混沌系工学特論 講義ノート #1

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL：http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成 19 年 12 月 17 日

目 次

1 ゲーム理論 **2**

1.1 ゲーム理論の情報統計力学 3

1.2 市場の履歴をともなうマイノリティ・ゲーム 3

1.2.1 数理モデルによる定式化 3

1.2.2 各トレーダの行動決定式 6

1.3 ボラティリティとその時間変化 7

1.3.1 総入札価格の時間変化 8

1.3.2 ボラティリティ — 総入札価格の揺らぎ — 8

1.4 ボラティリティの履歴数依存性 9

前回までの混沌系工学特論 (2004,2005 年度版) [1] や現在開講されている知性創発発達特論では, 統計力学の考え方や計算技法が脳科学を含めた情報科学の諸問題に適用できることを例をあげて見てきた. しかし, 統計力学の方法の適用範囲はこれらにとどまるわけではない. 実際, 経済現象, 金融活動などの社会科学的な諸問題にもその考え方を応用することができる. その際の基本的考え方, 目標はミクロな構成要素の動きから系のマクロな振る舞いを説明すること. つまり, 市場に参加する膨大な数のトレーダの意思決定の方式をミクロに与えて, そこから市場価格変動等のマクロな経済現象を定性的に, 可能ならば定量的に説明することである. つまり

トレーダ (ミクロ情報) ⇒ 市場 (マクロ情報)

を目指す. このとき, 神経回路網の構成要素がパーセプトロンのような単純素子であった一方, ここでの構成要素であるトレーダ, あるいはエージェントは何しろ「人間」の数理模型であるため, 彼らの意思決定方式のミクロな定式化はより複雑になることが予想されるが, ここでも, まずは可能な限り単純で扱いやすい模型から出発する. 当然, その後, 得られたマクロな振る舞いを金融データなどとつき合わせてチェックすることにより数理模型自体を検証し, 必要とあらば, より複雑化, 精密化していくこともできる. この際, 金融データ自体の解析が重要となるが, この講義の後半では, それに関する我々の研究成果も紹介する. というわけで, 今年度の混沌系工学特論では限られた時間の範囲内 (全 5 回の予定) でそうした具体例のいくつかを詳しく見ていくことにしょう.

[1] 北海道大学学術成果コレクション (HUSCAP), 北海道大学オープン・コース・ウエア (OCW) より講義資料がダウンロードできるので, 必要ならば各自が参照すること. それぞれの URL は下記の通り.
HUSCAP: http://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/index.jsp
北大 OCW: http://ocw.hokudai.ac.jp/

1　ゲーム理論

日常行われている株や貨幣などの商取引きに代表される「エージェント (トレーダ) のミクロな意思決定」における合理的判断とは何かを系統的に調べ, その判断がマクロに見てどのような結果を引き起こすのかを調べる学問分野は, 今日では**ゲーム理論**と呼ばれ, 従来の経済学 (ミクロ経済学) にとどまらず, 数学や社会学, 心理学, 生物学や物理学など多くの学問間を横断する研究分野となっている.

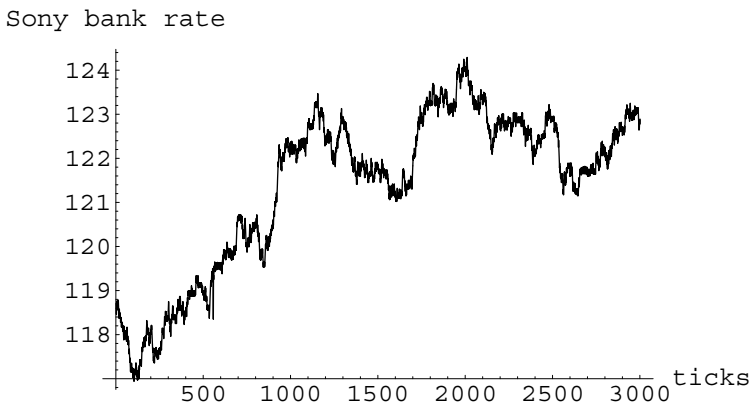

図 1: ソニー銀行 (http://moneykit.net) の円ドル為替レート.

例えば, 図 1 に載せたグラフは後にこの講義で見る**インターネット・トレーディングシステム**を採用するソニー銀行の円ドル為替レートであるが, 全てのトレーダに提示される, この「為替レートの変動」という「マクロ情報」はその起源をミクロに遡れば, 個々のトレーダの「売り」「買い」の意思決定の結果であると考えることができる. 従って, 市場に参入するトレーダは公に提供されるこのレート変動の情報をもとに手持ちの貨幣を「円」または「ドル」に変えることで自らの資産を有効に運用しょうとする. よって, 公に開示される為替レートの情報に基づく戦略を個々のトレーダが採用する限り, それらの戦略[2] とそれに基づく行動結果がマクロなレート変動に (ある程度の時間差を伴って) フィードバックされることになる. その結果, ここで言う「マクロ情報」と「ミクロ情報」はけっして無相関ではなく, 互いに絡み合っており, ミクロなトレーダの行動様式がマクロな情報をどのように変えるのか, あるいは, 「為替レート変動間隔」のようなマクロな情報における確率変数の統計的性質にどのように影響するのか, を調べることが市場を定量的に分析する上でとても重要になる.

