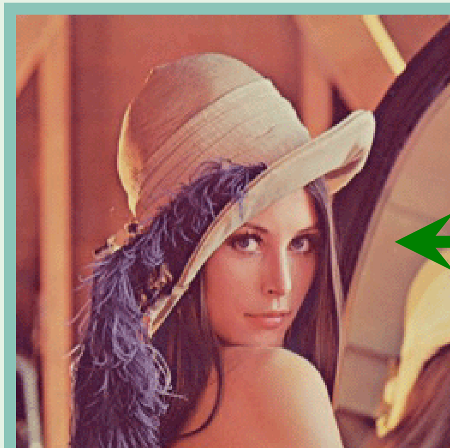


http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

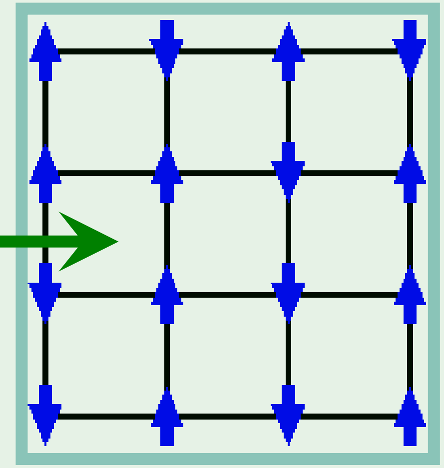
統計力学の方法に基づくアルゴリズムの構築と性能評価



単位：神経細胞
ネットワーク：脳



単位：画素
ネットワーク：デジタル画像



単位：スピン
ネットワーク：磁石

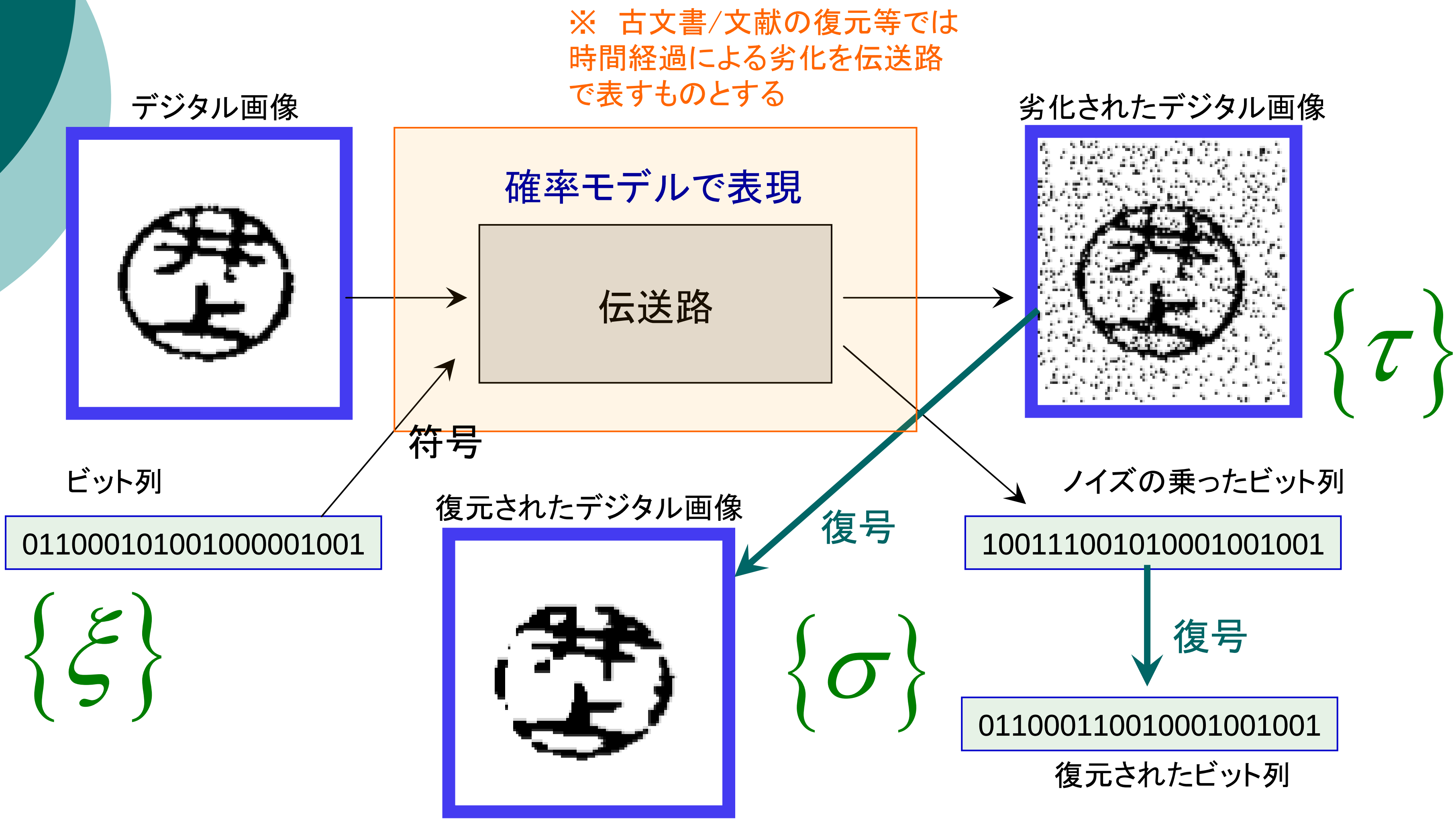
確率的にふるまう要素がネットワークをなして全体が情報処理系を形成している

そのような題材としては・・・

