2007 年度 北海道大学 大学院情報科学研究科

混沌系工学特論

2007年度 講義ノート

井上 純一

北海道大学 大学院情報科学研究科 複合情報学専攻

URL: http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/index.html

目 次

1 ゲーム理論 **4**
1.1 ゲーム理論の情報統計力学 5
1.2 市場の履歴をともなうマイノリティ・ゲーム 6
1.2.1 数理モデルによる定式化 6
1.2.2 各トレーダの行動決定式 8
1.3 ボラティリティとその時間変化 10
1.3.1 総入札価格の時間変化 10
1.3.2 ボラティリティ — 総入札価格の揺らぎ — 11
1.4 ボラティリティの履歴数依存性 12

2 金融データと確率過程 **14**
2.1 確率モデルとその統計的性質 14
2.1.1 中心極限定理 — 正規分布への収束 — 16
2.2 安定分布 17
2.2.1 正規分布とローレンツ分布の安定性 18
2.2.2 レビ分布とレビ過程 19
2.2.3 カオス写像を用いたレビ分布からのサンプリング 20
2.3 ボラティリティ変動モデル 21
2.3.1 ARCH 過程 21
2.3.2 GARCH 過程 23
2.4 点過程 26
2.5 ポアソン過程 27
2.6 レート変動間隔の実データ解析 29
2.6.1 ワイブル確率紙の方法 29
2.6.2 変動間隔が揺らぐ GARCH(1,1) 過程での計算機実験 30
2.7 ジニ係数: 格差の一指標 31
2.7.1 解析的評価 32
2.7.2 数値的評価 33
2.8 平均待ち時間 34
2.8.1 レート変動とその観測に関連する時間 35
2.8.2 レートの観測に関するパラドクス 36

今年度 11 月 26 日, 12 月 3 日は国際会議@インド・コルカタで出張のため, 井上担当分は 12 月 10 日から開始しました.

今年度講義で扱う対象と目標

前回までの混沌系工学特論 (2004,2005 年度版) [1] や現在開講されている知性創発発達特論では, 統計力学の考え方や計算技法が脳科学を含めた情報科学の諸問題に適用できることを例をあげて見てきた. しかし, 統計力学の方法の適用範囲はこれらにとどまるわけではない. 実際, 経済現象, 金融活動などの社会科学的な諸問題にもその考え方を応用することができる. その際の基本的考え方, 目標はミクロな構成要素の動きから系のマクロな振る舞いを説明すること. つまり, 市場に参加する膨大な数のトレーダの意思決定の方式をミクロに与えて, そこから市場価格変動等のマクロな経済現象を定性的に, 可能ならば定量的に説明することである. つまり

トレーダ (ミクロ情報)　⇒　市場 (マクロ情報)

を目指す. このとき, 神経回路網の構成要素がパーセプトロンのような単純素子であった一方, ここでの構成要素であるトレーダ, あるいはエージェントは何しろ「人間」の数理模型であるため, 彼らの意思決定方式のミクロな定式化はより複雑になることが予想されるが, ここでも, まずは可能な限り単純で扱いやすい模型から出発する. 当然, その後, 得られたマクロな振る舞いを金融データなどとつき合わせてチェックすることにより数理模型自体を検証し, 必要とあらば, より複雑化, 精密化していくこともできる. この際, 金融データ自体の解析が重要となるが, この講義の後半では, それに関する我々の研究成果も紹介する. というわけで, 今年度の混沌系工学特論では限られた時間の範囲内 (全 5 回の予定) [2]でそうした具体例のいくつかを詳しく見ていくことにしょう.

1　ゲーム理論

日常行われている株や貨幣などの商取引きに代表される「エージェント (トレーダ) のミクロな意思決定」における合理的判断とは何かを系統的に調べ, その判断がマクロに見てどのような結果を引き起こすのかを調べる学問分野は, 今日では**ゲーム理論**と呼ばれ, 従来の経済学 (ミクロ経済学) にとどまらず, 数学や社会学, 心理学, 生物学や物理学など多くの学問間を横断する研究分野となっている.