本講義では時間の都合上, ゲーム理論のいくつかの典型的な問題とその性質, 基本的概念を細かく説明していく余裕がないので, ゲーム理論が対象とする様々なゲーム (システム) の中でも**マイノリティ・ゲーム**と呼ばれる**繰り返しゲーム**の一種に注目し, これをここでの中心的題材に据え, それを統計力学の観点から計算機実験により調べてみることにする. この繰り返しゲームはシステムにおけるトレーダの動きに [ノイズ] やある種の [ランダムネス] が介在し, そのような確率的要素がシステム全体の振る舞いに影響を与えるという意味において, 統計力学的な考え方が役立つ一例となっている.

[2] その手の戦略の基になる分析手法は, この業界では「 テクニカル分析」などと呼ばれている.

1.1　ゲーム理論の情報統計力学

マイノリティ・ゲームとは **El-Farol bar の問題**を起源とするゲームの一種である．El-Farol bar とは米国サンタフェにあるバー (酒場) の名前で, 毎週週末に楽団による演奏会が行われる．そのとき, 店内が満員では客はなかなか演奏を楽しむことができないので, バーには出かけずに自宅で楽しむ方が良いと考える．一方, 店内が空いていればバーで演奏会を楽しむのが, ここでの好ましい選択となる．これは自分のとるべき行動の決定が他の人々の行動によって左右され (つまり「今晩は人気の楽団のコンサートが行われるので人出が多そうだから自宅でゆっくり過ごそう」だとか), 逆に自分の取った行動が他の人々にも影響されるという状況の典型例となっている．我々がここで考えるマイノリティ・ゲームではこれを単純化し

> **マイノリティ・ゲーム**：
> N(奇数) 人が「売り」「買い」のどちらかの判断を行って少数派のグループに属した者が勝つ．

と簡単に書くことができる．ここで人数が奇数なのは, 少数派の決定に対して都合が良いためにである (偶数だと少数派が決まらない場合もありうる)．もちろん, 我々がこれから具体的に「ゲーム」としてその数理を楽しんで行くためには, いくつかの取り決め, つまり, ここに書いた「判断」とはどのように行われるのか, 「勝ち」「負け」とはどのように定義されるのか等, 実際に数理モデル化する際に決めなくてはならない部分も多々あるが, ゲームの基本的内容はおおかたこの 1 行で表すことができる．統計物理からのモデルの提案としては Challet and Zhang (1997) が最初のものであるが, 彼らの導入した数理モデルには各トレーダが意思決定に用いるであろう履歴の情報が含まれていない．

そこで, 以下で我々は各トレーダの意思決定が過去の履歴に反映され, 決定されるような, より現実に近い数理モデルを導入する (Inoue and Coolen, unpublish)．ここでは, この数理モデルで定義されるゲームのマクロな挙動を計算機を用いた簡単な数値シミュレーションで確かめてみた結果の一部を紹介したい．

1.2　市場の履歴をともなうマイノリティ・ゲーム

ここからはいよいよ, 市場の履歴が各トレーダの意思決定に反映するような繰り返しゲームとしてのマイノリティ・ゲームを導入する．問題設定とその定式化がやや複雑なので, いつも以上に各変数が何を意味しているのかに注意しながら, ときには変数に具体的な数字を当てはめながら読み進めて行くと良いであろう．

1.2.1　数理モデルによる定式化

先に 1 行の文章で定義した問題を式を用いて定義しておく．まず, 各トレーダ i：$(i = 1, \cdots, N)$ は各ゲーム・ラウンド l で自分の**入札価格**：$b_i(l) \in \Re$ を決める．ここでは入札価格 $b_i(l)$ は ± 1 の 2 値 ($+1$：「売り」, -1：「買い」) をとるものとして考えるが, この 2 値 (± 1) を多値, もしくは連続する実数一般に拡張して考えても構わない．つまり, ここでの「入札」の解釈を「$b_i(l)$ が正のある値を取るならば, 繰り返しゲームのラウンド l でトレーダ i は商品を価格 b_i で売りたいと考えている」とするわけである．もちろん, 逆に入札価格 $b_i(l)$ が負であるならば, 「繰り返しゲームのラウンド l でトレーダ i は商品を価格 b_i で買いたいと考えている」ということになる．どちらを採用

するかは, もちろん, どのような取引きを問題にするのかにも依存するし, このシステムの何に着目し, どのような物理量を観測したいのかにもよる[3]. このとき, 各トレーダからなるシステム全体の入札価格の総和を

$$A(l) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} b_i(l) \tag{1}$$

と定義しよう. この $1/\sqrt{N}$ のファクタは $A(l)$ が $\mathcal{O}(1)$ の量となるために付けた. この統計量 $A(l)$ が正の値を持つとき, 市場はそのラウンドで「売り超過」にあり, 逆にこの量が負の値を持つとき, 市場は「買い超過」にあることに注意しよう. 今の場合, N を奇数に選んだ関係で, 売り手数, 買い手数間の「タイ・ブレイク」はあり得ず, 必ず市場は「売り超過」か「買い超過」にある.