今回、次回はこの関係に着目していく

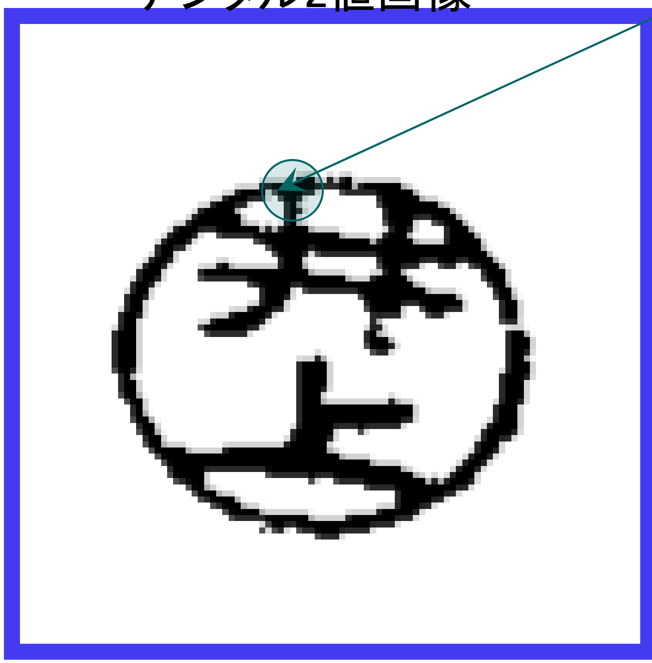
ニューラルネット（連想記憶、学習）、画像修復 / 誤り訂正符号、最適化問題、スペクトル拡散通信、ゲーム理論、植物ネットワーク、etc・・・.

デジタルデータの転送と復元



デジタル画像の情報表現

デジタル2値画像



0001
0101
1110

白→0
黒→1
として各画像を符号

テキストファイル（inoue.pbm）の中身

P1

２値画像のタグ

200 200

画像のサイズ
（200×200）

11111111010010101
11111111111111111
10101001111111111
....
....

