



# 混沌系工学特論 #3

---

情報科学研究科 井上純一

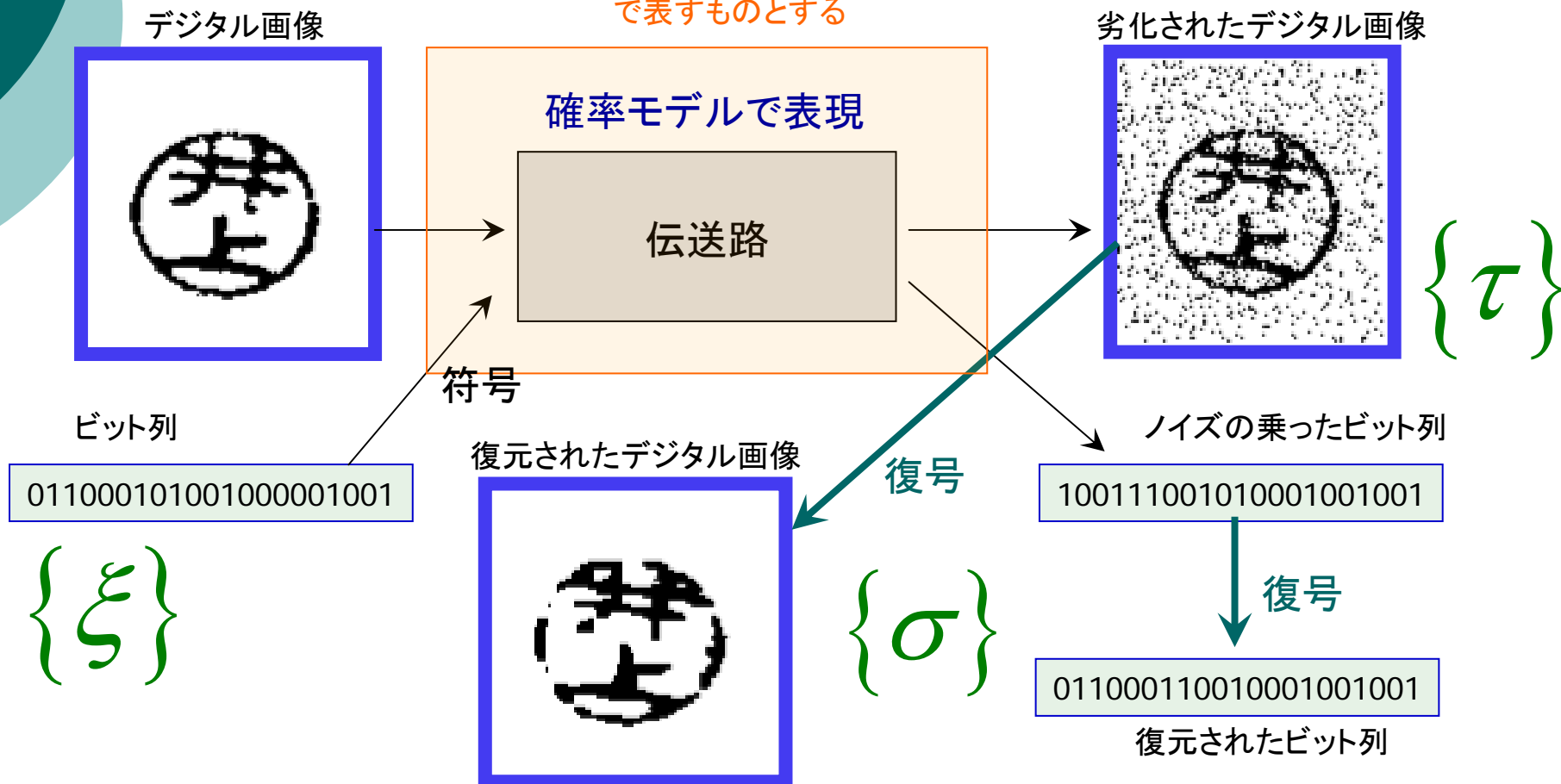
URL : [http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

平成17年10月31日 第3回講義

# デジタルデータの転送と復元

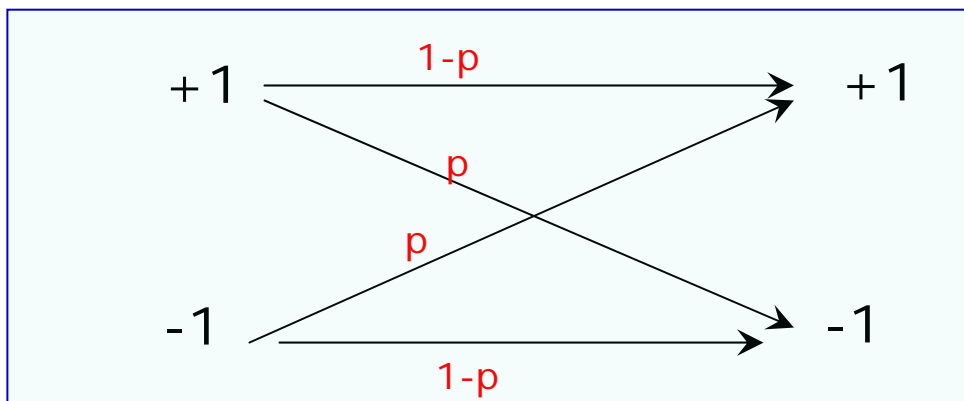
## 前回の復習

※ 古文書/文献の復元等では  
時間経過による劣化を伝送路  
で表すものとする



# 劣化過程の確率モデル化

前回の復習



2元対称通信路のグラフ表現

条件つき確率表現

$$P(\{\tau\} | \{\xi\}) = P(\underbrace{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N}_{\text{劣化されたピクセル列}} | \underbrace{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N}_{\text{原画像のピクセル列}})$$

2元対称通信路の  
条件つき確率表現

各ピクセルの劣化過程が独立ならば

$$P(\{\tau\} | \{\xi\}) = \prod_i \frac{\exp(\beta_\tau \tau_i \xi_i)}{2 \cosh(\beta_\tau)}$$

劣化過程の確率モデル

$$\begin{aligned} P(\tau_i = \xi_i | \xi_i) &= e^{\beta_\tau} / 2 \cosh(\beta_\tau) = 1 - p \\ P(\tau_i = -\xi_i | \xi_i) &= e^{-\beta_\tau} / 2 \cosh(\beta_\tau) = p \\ \beta_\tau &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1-p}{p} \right) \end{aligned}$$

# ベイズの公式と事後確率

前回の復習

事後確率分布

尤度(ゆうど)

事前確率分布

$$P(\{\sigma\} | \{\tau\}) = \frac{P(\{\tau\} | \{\sigma\}) P(\{\sigma\})}{\sum_{\{\sigma\}} P(\{\tau\} | \{\sigma\}) P(\{\sigma\})}$$

原画像のピクセル列の推定値

ベイズの公式

尤度は劣化過程の確率モデル

2元対称通信路であることが既知ならば

$$P(\{\tau\} | \{\sigma\}) = \prod_i \frac{\exp(h \tau_i \sigma_i)}{2 \cosh(h)}$$