例えば, 図 1 に載せたグラフは後にこの講義で見る**インターネット・トレーディングシステム**を採用するソニー銀行の円ドル為替レートであるが, 全てのトレーダに提示される, この「為替レートの変動」という「マクロ情報」はその起源をミクロに遡れば, 個々のトレーダの「売り」「買い」の意思決定の結果であると考えることができる. 従って, 市場に参入するトレーダは公に提供されるこのレート変動の情報をもとに手持ちの貨幣を「円」または「ドル」に変えることで自らの資産を有効に運用しょうとする. よって, 公に開示される為替レートの情報に基づく戦略を個々のトレーダが採用する限り, それらの戦略[3] とそれに基づく行動結果がマクロなレート変動に (ある程度の時間差を伴って) フィードバックされることになる. その結果, ここで言う「マクロ情報」と「ミクロ情報」はけっして無相関ではなく, 互いに絡み合っており, ミクロなトレーダの行動様式がマクロな情報をどのように変えるのか, あるいは, 「為替レート変動間隔」のようなマクロな情報における確率変数の統計的性質にどのように影響するのか, を調べることが市場を定量的に分析する上でとても重要になる.

[1] 北海道大学学術成果コレクション (HUSCAP), 北海道大学オープン・コース・ウエア (OCW) より講義資料がダウンロードできるので, 必要ならば各自が参照すること. それぞれの URL は下記の通り.
HUSCAP: http://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/index.jsp
北大 OCW: http://ocw.hokudai.ac.jp/

[2] 結局, 全 4 回となりました.

[3] その手の戦略の基になる分析手法は, この業界では「 テクニカル分析」などと呼ばれている.

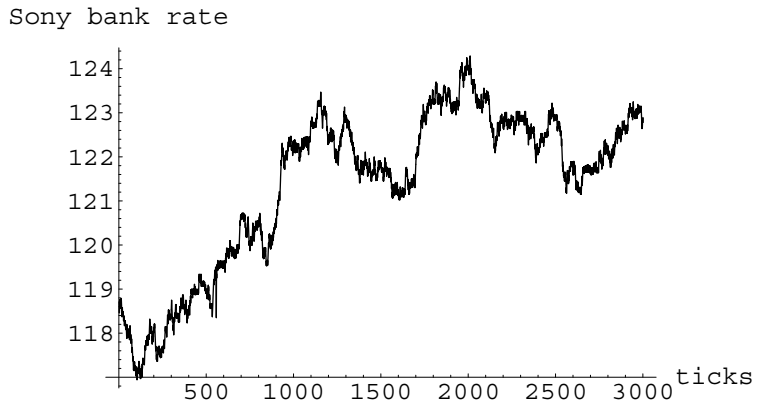


図 1: ソニー銀行 (http://moneykit.net) の円ドル為替レート.

本講義では時間の都合上, ゲーム理論のいくつかの典型的な問題とその性質, 基本的概念を細かく説明していく余裕がないので, ゲーム理論が対象とする様々なゲーム (システム) の中でも**マイノリティ・ゲーム**と呼ばれる**繰り返しゲーム**の一種に注目し, これをここでの中心的題材に据え, それを統計力学の観点から計算機実験により調べてみることにする. この繰り返しゲームはシステムにおけるトレーダの動きに [ノイズ] やある種の [ランダムネス] が介在し, そのような確率的要素がシステム全体の振る舞いに影響を与えるという意味において, 統計力学的な考え方が役立つ一例となっている.

1.1 ゲーム理論の情報統計力学

マイノリティ・ゲームとは **El-Farol bar の問題**を起源とするゲームの一種である. El-Farol bar とは米国サンタフェにあるバー (酒場) の名前で, 毎週週末に楽団による演奏会が行われる. そのとき, 店内が満員では客はなかなか演奏を楽しむことができないので, バーには出かけずに自宅で楽しむ方が良いと考える. 一方, 店内が空いていればバーで演奏会を楽しむのが, ここでの好ましい選択となる. これは自分のとるべき行動の決定が他の人々の行動によって左右され (つまり「今晩は人気の楽団のコンサートが行われるので人出が多そうだから自宅でゆっくり過ごそう」だとか), 逆に自分の取った行動が他の人々にも影響されるという状況の典型例となっている. 我々がここで考えるマイノリティ・ゲームではこれを単純化し

マイノリティ・ゲーム:
N(奇数) 人が「売り」「買い」のどちらかの判断を行って少数派のグループに属した者が勝つ.