画像データ本体

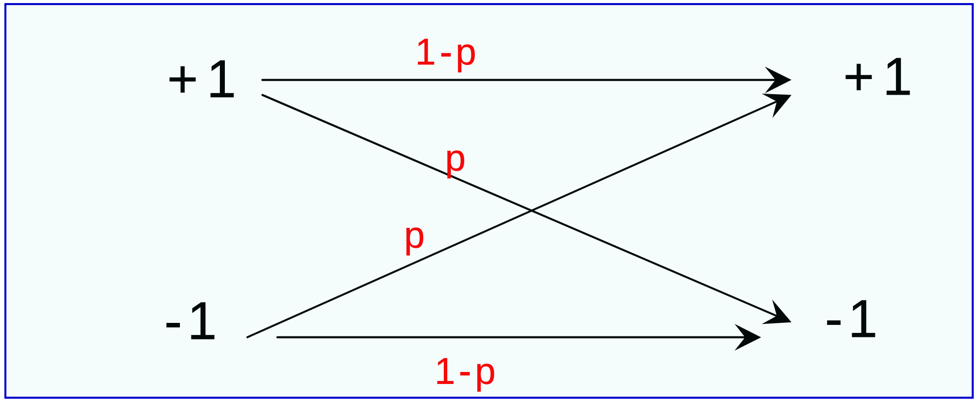
変換

$$\xi_i \rightarrow 2\xi_i - 1$$

により、白→－1、黒→＋1で表現する

画像の「小磁石」による表現

劣化過程の確率モデル化



2元対称通信路のグラフ表現

条件つき確率表現

$$P(\{\tau\}\mid\{\xi\}) = P(\underbrace{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N}_{\text{劣化されたピクセル列}} \mid \underbrace{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N}_{\text{原画像のピクセル列}})$$

各ピクセルの劣化過程が独立ならば

$$P(\{\tau\}\mid\{\xi\}) = \prod_i \frac{\exp\left(\beta_\tau \tau_i \xi_i\right)}{2\cosh(\beta_\tau)}$$

劣化過程の確率モデル

2元対称通信路の
条件つき確率表現

$$P(\tau_i = \xi_i \mid \xi_i) = \mathrm{e}^{\beta_\tau} \big/ 2\cosh\left(\beta_\tau\right) = 1 - p$$

$$P(\tau_i = -\xi_i \mid \xi_i) = \mathrm{e}^{-\beta_\tau} \big/ 2\cosh\left(\beta_\tau\right) = p$$

$$\beta_\tau = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-p}{p}\right)$$

ベイズの公式と事後確率

尤度(ゆうど)

事前確率分布

事後確率分布

$$P(\{\sigma\}|\{\tau\}) = \frac{P(\{\tau\}|\{\sigma\})P(\{\sigma\})}{\sum_{\{\sigma\}} P(\{\tau\}|\{\sigma\})P(\{\sigma\})}$$

原画像のピクセル列
の推定値

ベイズの公式

尤度は劣化過程の確率モデル

2元対称通信路であることが既知ならば

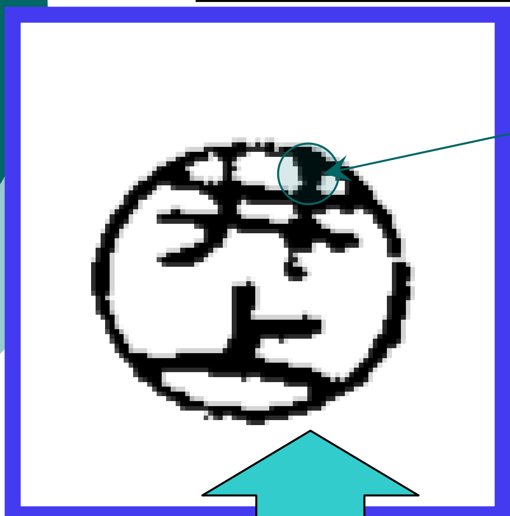
未知な変数を含む

$$P(\{\tau\}|\{\sigma\}) = \prod_i \frac{\exp(h\,\tau_i\sigma_i)}{2\cosh(h)}$$

事前分布の選び方は全く任意である

画像データの特徴を生かして
適切に選択する必要がある

画像データの事前分布と事後確率

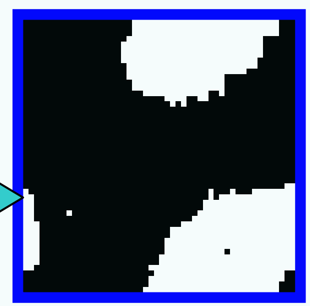


強磁性体
の確率モデル

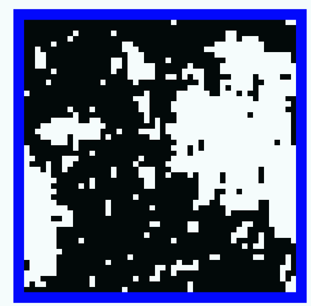
$$P\left(\{\sigma\}\right)=\frac{\exp\left(J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j\right)}{\sum_{\sigma}\exp\left(J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j\right)}$$