さて, 各トレーダはステップ l での自分の意思決定に際し, 過去の M ステップまで遡って定義される**情報ベクトル**:

$$\boldsymbol{\lambda}(l, A, Z) \quad = \quad \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}[(1-\zeta)A(l-1) + \zeta Z(l,1)] \\ \mathrm{sgn}[(1-\zeta)A(l-2) + \zeta Z(l,2)] \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathrm{sgn}[(1-\zeta)A(l-M) + \zeta Z(l,M)] \end{pmatrix} \tag{2}$$

を用いる. ここに $Z(l,\lambda) : \lambda = 1, \cdots, M$ はホワイト・ノイズであり

$$\langle Z(l,\lambda) Z(l^{'}, \lambda^{'}) \rangle \quad = \quad \delta_{l,l'} \delta_{\lambda,\lambda'} \tag{3}$$

が成り立つ. 括弧 $\langle \cdots \rangle$ は Z の従う分布での平均を意味する. $\zeta = 1$ の場合には市場の履歴は実質的にノイズからの寄与だけしかなくなり, トレーダ達のとった行動をマクロに表す $A(l)$ の履歴情報 : $A(l-1), A(l-2), \cdots, A(l-M)$ はトレーダ達には見えなくなっている. 一方, $\zeta = 0$ の場合にはノイズはゼロであるから, この情報ベクトルはトレーダ達のとった行動が $A(l-1), A(l-2), \cdots, A(l-M)$ を介して反映されることになる. ζ は $0 \leq \zeta \leq 1$ の値をとるのだが, この値が 1 に近ければ近いほど, トレーダ達にとって利用可能な市場の情報はノイズに埋まってしまうことになる. 以下では簡単のため, この $\zeta = 0$ の場合につき, この情報ベクトルの意味するところを考えてみよう.

例えば, 過去に遡る M ステップでの $\mathrm{sgn}[A(l-\lambda)]$, $\lambda = 1, \cdots, M$ の値が全て $+1$ の場合, これをベクトルで書くと

$$\overline{\boldsymbol{\lambda}}(l, A, Z) \quad = \quad \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ \cdots \\ \cdots \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

となるが, この情報ベクトルの意味することろは「過去 M ラウンドで市場は常に『売り超過』にあった」という事実である. この手の情報が各ラウンドで全てのトレーダに利用可能な情報として

[3] これはこのゲーム理論によらず, 全ての現象の数理的モデル化において当てはまることである. また, 注目する物理量がこのような変数の選択に依存しない場合もある. それはモデルを導入した段階で予めわかる場合もあるし, 問題を解いた結果にわかる場合もある.

提示されることになる[4]．情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)$ の個数は, ベクトルの各成分が ± 1 の 2 値であるから $2\cdot 2\cdot 2\cdots 2 = 2^M$ 個あり, 各トレーダは各ラウンドでこの中から一つ選択される情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)$ を参照し, 自分の決定に役立てる．ところで, 各トレーダはどのように自分の行動を決定するのであろうか?

例えば, 上に見た特定のベクトル $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ がトレーダに提示された場合, 市場は過去 M ラウンドにおいて常に「売り超過」にあるわけであるから, この場合の「マイノリティ・グループ」は「買い」の行動をとった方であり, あるトレーダはこの情報ベクトルに対して「次も『売り超過』のはずだろうから自分は買おう (-1 を入札価格としよう)」と考えるかもしれないし, 別のトレーダは「次のラウンドあたりには市場は『買い超過』に転じるはずである」と状況を裏読みし, $+1$ を入札価格にするかもしれない．このように提示された情報ベクトルに対する各トレーダのとる行動はトレーダの思惑, つまり, 戦略に依存する．今の場合, 各トレーダのアクションは「売る」か「買う」かの 2 通りしかないが, 便宜上, 提示された情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ に対し, S 通りの戦略が取れるものとし[5], 各ゲーム・ラウンド l においてトレーダ i 毎に定義される S 次元の**戦略ベクトル**:

$$\boldsymbol{R}^i_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} \quad = \quad (R^1_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)}, \cdots, R^S_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)}) \tag{5}$$