未知な変数を含む

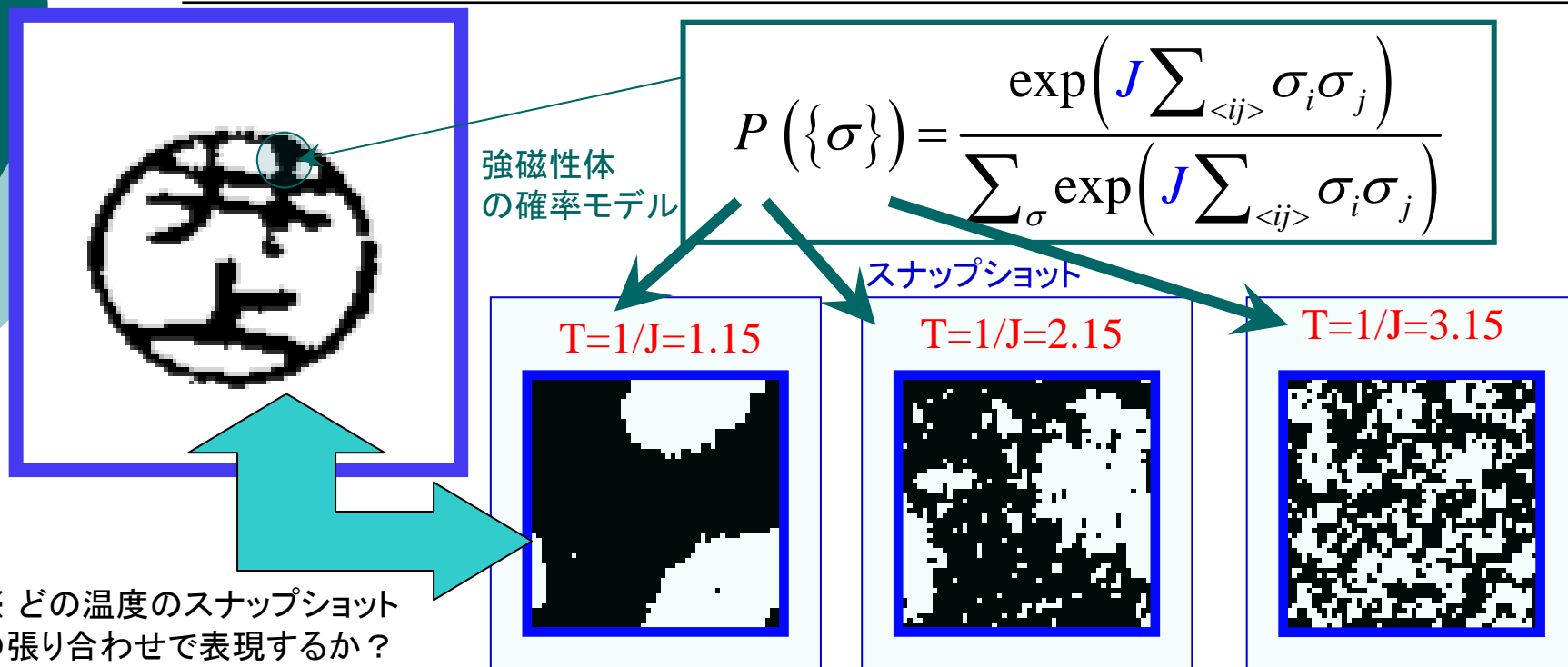
事前分布の選び方は全く任意である



画像データの特徴を生かして適切に選択する必要がある

# 画像データの事前分布と事後確率

前回の復習



※ どの温度のスナップショットの張り合わせで表現するか？  
⇒ どのように  $J$  を決めるか？  
(この方法は後に説明する)

ベイズの公式から求まる事後確率

$$P(\{\sigma\} | \{\tau\}) = \frac{\exp(-H_{\text{eff}})}{\sum_{\{\sigma\}} \exp(-H_{\text{eff}})}, \quad H_{\text{eff}} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \tau_i \sigma_i$$

画像復元問題のエネルギー関数

# スナップショットの作り方

マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC法) 前回の復習

$$E = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

ノイズを利用したアルゴリズムの多変数版

(1) 各時刻で任意に  $\sigma_i$  を1つを選び、その符号を変える。

この前後の状態を  $\vec{\sigma}, \vec{\sigma}'$  と書く。

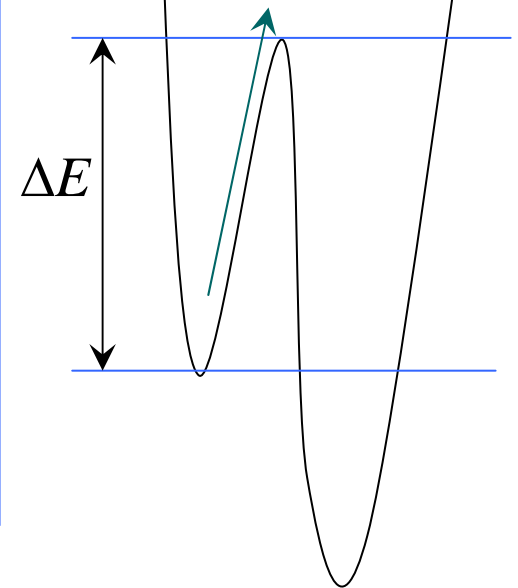
(2) (1)の前後でのエネルギー差  $\Delta E = E(\vec{\sigma}') - E(\vec{\sigma})$  を計算し、

$\Delta E < 0$  ならば新しい状態を採用

$\Delta E > 0$  でも確率  $e^{-\Delta E/T}$  で新しい状態を採用

(3) (1)(2)を繰り返す

エネルギーが増加するプロセスもある確率で許す

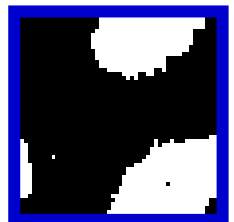


$P(\{\sigma\})$  の時間発展を調べてみる

平衡状態では

$$P(\{\sigma\}) = \frac{\exp\left(J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j\right)}{\sum_{\sigma} \exp\left(J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j\right)}$$

1/J=1.15



# 最大事後確率推定

## 前回の復習

事後確率

$$P(\{\sigma\} | \{\tau\}) = \frac{\exp(-H_{\text{eff}})}{\sum_{\{\sigma\}} \exp(-H_{\text{eff}})},$$

エネルギー関数

$$H_{\text{eff}} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \tau_i \sigma_i$$

事後確率最大



エネルギー関数最小  
⇒ シミュレーテッド・アニーリングで最適化

画像復元が最適化問題として定式化される

このパラメータ $T$ を温度としたアニーリング

劣化画像データは与えられている

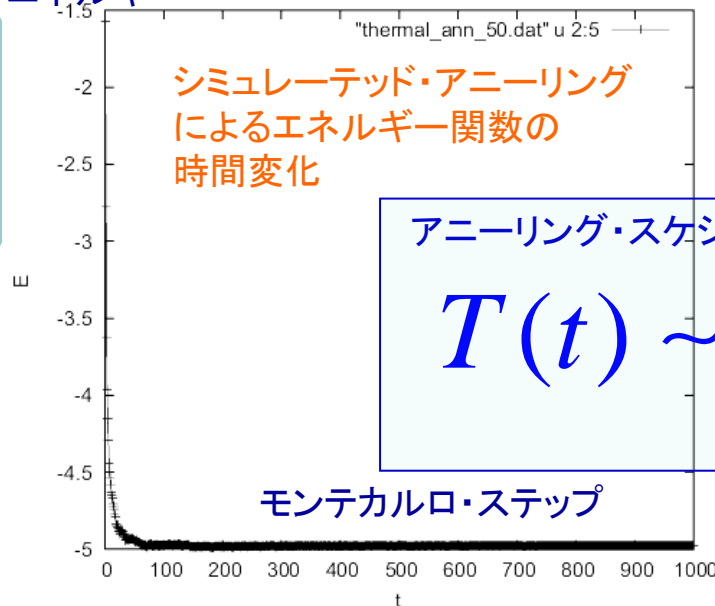
$$P(\{\sigma\}) = \frac{\exp\left(T^{-1} \left\{ J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \tau_i \sigma_i \right\}\right)}{\sum_{\sigma} \exp\left(T^{-1} \left\{ J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \tau_i \sigma_i \right\}\right)}$$