スナップショット

T=1/J=1.15



T=1/J=2.15



T=1/J=3.15

※ どの温度のスナップショット
の張り合わせで表現するか？
⇒　どのように J を決めるか？
（この方法は後に説明する）

ベイズの公式から求まる事後確率

$$P\left(\{\sigma\}\mid\{\tau\}\right)=\frac{\exp(-H_{\mathrm{eff}})}{\sum_{\{\sigma\}}\exp\left(-H_{\mathrm{eff}}\right)},\quad H_{\mathrm{eff}}=-J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j-h\sum_i\tau_i\sigma_i$$

画像復元問題のエネルギー関数

ノイズを利用したアルゴリズム

前回の復習

$$E = -Js_1 s_2 - h_1 s_1 - h_2 s_2$$

ノイズを利用したアルゴリズム

(1) 各時刻で任意に s_1, s_2 の1つを選び、その符号を変える。

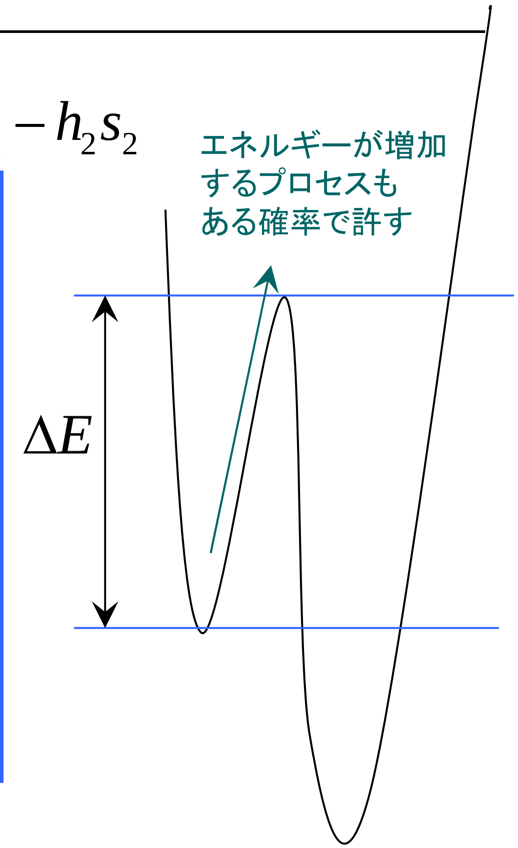
この前後の状態を $\vec{s}, \vec{s}'$ と書く。

(2) (1)の前後でのエネルギー差：$\Delta E = E(\vec{s}') - E(\vec{s})$ を計算し、

$\Delta E < 0$ ならば新しい状態を採用

$\Delta E > 0$ でも確率 $e^{-\Delta E/T}$ で新しい状態を採用

(3) (1)(2)を繰り返す



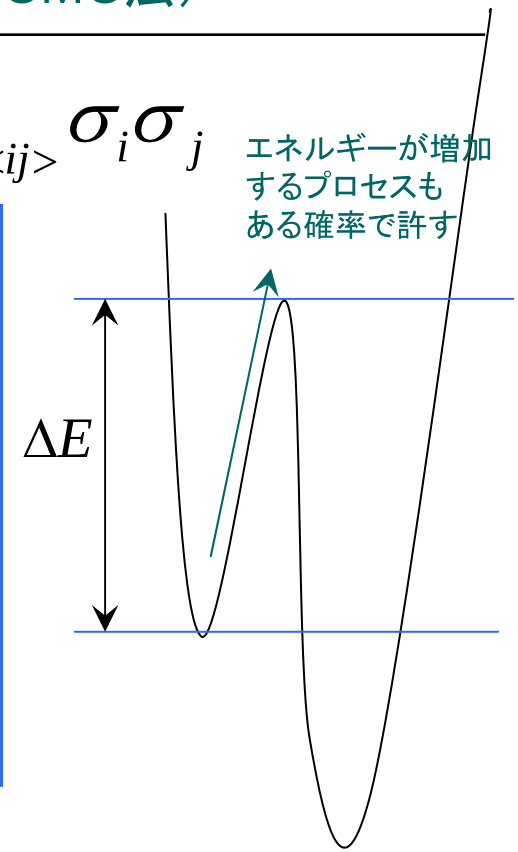
$P(s_1, s_2)$ の時間発展を調べてみる

⇒ 定常状態が存在するか？存在するならどのような分布か？

スナップショットの作り方

マルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC法）

$$E = -J\sum_{<ij>} \sigma_i \sigma_j$$



ノイズを利用したアルゴリズムの多変数版

（1） 各時刻で任意に σ_i を1つを選び、その符号を変える。

この前後の状態を $\vec{\sigma}, \vec{\sigma}'$ と書く。

（2） (1)の前後でのエネルギー差 $\Delta E = E(\vec{\sigma}') - E(\vec{\sigma})$ を計算し、

$\Delta E < 0$ 　ならば新しい状態を採用

$\Delta E > 0$ 　でも確率 $e^{-\Delta E/T}$ で新しい状態を採用

(3) (1)(2)を繰り返す

$P(\{\sigma\})$ の時間発展を調べてみる

平衡状態では

$$P(\{\sigma\}) = \frac{\exp\left(J\sum_{<ij>} \sigma_i \sigma_j\right)}{\sum_{\sigma} \exp\left(J\sum_{<ij>} \sigma_i \sigma_j\right)}$$

1/J=1.15

最大事後確率推定

事後確率

エネルギー関数

$$P(\{\sigma\}|\{\tau\}) = \frac{\exp(-H_{\mathrm{eff}})}{\sum_{\{\sigma\}}\exp(-H_{\mathrm{eff}})}, \quad H_{\mathrm{eff}} = -J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j - h\sum_i \tau_i\sigma_i$$