を考えよう．これは各トレーダ毎に可能な情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)$ の数 $P = 2^M$ 個だけ保有されており, ベクトルの各成分は ± 1 をとり, ここで我々が考えている 2 値入札価格モデル $b_i(l) = \pm 1$ では, この成分値 $R^a_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} = \pm 1$ はそれぞれトレーダが「売る」か「買う」かに対応することになる．すると, 上で見た特定の情報ベクトル $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ に対し, トレーダ i は例えば $\boldsymbol{R}^i_{\overline{\boldsymbol{\lambda}}(l,A,Z)} = (1,-1,1,\cdots,1)$ という戦略ベクトルを持つことになり, 別の情報ベクトル $\underline{\boldsymbol{\lambda}}$ に対しては $\boldsymbol{R}^i_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}(l,A,Z)} = (-1,-1,-1,\cdots,1)$ を持っている．従って, トレーダ i は各ラウンドで提示された情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)$ に対応する戦略ベクトル $\boldsymbol{R}^i_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)}$ の S 個の成分の中から一つを選ぶことで, その成分値を次のラウンドにおける自分の行動 (「売る」か「買う」か) とする．

それでは, このシステム解析を実行していくにあたり, 各トレーダの戦略ベクトルの各成分 ± 1 をどのような値に選んだらよいでろうか?

この指針として, 実際に何人かの被験者にゲームの状況を説明したのちに戦略ベクトルを作成してもらっても良いが, システムのマクロな振る舞いを調べる限りはトレーダ数が十分に大きな場合において, 確率 $1/2$ で各成分 ± 1 を割り振ってもよいであろう．そこで, ここではそれらの成分を上記の意味でランダムに割り振り, その値はゲームの開始前に与えられ, ゲームを通して固定された一定値をとるものとして話を進める[6]．以上により, この情報ベクトルを可能な情報ベクトルの個数だけ縦に並べたものは

$$\boldsymbol{R}^i \quad = \quad \begin{pmatrix} R^{i1}_1 & R^{i2}_1 & \cdots & R^{iS}_1 \\ R^{i1}_2 & R^{i2}_2 & \cdots & R^{iS}_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ R^{i1}_{2^M} & R^{i2}_{2^M} & \cdots & R^{iS}_{2^M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & +1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ +1 & +1 & \cdots & +1 \end{pmatrix} \quad \text{(各成分はクエンチ変数)} \tag{6}$$

のような $S \times 2^M$ のサイズの行列となり, ここではこれを**ルックアップ・テーブル**と呼ぶことにする．

[4] 「売り超過」といっても, この数理モデルの場合, $A(l)$ の符号を各成分に持つベクトルを導入したので, 市場がどの程度「売り」に傾いているのかまではわからない．例えば, 101 人のトレーダがいる場合, あるラウンドで買い手 1 人, 売り手 100 人でも「売り超過」だし, 買い手 50 人, 売り手 51 人でも「売り超過」である．前者は意味のある「市場の反応」であろうが, 後者の場合はシステムが内在する「揺らぎ」である．

[5] ある戦略 A と戦略 B に対応するアクションが双方ともに「買い」でも構わないとする．

[6] つまり,「クエンチする」わけである

以下では簡単のため, $S = 2$, すなわち, 各トレーダは $a = 1$ あるいは $a = 2$ の 2 つの戦略のうちの一つを各ラウンド l で選択し, 自分の行動を決定する状況を考え, システムの振る舞いを計算機実験によって調べていくことにしょう.

1.2.2　各トレーダの行動決定式

各トレーダはゲームの各ラウンド (ステップ) l で次の決定方程式に従って戦略 $a(= 1, 2)$ を選択した場合の**利得**：$p_{ia}(l)$ を更新する.

$$p_{ia}(l+1) \quad = \quad p_{ia}(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} b_i(l) A(l), \quad b_i(l) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i\tilde{a}_i(l)} \tag{7}$$

ここで, $\delta(x, y)$ はクロネッカ・デルタであり, $\tilde{\eta}$ は更新の重みで, ここでは簡単のため $\tilde{\eta} = 1$ として話を進めることにする. $\tilde{a}$ は次で与えられる「利得を最大化する」という意味での**最適戦略**である.

$$\tilde{a}_i(l) \quad = \quad \underset{a}{\mathrm{argmax}}[p_{ia}(l)] \tag{8}$$

クロネッカ・デルタの性質:

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} f(\boldsymbol{\lambda}) \quad = \quad f(\boldsymbol{\lambda}(l, A, Z)) \tag{9}$$

から, $b_i(l)$ の値は, 各ラウンド l で選ばれた情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l, A, Z)$ に対し, 自分の所有するルックアップ・テーブルの中の該当戦略 $R_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)}^{i\tilde{a}_i(l)} \in \pm 1$ の値に相当する. 従って, この更新式は各ラウンドで自分の入札価格の符号 (つまり, 「売る」か「買う」か) と総入札価格 $A(l)$ が逆符号になるとき (つまり, 自分が少数派の選択を行った場合), その戦略に対して得られる利得 p_{ia} を増加させるという意味を持っている[7] . これは各トレーダにとって合理的な行動と言えるであろう.

このときの最適戦略とは, (7) で各ラウンドで自分の各戦略 (ここでは $a = 1, 2$) に対する利得が決まった際, その利得を最大とするような (今の 2 戦略系の場合には「最大とする方の」) 戦略が選ばれるということである. 従って, 各トレーダ i は各ステップ l で**更新式 (7) に従って, 自分の入札価格 $b_i(l)$ と多数派の判定 $A(l)$ が逆になるように, 自らの持つ各戦略 a に対する利得 p_{ia} を定め, これらを最大にするような最適戦略を (8) 式に従って決める, という一連の行動をとって行く**ことになる.