※  $J$  および  $h$  の決め方は次回。今回は既知とする

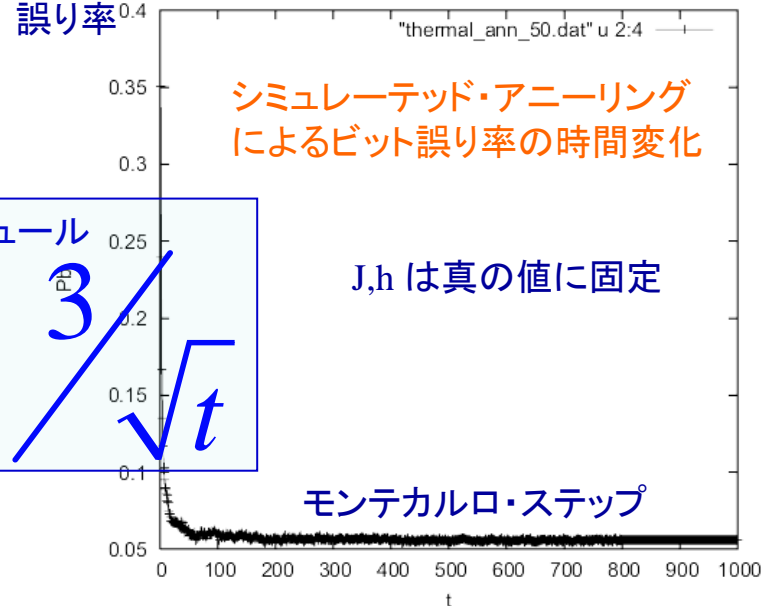
# アニーリング法による画像復元の実例

前回の復習

エネルギー



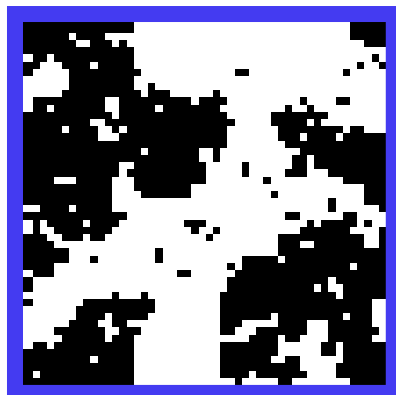
誤り率



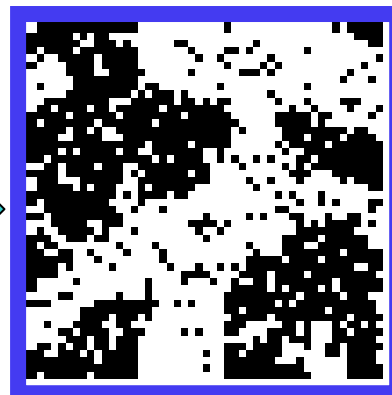
アニーリング・スケジュール

$$T(t) \sim \frac{3}{\sqrt{t}}$$

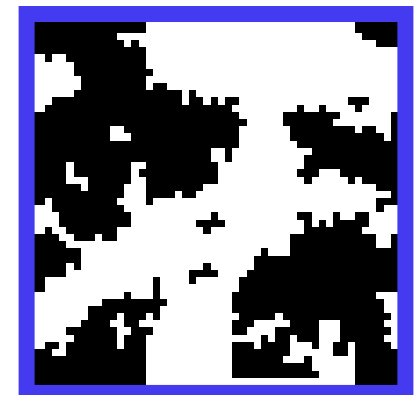
J, h は真の値に固定



原画像



劣化画像



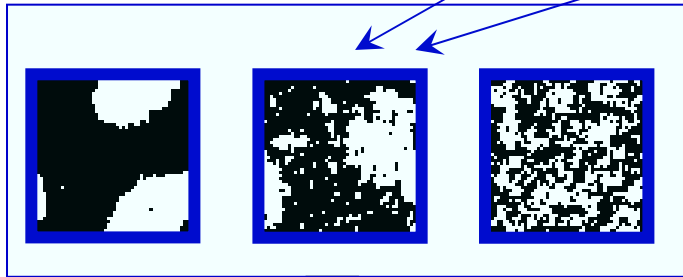
復元画像



# 確率モデルのパラメータ推定

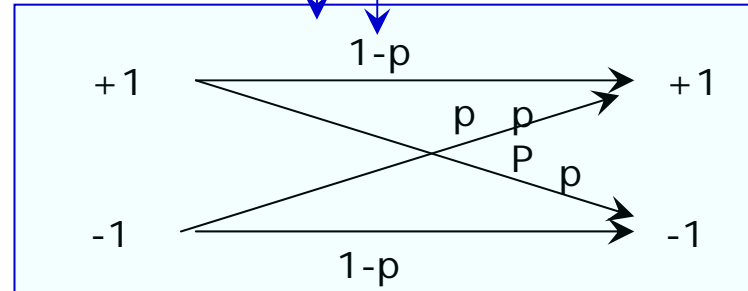
事後確率は次のように書けるが...

$$P(\{\sigma\}) = \frac{\exp\left(T^{-1} \left\{ J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \tau_i \sigma_i \right\}\right)}{\sum_{\sigma} \exp\left(T^{-1} \left\{ J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \tau_i \sigma_i \right\}\right)}$$



どの  $J$  で指定されるスナップショットの張り合わせで画像を表現するのか

**未知**



この決め方を  
今回説明する

劣化率  $h$  がどのくらいなのか

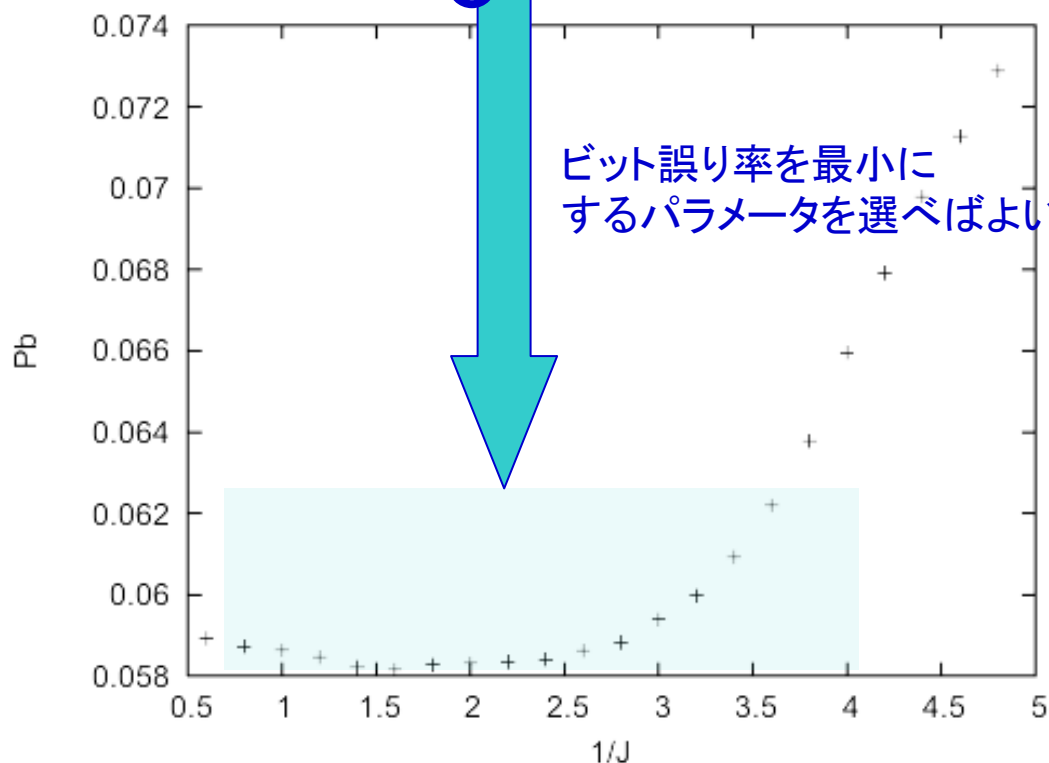
**未知**

用いることのできるのは劣化画像についての情報のみ

# ハイパーパラメータの推定

ビット誤り率

$$P_b(J, h) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{N} \sum_i \xi_i \hat{\xi}_i \right]$$



この「エネルギー関数」を使うには、原画像についての情報が必要

観測データのみを含むコスト関数を選ぶべきである

# 周辺尤度最大化

周辺尤度

$$\begin{aligned} L(J, h; \{\tau\}) &= \log \text{tr}_{\{\sigma\}} P_h(\{\tau\} | \{\sigma\}) P_J(\{\sigma\}) \\ &= \log \text{tr}_{\{\sigma\}} e^{J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \tau_i \sigma_i} \\ &\quad + \log \text{tr}_{\{\sigma\}} e^{J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j} - \log 2 \cosh(h) \end{aligned}$$

観測データ

一般的にKL情報量の非負性より

$$\left[ L(J_*, h_*; \{\tau\}) \right]_{\{\tau\}} \geq \left[ L(J, h; \{\tau\}) \right]_{\{\tau\}}$$

真のパラメータ値で最大

周辺尤度をコスト関数とみなしてパラメータに関して最大化すればよい

# EM法による周辺尤度の最大化

周辺尤度を最大化する代わりに、次の尤度関数の事後確率での期待値を最大化

$$Q(J, h | J_t, h_t) = \underbrace{\text{tr}_{\{\sigma\}} P_{J_t, h_t}(\{\sigma\} | \{\tau\})}_{\text{事後確率}} \log \underbrace{P_h(\{\tau\} | \{\sigma\}) P_J(\{\sigma\})}_{\text{尤度関数}}$$