事後確率最大 $\Longleftrightarrow$

エネルギー関数最小
⇒ シミュレーテッド・アニーリングで最適化

画像復元が最適化問題として定式化される

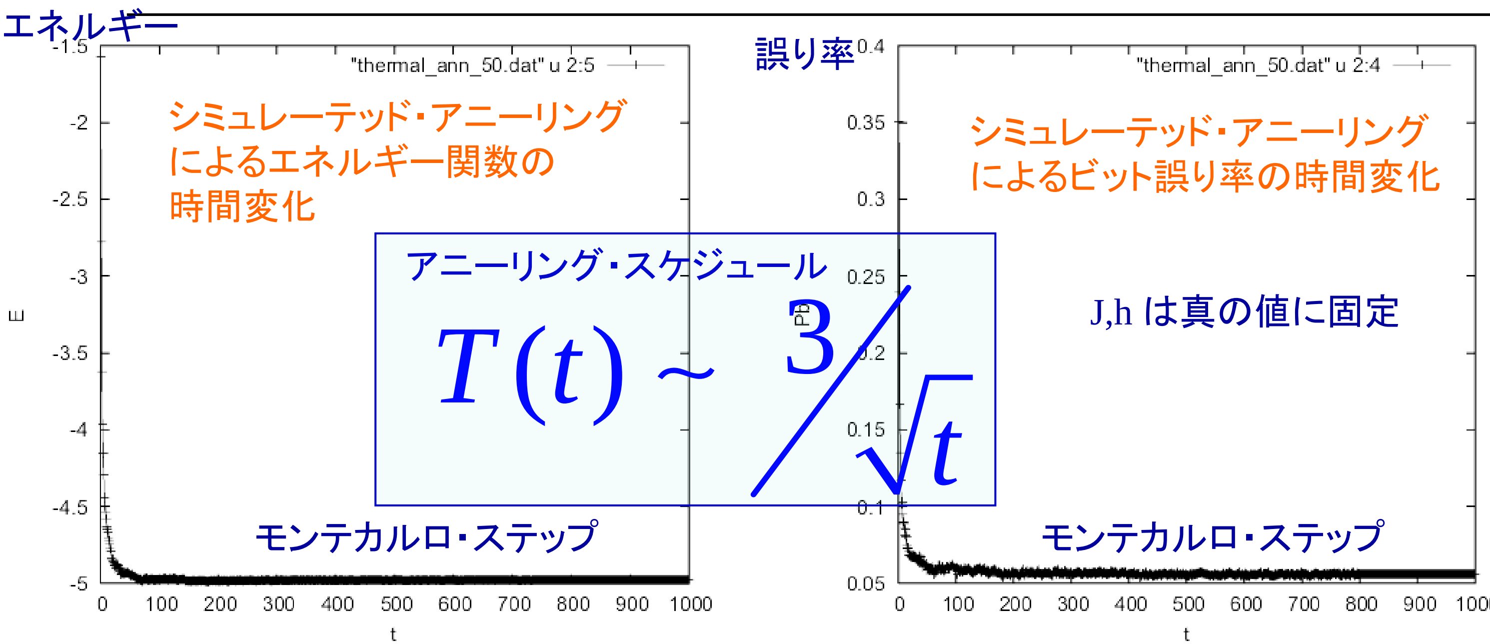
このパラメータTを温度としたアニーリング

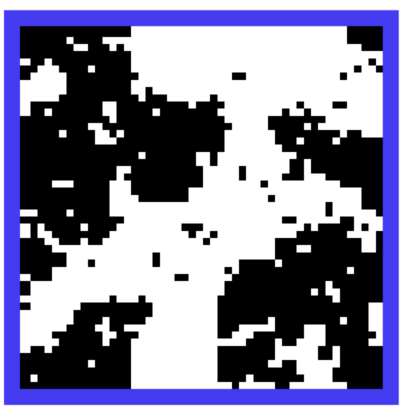
劣化画像データは与えられている

$$P(\{\sigma\}) = \frac{\exp\left(T^{-1}\left\{J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j + h\sum_i \tau_i\sigma_i\right\}\right)}{\sum_\sigma \exp\left(T^{-1}\left\{J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j + h\sum_i \tau_i\sigma_i\right\}\right)}$$

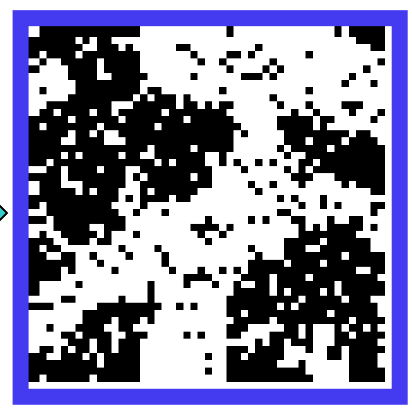
※ J および h の決め方は次回。今回は既知とする

アニーリング法による画像復元の実例