と簡単に書くことができる. ここで人数が奇数なのは, 少数派の決定に対して都合が良いためにである (偶数だと少数派が決まらない場合もありうる). もちろん, 我々がこれから具体的に「ゲーム」としてその数理を楽しんで行くためには, いくつかの取り決め, つまり, ここに書いた「判断」とはどのように行われるのか, 「勝ち」「負け」とはどのように定義されるのか等, 実際に数理モデル化する際に決めなくてはならない部分も多々あるが, ゲームの基本的内容はおおかたこの 1 行で表す

ことができる. 統計物理からのモデルの提案としては Challet and Zhang (1997) が最初のものであるが, 彼らの導入した数理モデルには各トレーダが意思決定に用いるであろう履歴の情報が含まれていない.

そこで, 以下で我々は各トレーダの意思決定が過去の履歴に反映され, 決定されるような, より現実に近い数理モデルを導入する (Inoue and Coolen, unpublish). ここでは, この数理モデルで定義されるゲームのマクロな挙動を計算機を用いた簡単な数値シミュレーションで確かめてみた結果の一部を紹介したい.

1.2 市場の履歴をともなうマイノリティ・ゲーム

ここからはいよいよ, 市場の履歴が各トレーダの意思決定に反映するような繰り返しゲームとしてのマイノリティ・ゲームを導入する. 問題設定とその定式化がやや複雑なので, いつも以上に各変数が何を意味しているのかに注意しながら, ときには変数に具体的な数字を当てはめながら読み進めて行くと良いであろう.

1.2.1 数理モデルによる定式化

先に 1 行の文章で定義した問題を式を用いて定義しておく. まず, 各トレーダ i : $(i = 1, \cdots, N)$ は各ゲーム・ラウンド l で自分の**入札価格** : $b_i(l) \in \Re$ を決める. ここでは入札価格 $b_i(l)$ は ± 1 の 2 値 ($+1$:「売り」, -1 :「買い」) をとるものとして考えるが, この 2 値 (± 1) を多値, もしくは連続する実数一般に拡張して考えても構わない. つまり, ここでの「入札」の解釈を「$b_i(l)$ が正のある値を取るならば, 繰り返しゲームのラウンド l でトレーダ i は商品を価格 b_i で売りたいと考えている」とするわけである. もちろん, 逆に入札価格 $b_i(l)$ が負であるならば, 「繰り返しゲームのラウンド l でトレーダ i は商品を価格 b_i で買いたいと考えている」ということになる. どちらを採用するかは, もちろん, どのような取引きを問題にするのかにも依存するし, このシステムの何に着目し, どのような物理量を観測したいのかにもよる[4]. このとき, 各トレーダからなるシステム全体の入札価格の総和を

$$A(l) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} b_i(l) \tag{1}$$

と定義しよう. この $1/\sqrt{N}$ のファクタは $A(l)$ が $\mathcal{O}(1)$ の量となるために付けた. この統計量 $A(l)$ が正の値を持つとき, 市場はそのラウンドで「売り超過」にあり, 逆にこの量が負の値を持つとき, 市場は「買い超過」にあることに注意しよう. 今の場合, N を奇数に選んだ関係で, 売り手数, 買い手数間の「タイ・ブレイク」はあり得ず, 必ず市場は「売り超過」か「買い超過」にある.

さて, 各トレーダはステップ l での自分の意思決定に際し, 過去の M ステップまで遡って定義さ

[4] これはこのゲーム理論によらず, 全ての現象の数理的モデル化において当てはまることである. また, 注目する物理量がこのような変数の選択に依存しない場合もある. それはモデルを導入した段階で予めわかる場合もあるし, 問題を解いた結果にわかる場合もある.

れる**情報ベクトル**:

$$\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z) \quad = \quad \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}[(1-\zeta)A(l-1)+\zeta Z(l,1)] \\ \mathrm{sgn}[(1-\zeta)A(l-2)+\zeta Z(l,2)] \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathrm{sgn}[(1-\zeta)A(l-M)+\zeta Z(l,M)] \end{pmatrix} \tag{2}$$

を用いる. ここに $Z(l,\lambda)$: $\lambda = 1,\cdots,M$ はホワイト・ノイズであり

$$\langle Z(l,\lambda)Z(l^{'},\lambda^{'})\rangle \quad = \quad \delta_{l,l'}\delta_{\lambda,\lambda'} \tag{3}$$

が成り立つ. 括弧 $\langle\cdots\rangle$ は Z の従う分布での平均を意味する. $\zeta = 1$ の場合には市場の履歴は実質的にノイズからの寄与だけしかなくなり, トレーダ達のとった行動をマクロに表す $A(l)$ の履歴情報 : $A(l-1), A(l-2),\cdots, A(l-M)$ はトレーダ達には見えなくなっている. 一方, $\zeta = 0$ の場合にはノイズはゼロであるから, この情報ベクトルはトレーダ達のとった行動が $A(l-1), A(l-2),\cdots, A(l-M)$ を介して反映されることになる. ζ は $0 \leq \zeta \leq 1$ の値をとるのだが, この値が 1 に近ければ近いほど, トレーダ達にとって利用可能な市場の情報はノイズに埋まってしまうことになる. 以下では簡単のため, この $\zeta = 0$ の場合につき, この情報ベクトルの意味するところを考えてみよう.