EMアルゴリズム

$$J_{t+1} = \arg \max_J Q(J, h | J_t, h_t)$$

$$h_{t+1} = \arg \max_h Q(J, h | J_t, h_t)$$

Eステップ(期待値計算)  
とMステップ(最大化)  
の繰り返しで構成される

一方の変数hが既知の場合

$$u_m(J_{t+1}) = \frac{\text{tr}_{\{\sigma\}} \varepsilon_B e^{J_{t+1} \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j}}{\text{tr}_{\{\sigma\}} e^{J_{t+1} \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j}} = \frac{\text{tr}_{\{\sigma\}} \varepsilon_B e^{J_t \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h_* \sum_i \tau_i \sigma_i}}{\text{tr}_{\{\sigma\}} e^{J_t \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h_* \sum_i \tau_i \sigma_i}} = u_p(J_t, h_*)$$

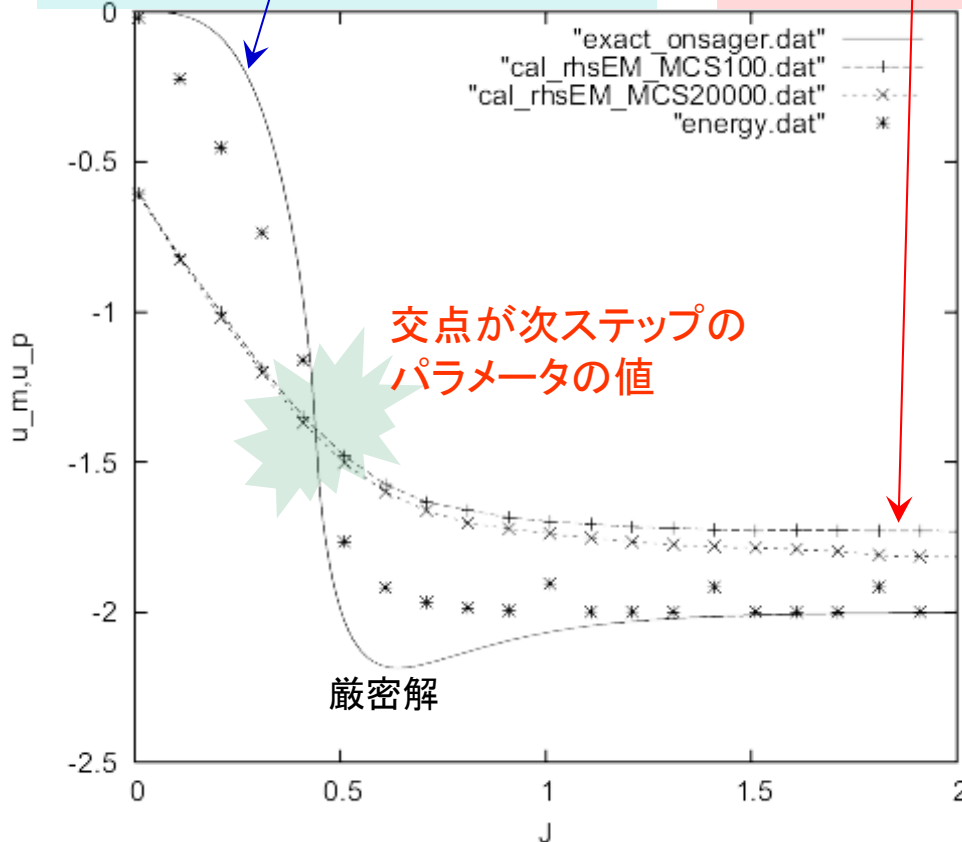
厳密解ないので  
MCMC法で計算

厳密解あり

$$\varepsilon_B = -(1/2N) \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

# EM法における期待値と最大化

$$u_m(J_{t+1}) = \frac{\text{tr}_{\{\sigma\}} \varepsilon_B e^{J_{t+1} \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j}}{\text{tr}_{\{\sigma\}} e^{J_{t+1} \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j}} = \frac{\text{tr}_{\{\sigma\}} \varepsilon_B e^{J_t \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h_* \sum_i \tau_i \sigma_i}}{\text{tr}_{\{\sigma\}} e^{J_t \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h_* \sum_i \tau_i \sigma_i}} = u_p(J_t, h_*)$$



厳密解がないので  
MCMC法で計算

⇒モンテカルロステップ  
に注意(緩和の問題)

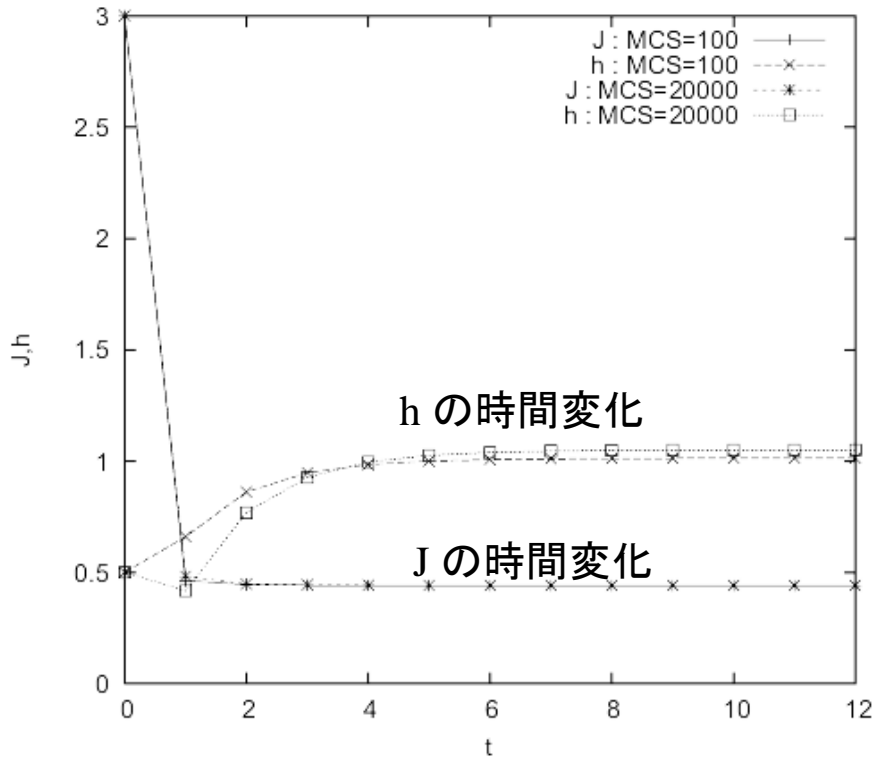
具体的に原画像 :

- ☆ 磁石モデルのスナップショット
- ☆ 「井上」の印鑑画像

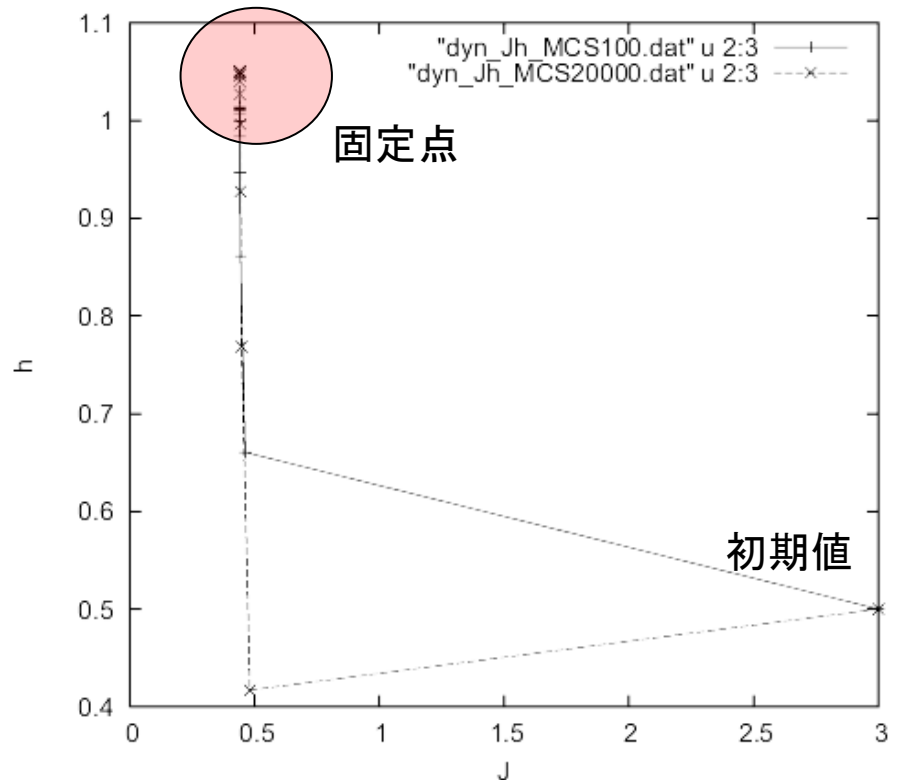
に関する適用例を見て行く

# 実行結果

(原画像: イジングモデル)