さて, いま我々は 2 つの戦略が選択できる場合を考えているわけであるから, 具体的には次の 2 本の方程式で $a = 1, 2$ それぞれの戦略の利得を決めて行くことになる.

$$p_{i1}(l+1) \quad = \quad p_{i1}(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} \left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i1} \right) A(l) \tag{10}$$

$$p_{i2}(l+1) \quad = \quad p_{i2}(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} \left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i2} \right) A(l) \tag{11}$$

そこで

$$q_i(l) \quad = \quad \frac{1}{2}(p_{i1}(l) - p_{i2}(l)) \tag{12}$$

[7] 先に「入札価格」という言葉を用いて各トレーダの提示する判断 (価格)：$b_i(l)$ を導入したが, 通常の「オークション」では各トレーダからの入札価格を参照し, 最も高い値で「買い」を出したトレーダがその商品を「落札」する. 従って, そこでの勝者は最終的に落札したトレーダであって, ここで考えている勝者であるところの「少数派」とは異なる. しかし, 我々がここで調べようとしている「総入札価格：$A(l)$」あるいはそれの「揺らぎ (ボラティリティ)」に注目する限りは勝者を一人選び出す必要はなく, その意味でこのマイノリティ・ゲームはオークションの一面をも合わせ持った数理モデルであると言うこともできる.

で 2 つの戦略間の利得の差 $q_i(l)$ を定義し,

$$\xi^i_{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{2}(R^{i1}_{\boldsymbol{\lambda}} - R^{i2}_{\boldsymbol{\lambda}}) \tag{13}$$

とおくと, (10)(11) 式を辺々引くことにより

$$q_i(l+1) = q_i(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} \xi^i_{\boldsymbol{\lambda}} A(l) \tag{14}$$

と $q_i(l)$ に関する更新式に書き直すことができる. この方程式 (14) をこのシステムを記述するための基本方程式の一つとしよう.

さて, 式 (14) は入札価格の総和 $A(l)$ を含むので, 我々は次にこれに関する更新式を求めることにする. まず, その定義より

$$A(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} b_i(l) = \sum_i \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} R^{i\tilde{a}_i(l)}_{\boldsymbol{\lambda}} \tag{15}$$

であるから, 次で定義される新しい変数 $w^i_{\boldsymbol{\lambda}}$:

$$w^i_{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{2}(R^{i1}_{\boldsymbol{\lambda}} + R^{i2}_{\boldsymbol{\lambda}}) \tag{16}$$

を導入すると

$$R^{i\tilde{a}(l)}_{\boldsymbol{\lambda}} = w^i_{\boldsymbol{\lambda}} + \mathrm{sgn}[q_i(l)]\xi^i_{\boldsymbol{\lambda}} \tag{17}$$

が成り立つことに注意しょう. 実際, $q_i(l) > 0$, つまり, $p_{i1}(l) > p_{i2}(l)$ で戦略 1 が選ばれるならば, 式 (17) より, $R^{i\tilde{a}(l)}_{\boldsymbol{\lambda}} = R^{i1}_{\boldsymbol{\lambda}}$ となるし, 逆に, $q_i(l) < 0$, つまり, $p_{i2}(l) > p_{i1}(l)$ で戦略 2 が選ばれるならば, 式 (17) より, $R^{i\tilde{a}(l)}_{\boldsymbol{\lambda}} = R^{i2}_{\boldsymbol{\lambda}}$ でつじつまが合っている. 従って, 入札価格の総和 $A(l)$ に関する方程式は

$$A(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} \left\{ w^i_{\boldsymbol{\lambda}} + \mathrm{sgn}[q_i(l)]\xi^i_{\boldsymbol{\lambda}} \right\} \tag{18}$$

となる. 従って, 我々がここで調べている市場履歴をともなったマイノリティ・ゲームのシステムは式 (14)(18) でミクロに記述されることになる. ここで強調しておきたいのは, この方程式 (14)(18) を良く見てみると, 個々のトレーダの利得決定方程式であるミクロな式 (14) の中には, マクロな量である総入札価格 $A(l)$ が現れており, 逆に, 市場のマクロな情報を担う総入札価格 $A(l)$ の方程式 (18) の中にはミクロな情報である個々のトレーダの利得 $q_i(l)$ (正確に言えば, 2 つの戦略による利得の差) が現れている. このことは, 我々が当初予想したように, **市場においてはミクロな情報とマクロな情報は無相関ではなく, 互いに絡み合っているという事実が, ここで導かれた決定方程式に反映されている**ことを意味する.

以上により, ここからの我々の目標は, これらのミクロな意思決定方程式を何らかの方法によって解析し, 市場のマクロな振る舞いをそこから導き出し, 様々な統計的性質を調べていくことである. その際の方法としては計算機による数値シミュレーションが有力である.