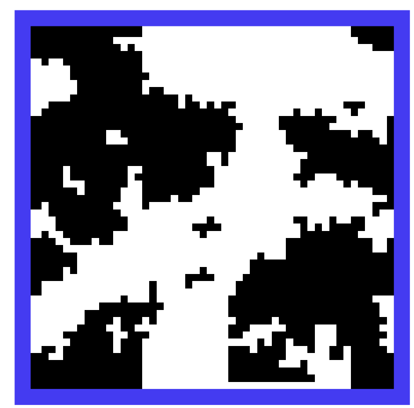




原画像



劣化画像

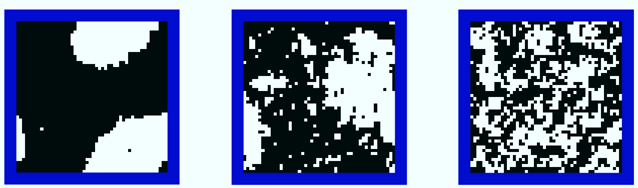


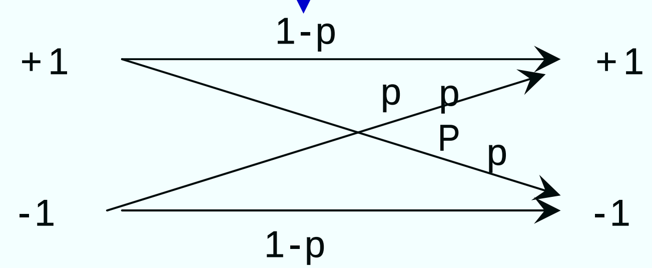
復元画像

確率モデルのパラメータ推定

事後確率は次のように書けるが・・・

$$P(\{\sigma\}) = \frac{\exp\left(T^{-1}\left\{\boxed{J}\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j + \boxed{h}\sum_i \tau_i\sigma_i\right\}\right)}{\sum_\sigma \exp\left(T^{-1}\left\{\boxed{J}\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j + \boxed{h}\sum_i \tau_i\sigma_i\right\}\right)}$$





どの J で指定されるスナップショット
の張り合わせで画像を表現するのか

未知

この決め方は
次回説明する

劣化率 h がどのくらいなのか

未知

用いることのできるのは劣化画像についての情報のみ