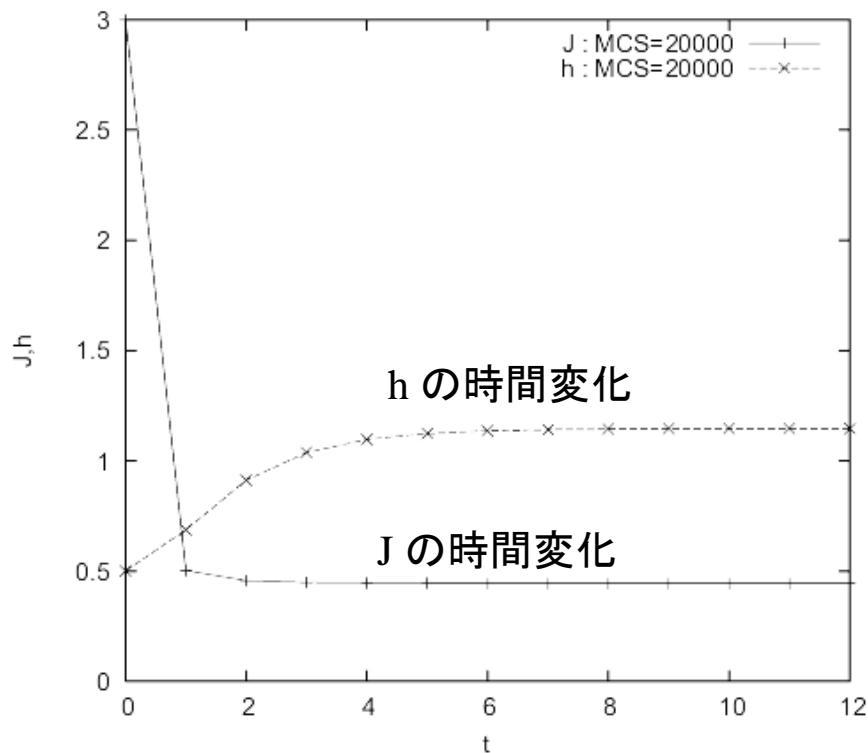
ハイパーパラメータの時間発展



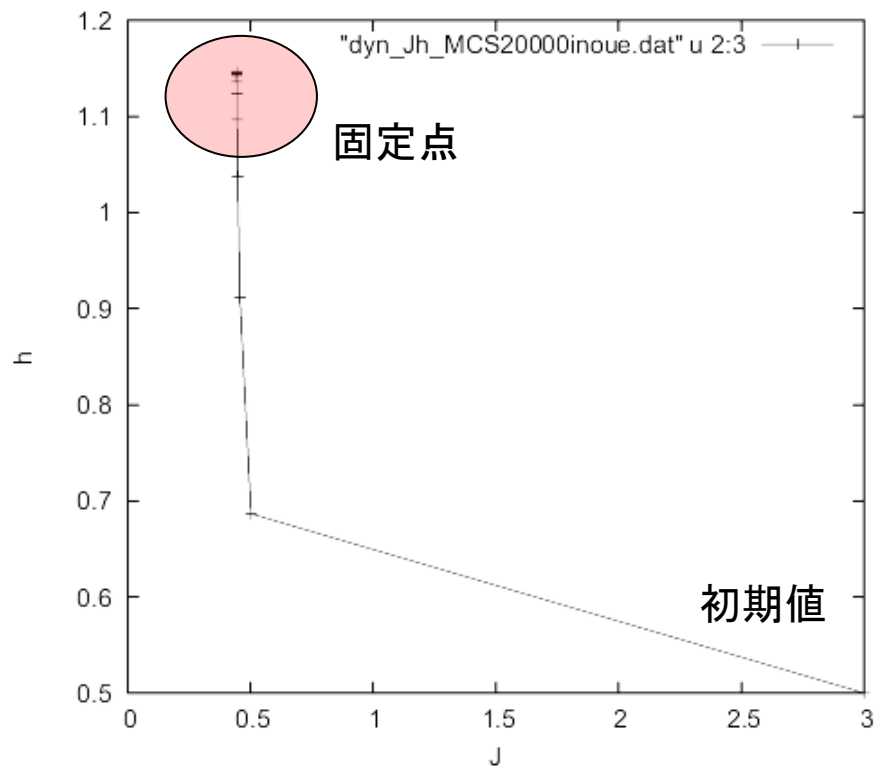
相空間での軌道

# 実行結果

(原画像:「井上」の印鑑画像)



ハイパーパラメータの時間発展



相空間での軌道

# 熱揺らぎを用いた画像の復元

周辺分布  $P(\sigma_i | \tau)$  による各画素ごとの期待値

MPM推定値

画素  $j$  の推定値

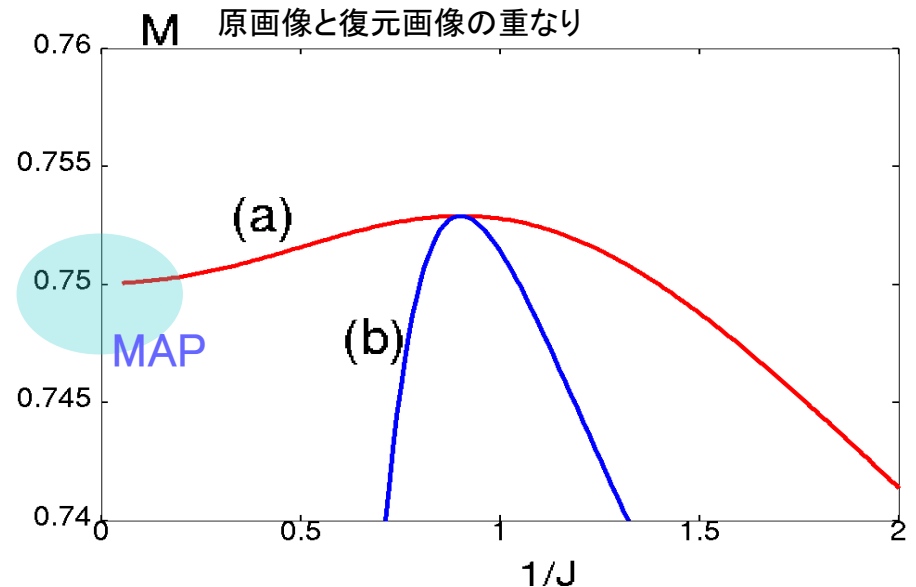
$$\hat{\xi}_i = \text{sgn}(\langle \sigma_i \rangle) = \text{sgn}\left[\sum_{\sigma_i = \pm 1} \sigma_i P(\sigma_i | \tau)\right]$$

統計力学的な観点からは、エネルギー関数  $H$  で記述される磁性体の局所磁化

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{\sum_{\sigma} \sigma_i \exp[-H(\sigma | \tau)]}{Z} = m_i$$