1.3 ボラティリティとその時間変化

我々はシステムの時間変化を式 (14)(18) から知ることになるが, どのような物理量に着目したら良いのであろうか ?

$q_i(l)$, あるいはその符号を取った $\mathrm{sgn}[q_i(l)]$ はトレーダ i が時刻 l に $a = 1, 2$ どちらの戦略をとったかという情報であるから, この値そのもので言えば, $(1, -1, 1, -1, -1, \cdots, -1, \cdots)$, あるいは, この時間変化を各トレーダの採用した戦略の時系列パターンに直した $(1, 2, 1, 2, 2, \cdots, 2, \cdots)$ 等を表している. しかし, これはトレーダ個人の意思決定の時系列であり, その意味でミクロな量である. 従って, このような, ある特定のトレーダの挙動にのみ着目しても, システム全体のマクロな振る舞いは当然わからない. そこで, 統計力学的な考え方 — ミクロな構成要素の挙動にはふれないで, マクロに定義される量の変化を追う — という精神のもとに, まずは各エージェントからの入札価格の総和 $A(l)$ に着目し, これを有限のサイズの系 (ここでは $N = 1001$ とする) に対し, (14)(18) を計算機上でシミュレートすることにより調べてみよう.

1.3.1　総入札価格の時間変化

まずはそのダイナミックスが (18) 及び (14) で記述される総入札価格の時間変化を調べよう. このとき, この $A(l)$ の値が連続する 2 つの時刻間 $A(l)$,$A(l+1)$ でどのような分布をするのかをそれぞれ縦軸横軸に重ね打ちして調べてみよう. 結果を図 2 に示す. この図より, 遡った市場の履歴数

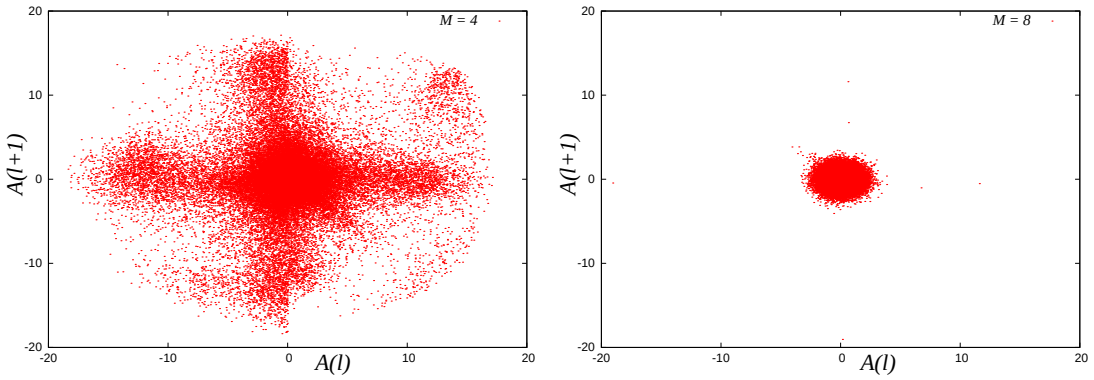

図 2: 総入札価格の連続する 2 ラウンド間隔の値 $A(l)$ と $A(l+1)$ のプロット. 左は $M = 4(P = 2^4 = 16)$, 右が $M = 8(P = 2^8 = 256)$. $\zeta = 0$ の real memory の場合. システムサイズは $N = 1001$.

M が比較的小さい場合 $(M = 4)$ には, この図 2 の左図より, $A(l)$-$A(l+1)$ のプロットはかなり広範囲に分散したものになる. 一方, 用いることのできる履歴数 M が多くなり, $M = 8$ となるとこの広がりは小さくなっている (右図参照). 従って, 明らかに総入札価格 $A(l)$ のばらつきはトレーダの用いることのできる履歴数 M に依存する. 「市場の安定性」という観点から見ると, ここでの結果より, 各トレーダが市場の履歴をより長い過去まで遡って利用できるシステムの方が, 市場全体としては安定化する傾向があると言える.

1.3.2　ボラティリティ — 総入札価格の揺らぎ —

図 2 の結果から, 我々が着目すべきなのは総入札価格それ自体の時間変化ではなく, その「揺らぎ」であることがわかった. つまり, 我々は次の量:

$$\sigma^2(L) \quad = \quad \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{l} A(l)^2 - \left\{\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} A(l)\right\}^2 \tag{19}$$

で総入札価格の「揺らぎ」を定義し, これをラウンド L まで累積した量とし, L の関数として調べてみようというわけである. この量 σ^2 を経済学 (金融工学) では**ボラティリティ**と呼んでいる[8]. このボラティリティはここで示したような, ある金融商品の不安定性を示す量であり, ボラティリティが大きい商品に対して各トレーダは大きく勝つ場合もあるけれども, 何しろ価格の揺らぎが大きいので, ひどく負けるケースもかなりの頻度で現れ, 商品の取引き自体がギャンブル的要素を持つようになる. 図 3 にボラティリティの時間変化を示した. 左は real memory ($\zeta = 0$) の場合で右が fake