各画素の期待値

⇒ ノイズレベルが大きい場合  
MAP推定より高精度で復元できる





# 新聞など画像の印刷



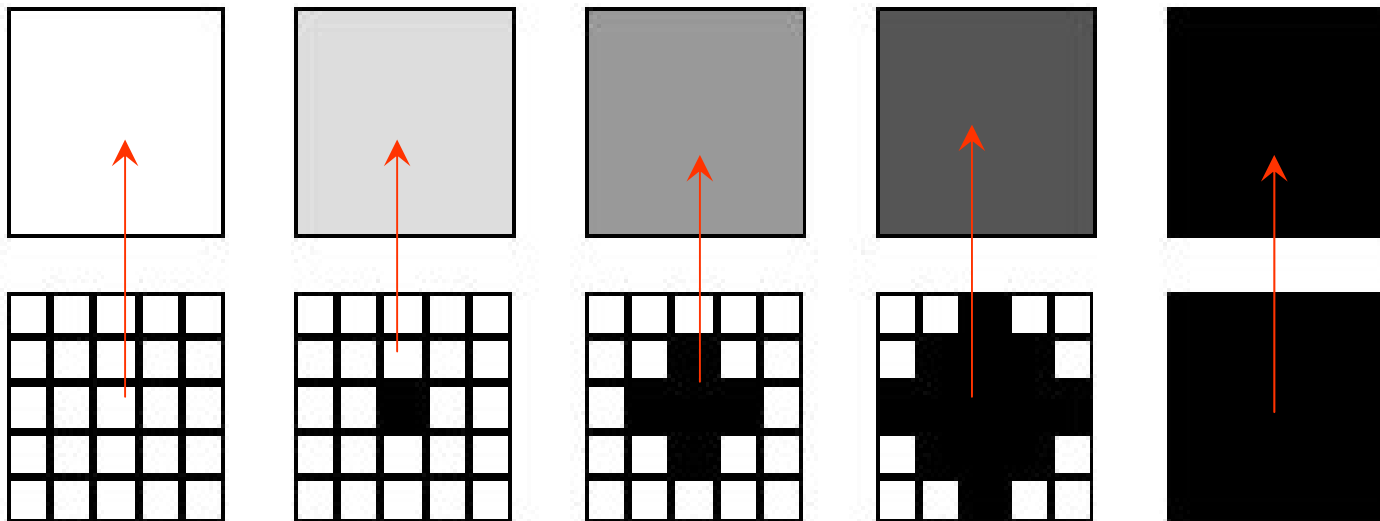
微視的にみると新聞の印刷は白と黒の2値化画像となっている。

白と黒だけでどのように「濃淡」を実現しているのでしょうか？

# 画像印刷技術：ハーフトーン処理

**ハーフトーン処理**：1画素をさらに細かなセルに分割し、このセルを白と黒で塗り分けたときに、**黒で塗りつぶされた数で元の濃淡画素の階調値を表現する**

濃淡画像



ハーフトーン  
画像

どのように黒を分布させれば良いの？

(<http://www.nime.ac.jp/~inaba/LR/IP/3-5.html> より)

このハーフトーン処理を統計力学を用いて定式化、性能評価できないものか？

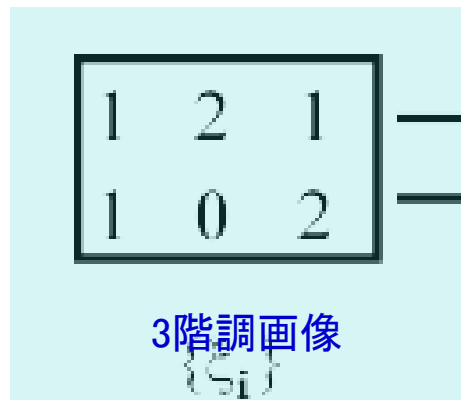
⇒ ハーフトーン処理のある側面に着目して問題設定を行う

# 閾値を用いたセル分割

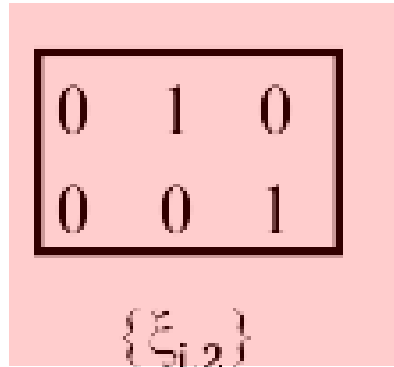
Q 階調の濃淡画像を次のように、(Q-1) 枚の白黒画像に分割する

$$\Theta(\xi_i - k) = \xi_{i,k} \begin{cases} 1(\xi_i \geq k) \\ 0(\xi_i < k) \end{cases} \quad \xi_i = \xi_{i,1} + \xi_{i,2} + \dots + \xi_{i,Q-1} = \sum_{k=1}^{Q-1} \xi_{i,k}$$

3値濃淡画像の分解例

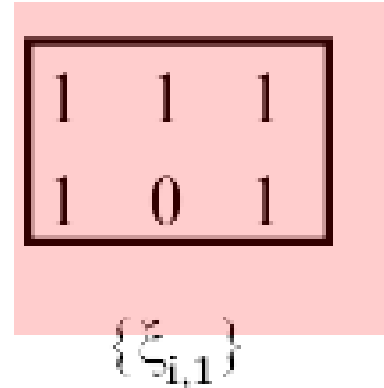


$$\Theta(\xi_i - 2)$$



2階調  
画像2枚

$$\Theta(\xi_i - 1)$$



# 標準画像(レナ)での2値分解例



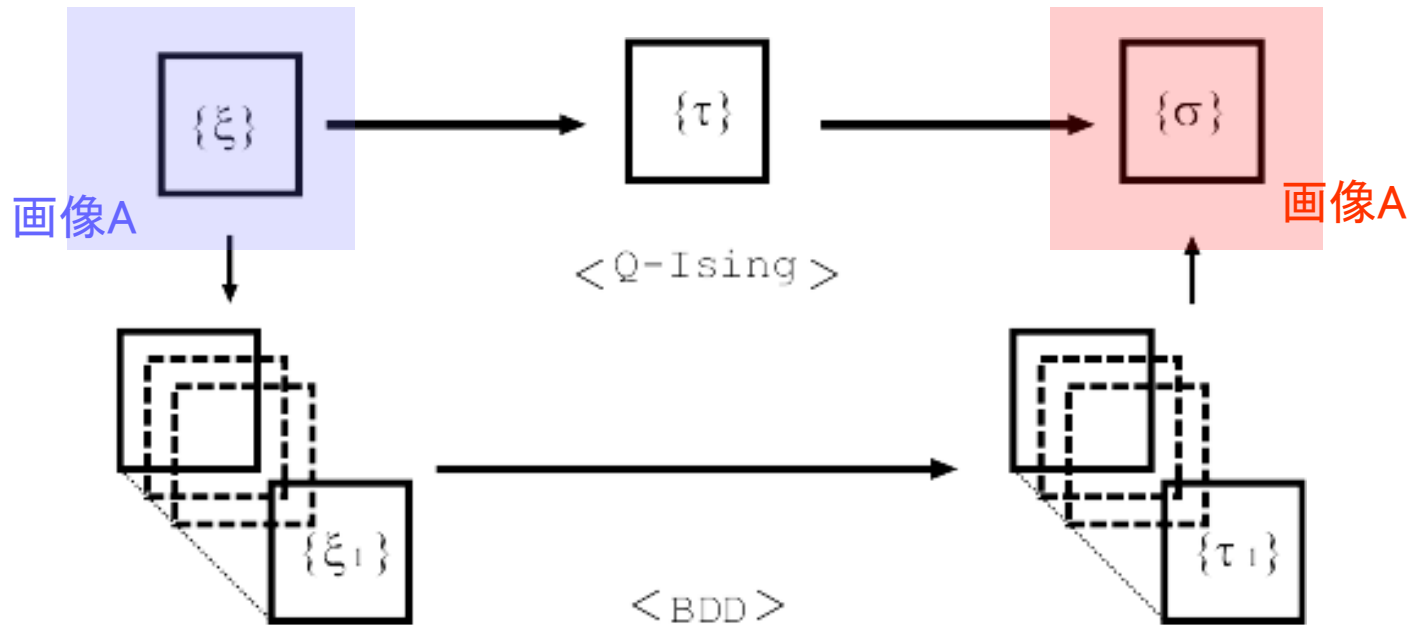
8階調濃淡画像

各ピクセル毎の1の値の数で濃淡値を表現  
⇒ ハーフトーン処理になっている



7枚の2値化画像

# 性能評価のための問題設定



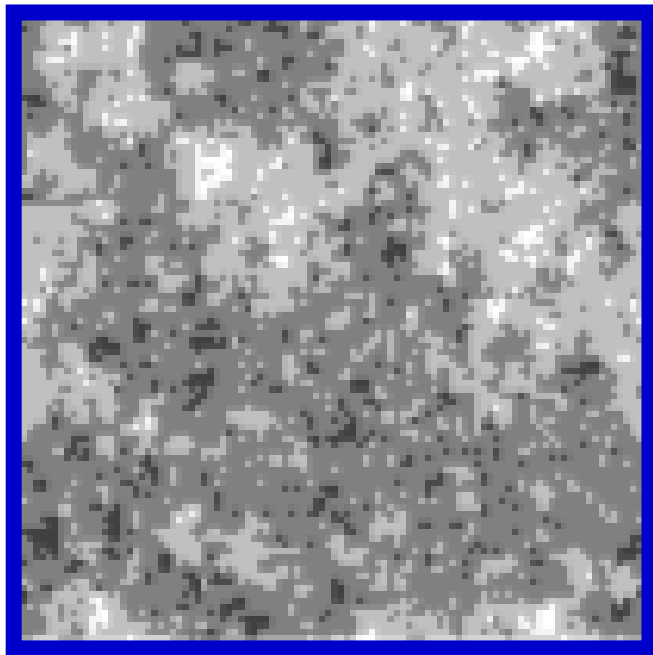
印刷したい Q値濃淡画像 A ⇒ ハーフトーン処理 ⇒ 劣化 ⇒ 画像修復  
& 逆ハーフトーン処理 ⇒ Q値濃淡画像 B