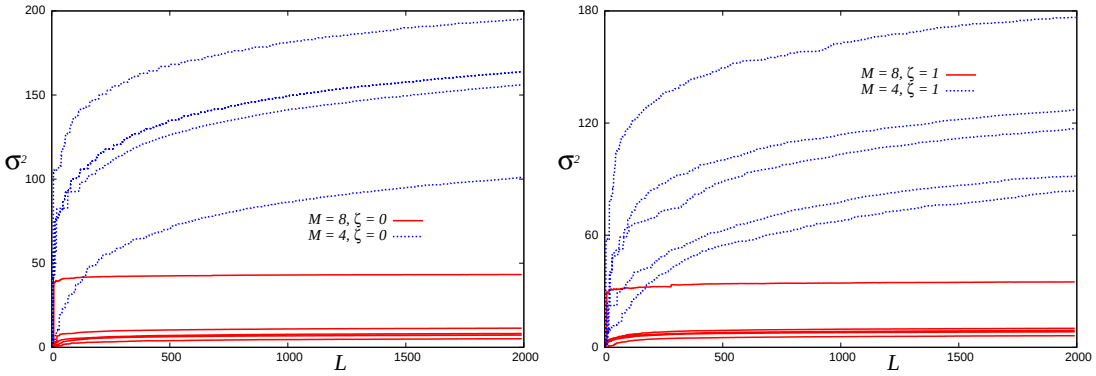

図 3: ボラティリティの時間変化. 左は real memory ($\zeta = 0$) の場合で右が fake memory ($\zeta = 1$) の場合. $M = 4(P = 2^4 = 16)$, 及び, $M = 8(P = 2^8 = 256)$ に対してプロットしてある. 異なる線は異なる情報ベクトル, 初期値に対応している. システムサイズ (トレーダ数) は $N = 1001$.

memory ($\zeta = 1$) の場合に対応する. それぞれ $M = 4(P = 2^4 = 16)$, 及び, $M = 8(P = 2^8 = 256)$ に対してプロットしてあるのだが, 明らかに遡る履歴数が大きい場合の方がボラティリティは小さい. この傾向は不思議なことに, real memory ($\zeta = 0$) でも fake memory ($\zeta = 1$) でも変わらない. ちなみに, 同じ M の値で異なる線は異なる情報ベクトル, 初期値などの「データ」に対応している. 従って, 遡る履歴数が少ない場合にはデータによるばらつきも大きい. ところで, 履歴を過去まで遡って利用すればするほどボラティリティを小さく押さえること, 言い方をかえれば, 市場を安定化させることができるであろうか? 直観的にその予想は正しそうではあるが, この問い具体的に答えるために, 次節ではボラティリティの履歴数 M 依存性について調べてみよう.

1.4　ボラティリティの履歴数依存性

図 4 に real memory ($\zeta = 0$) の場合のボラティリティ:

$$\sigma^2 \quad = \quad \lim_{L\to\infty} \sigma^2(L) \tag{20}$$

の履歴数 M 依存性をプロットした. この図より, **ボラティリティを最小化するような最適な履歴数 M が存在する**ことがわかる[9]. また, 意外なことに, この依存性は real memory($\zeta = 0$) でも fake memory($\zeta = 1$) でも変わらない.

以上で市場の履歴をともなったマイノリティ・ゲームに関し, 計算機シミュレーションによりわかってきているごく一部を紹介した. 計算機シミュレーションは有限サイズのシステム (これらの

[8] 通常, ボラティリティσ^2 とは $\sigma^2(L)$ でラウンド数 L を無限大にした極限で定義される. しかし, ここではこの量が定常状態へ向かうプロセスにも興味があるので, $\sigma^2(L)$ と σ^2 をともにボラティリティと呼ぶことにする.

[9] つまり, ネット上に公開する株価をコンピュータ上に蓄積された過去数年にわたる履歴まで遡って顧客に提示する場合, 「その履歴が長ければ長いほど価格が安定化する」ということは言えないことになる.

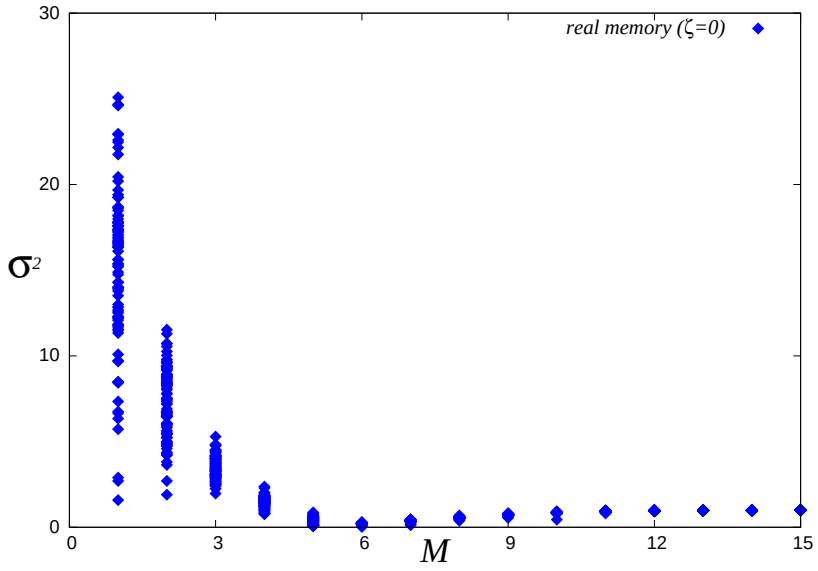

図 4: ボラティリティの履歴数 M 依存性. real memory ($\zeta = 0$) の場合.

実験ではいずれも $N = 1001$ 程度) を扱うため, 各種の統計誤差は考慮しなければならない. ここに示した結果は市場で公に開示される履歴情報が総入札価格の安定性— 市場の安定性 — に及ぼす影響を調べるための有益な指針, より数学的/解析的に調べていくための動機づけを与えるものと位置づけられる. もちろん, 実際の市場では公開される各商品の価格変動に対し, 各トレーダが「売り」「買い」のマイノリティ・グループへ属することを目標として行動するわけではないし, また, 各ラウンドで提示される情報も「売り」「買い」の 2 値化された符号ではなく, 直前の数ラウンドからどの程度入札価格が上がったか下がったか, などの変動幅それ自体である場合が多い[10]. 例

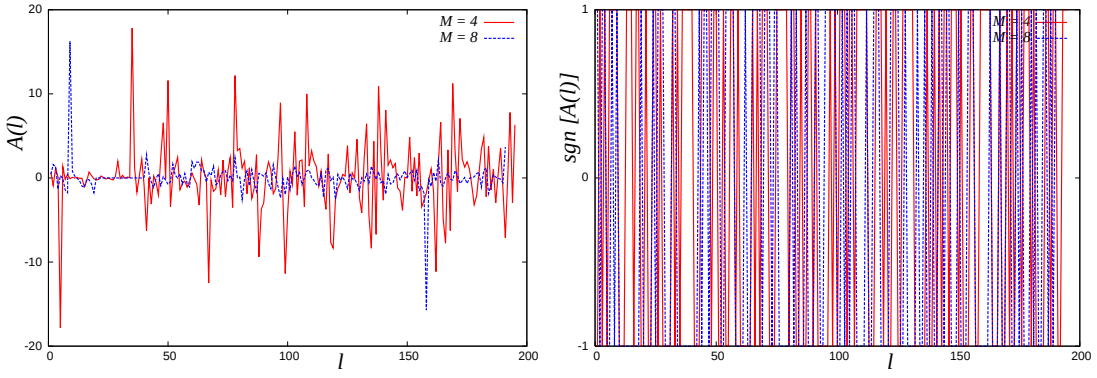

図 5: 総入札価格 $A(l)$ の時間変化 (左) と総入札価格の符号 $\mathrm{sgn}[A(l)]$ の時間変化 (右).

えば, 図 5 はここで得られた総入札価格 $A(l)$ とその符号 $\mathrm{sgn}[A(l)]$ の時間変化を表しているが, 明らかに総入札価格の変動幅そのものの情報を含む左図の方がトレーダの意思決定に対して有益で

[10] 例えば Google 検索で「株価 ソニー」と打ち込むとソニーの株価が表示されるが, 多くのトレーダは株価の上がり下がりの 2 値化された情報に基づき行動するのではなく,「株価自体がどれくらいの幅で上がり続けているか (あるいは逆に下がり続けているか)」という, 中・短期間にわたる「トレンド」を参考にする場合が多いのではないだろうか.

あるように思われる. また, ここでゲームの開始から終了まで固定した各トレーダの戦略ベクトルも, 変化の時間スケールは緩やかではあるけれども時間的に変化する (各トレーダの市場情報からの「学習効果」により変化する) と考えた方が, より現実の状況に近いかもしれない. しかし, そのような場合でもここで紹介したゲームを逐次改良, 拡張することにより, そうした状況を反映した数理モデルの振る舞いを計算機実験などで解析することで, トレーダの動きである「ミクロ」から市場の振る舞いである「マクロ」な性質を調べていくことは可能であるように思われる.

そのような模型の改良の際に我々の指針となるべきなのは, やはり, 実際の金融データである. 経済学が実証的科学である以上, そのような実データの存在を無視することはできない. よって, マクロな市場の情報を担う金融データそのものの解析も, 経済現象を説明する数理モデルを提案し, それに基づく理論を構築していく上でとても重要になる. そこで次回からはそのような金融データの一つである, 為替レートの変動を確率過程にみたて, その統計的性質を調べていくためのいくつかの方法, 道具立てについて解説していくことにしよう.

次回第 2 回講義は年明け 1 月 7 日です.