画像Aと画像Bを比較することで、ハーフトーン処理を施した  
画像に対するインクのにじみ(ノイズ)等による劣化の耐性を評価する

# Q状態イジングモデル

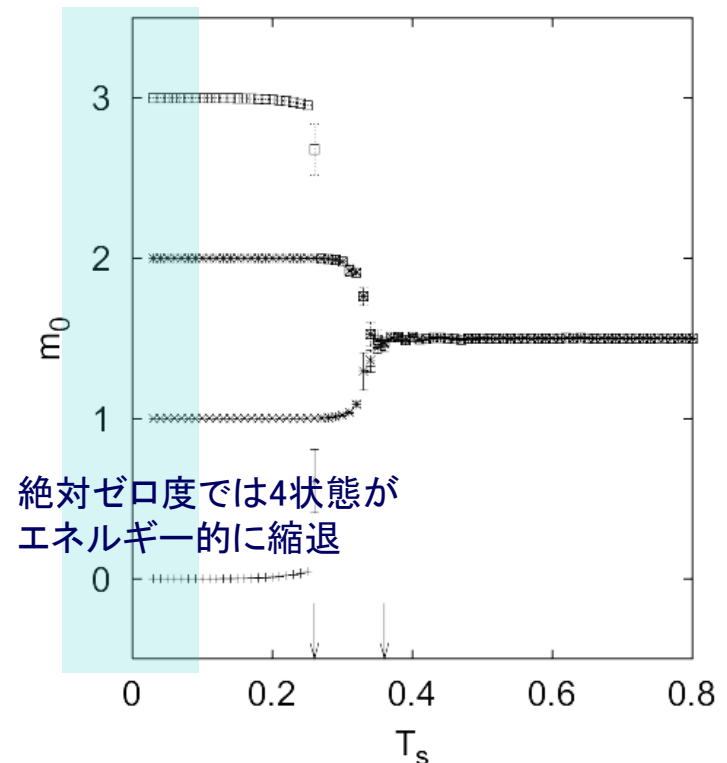
## 濃淡画像の確率モデル

$$P(\xi) = \exp[-(\beta_s / 2N) \sum_{ij} (\xi_i - \xi_j)^2] / Z_s$$



Q=4、T=0.35 におけるMCMCのスナッシュョット

磁化の温度依存性  
(MCMCシミュレーションによる)



# 劣化過程の確率モデル

ハーフトーン処理済み画像の劣化(各ハーフトーン・スライスk毎に)

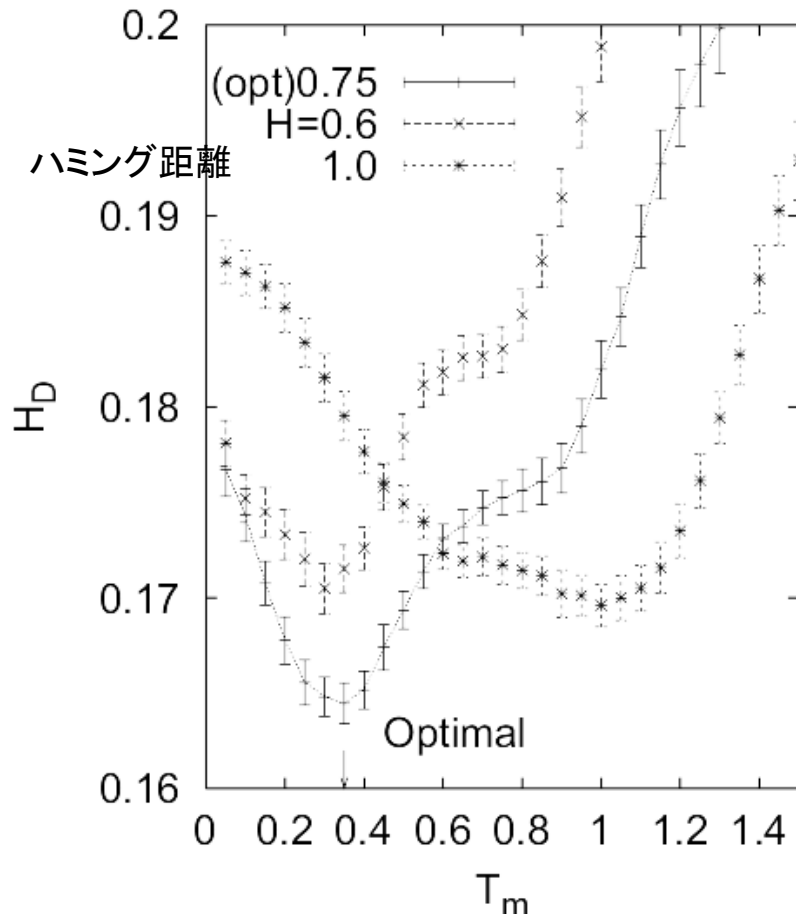
$$P_k(\{\tau_{i,k}\}|\{\xi_{i,k}\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left[-\frac{\sum_i (\tau_{i,k} - \tau_0 \xi_{i,k})^2}{2\tau^2}\right]$$

ハーフトーン未処理画像の劣化

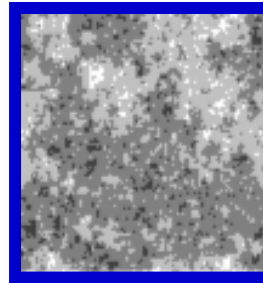
$$P(\{\tau_i\}|\{\xi_i\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left[-\frac{\sum_i (\tau_i - \xi_i)^2}{2\tau^2}\right]$$

熱揺らぎを用いた画像復元を行い、得られる画像と原画像の2乗誤差を基準としてその性能を評価する

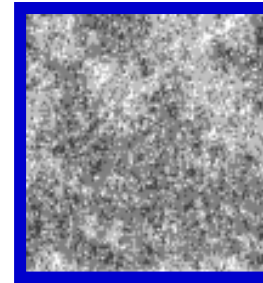
# MCMCシミュレーション(Q=4)



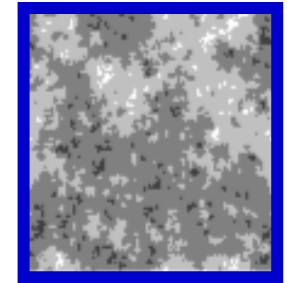
システムサイズ100x100 約15000モンテカルロステップ



原画像



劣化画像



復元画像

エネルギー関数

$$H_{eff} = -h \sum_{i,k} (\sigma_{i,k} - \tau_{i,k})^2 - (\beta_m / 2N) \sum_{ij} (\sigma_i - \sigma_j)^2$$

真のモデルパラメータの値で最良



# 平均場アニーリング法

(詳細は講義ノート#2 pp.26-27を参照)

局所磁化に関する反復式を解く

画素数オーダの計算量

$$m_{ij}^{t+1} = \frac{\sum_{\sigma} \sigma_{ij} \exp(H_{MF}^t / T)}{Z_{MF}}$$

$$H_{MF}^t = \frac{\beta_m}{2} (m_{i,j+1}^t + m_{i,j-1}^t + m_{i+1,j}^t + m_{i-1,j}^t) - \beta_m \sigma_{ij}^2 - h \sum_k (\sigma_{ij,(k)})^2 + 2h \sum_k \tau_{ij,(k)} \sigma_{ij,(k)}$$

$$\varepsilon^{(t)} = \frac{1}{N} \sum_{(ij)}^N |m_{ij}^{(t+1)} - m_{ij}^{(t)}| < 10^{-8}$$

← 各ステップでこの条件を満たしたら状態更新

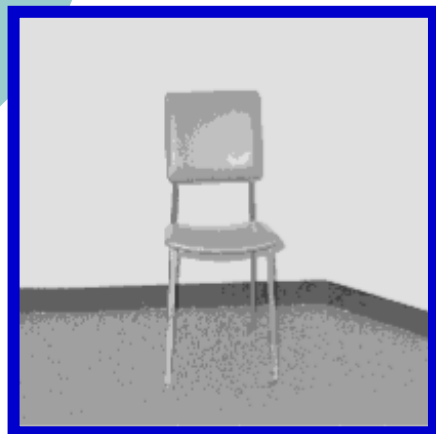
$$T = T - \Delta T, T_{\text{int}} = 2, \Delta T = 0.01$$

← 温度の制御

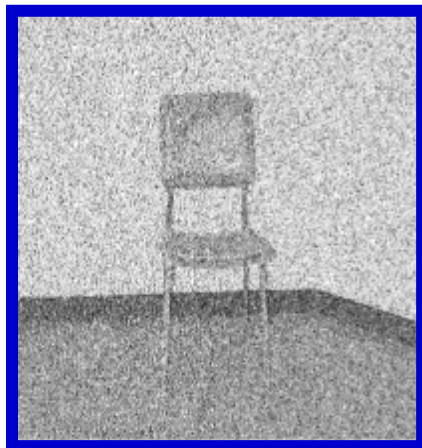
温度をゼロまで落とせばMAP解が得られる

# 平均場アニーリング法

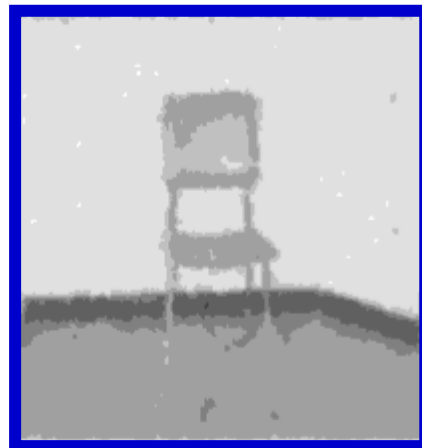
標準画像 (chair)



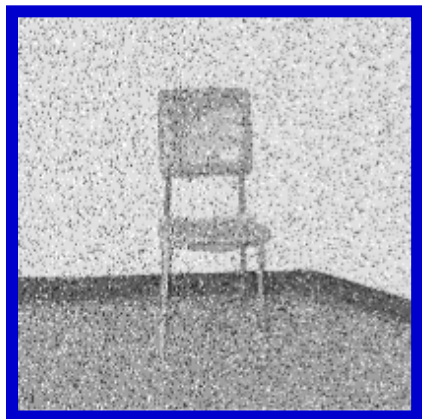
原画像



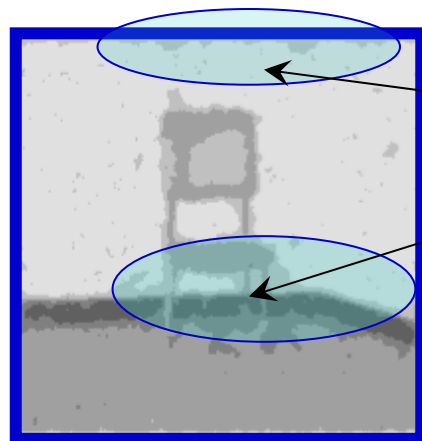
BDD 劣化



BDD 復元



Q-Ising 劣化



「しみ」が  
クラスタとして  
残る

Q-Ising 復元

# 平均場アニーリング法

標準画像 (house)



原画像



BDD 劣化



BDD 復元



Q-Ising 劣化



Q-Ising 復元

# 画像の種類による性能比較

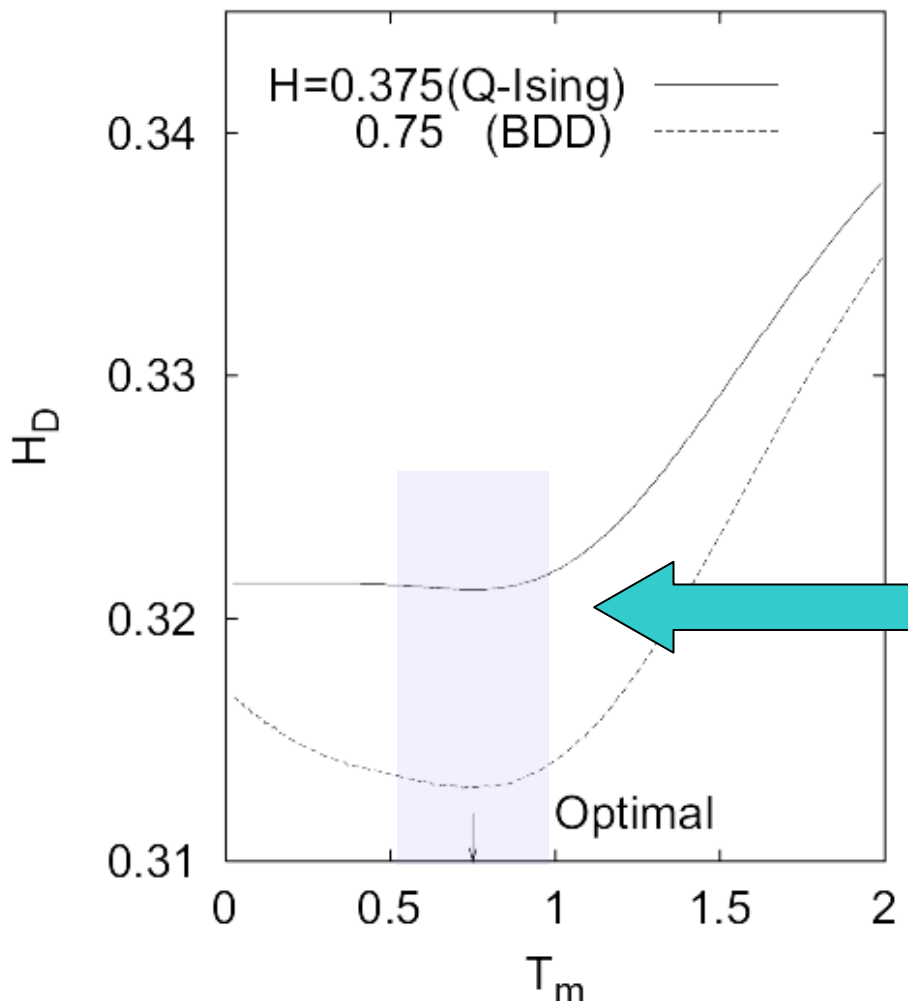
※ より現実的な状況設定での解析は  
和歌山工業高等専門学校 雑賀洋平先生と共同研究を実施中

Original Image	$H_D^{\text{opt.}}$	NNP1-O	NNP1-D	NNP1-R
chair(BDD)	0.10467500	0.827925	0.023925	0.870800
chair(Q-Ising)	0.13967500	0.827925	0.127746	0.849700
girl(BDD)	0.22960000	0.552725	0.019000	0.636575
girl(Q-Ising)	0.26657500	0.552725	0.092100	0.452850
house(BDD)	0.38037500	0.538375	0.018000	0.374400
house(Q-Ising)	0.36840000	0.538375	0.079225	0.469675
lena(BDD)	0.35317500	0.450500	0.016575	0.467425
lena(Q-Ising)	0.34800000	0.450500	0.056086	0.449450
mant(BDD)	0.64400000	0.147900	0.008950	0.136975
mant(Q-Ising)	0.55120000	0.147900	0.021750	0.111100

NNP1とは最隣接する画素が同じ画素値をとるものの全画像に占める割合でありO(原画像)、D(劣化画像)、R(修復画像)である

# 解析的性能評価

(この手の解析評価の詳細は次回)



両者でフェアな比較を行うため、  
原画像と劣化画像間の2乗誤差が  
Q-Ising, BDD(逆ハーフトーン)で  
同じになるようにノイズをかけてある

ハーフトーン処理画像の劣化からの  
濃淡画像修復 (BDD)

最良値どうしを比較するとBDDの方が  
高い性能を示す

劣化への耐性という観点からは  
ハーフトーン処理は好ましい