例えば, 過去に遡る M ステップでの $\mathrm{sgn}[A(l-\lambda)]$, $\lambda = 1,\cdots,M$ の値が全て $+1$ の場合, これをベクトルで書くと

$$\overline{\boldsymbol{\lambda}}(l,A,Z) \quad = \quad \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ \cdots \\ \cdots \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

となるが, この情報ベクトルの意味することろは「過去 M ラウンドで市場は常に『売り超過』にあった」という事実である. この手の情報が各ラウンドで全てのトレーダに利用可能な情報として提示されることになる[5] . 情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)$ の個数は, ベクトルの各成分が ± 1 の 2 値であるから $2\cdot 2\cdot 2\cdots 2 = 2^M$ 個あり, 各トレーダは各ラウンドでこの中から一つ選択される情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)$ を参照し, 自分の決定に役立てる. ところで, 各トレーダはどのように自分の行動を決定するのであろうか?

例えば, 上に見た特定のベクトル $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ がトレーダに提示された場合, 市場は過去 M ラウンドにおいて常に「売り超過」にあるわけであるから, この場合の「マイノリティ・グループ」は「買い」の行動をとった方であり, あるトレーダはこの情報ベクトルに対して「次も『売り超過』のはずだろうから自分は買おう (-1 を入札価格としよう)」と考えるかもしれないし, 別のトレーダは「次のラウンドあたりには市場は『買い超過』に転じるはずである」と状況を裏読みし, $+1$ を入札価格にするかもしれない. このように提示された情報ベクトルに対する各トレーダのとる行動はトレーダの思惑, つまり, 戦略に依存する. 今の場合, 各トレーダのアクションは「売る」か「買う」かの

[5] 「売り超過」といっても, この数理モデルの場合, $A(l)$ の符号を各成分に持つベクトルを導入したので, 市場がどの程度「売り」に傾いているのかまではわからない. 例えば, 101 人のトレーダがいる場合, あるラウンドで買い手 1 人, 売り手 100 人でも「売り超過」だし, 買い手 50 人, 売り手 51 人でも「売り超過」である. 前者は意味のある「市場の反応」であろうが, 後者の場合はシステムが内在する「揺らぎ」である.

2 通りしかないが, 便宜上, 提示された情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ に対し, S 通りの戦略が取れるものとし[6], 各ゲーム・ラウンド l においてトレーダ i 毎に定義される S 次元の**戦略ベクトル**:

$$\boldsymbol{R}^i_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} \quad = \quad (R^1_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)}, \cdots, R^S_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)}) \tag{5}$$

を考えよう. これは各トレーダ毎に可能な情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)$ の数 $P = 2^M$ 個だけ保有されており, ベクトルの各成分は ± 1 をとり, ここで我々が考えている 2 値入札価格モデル $b_i(l) = \pm 1$ では, この成分値 $R^a_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} = \pm 1$ はそれぞれトレーダが「売る」か「買う」かに対応することになる. すると, 上で見た特定の情報ベクトル $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ に対し, トレーダ i は例えば $\boldsymbol{R}^i_{\overline{\boldsymbol{\lambda}}(l,A,Z)} = (1,-1,1,\cdots,1)$ という戦略ベクトルを持つことになり, 別の情報ベクトル $\underline{\boldsymbol{\lambda}}$ に対しては $\boldsymbol{R}^i_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}(l,A,Z)} = (-1,-1,-1,\cdots,1)$ を持っている. 従って, トレーダ i は各ラウンドで提示された情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)$ に対応する戦略ベクトル $\boldsymbol{R}^i_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)}$ の S 個の成分の中から一つを選ぶことで, その成分値を次のラウンドにおける自分の行動 (「売る」か「買う」か) とする.

それでは, このシステム解析を実行していくにあたり, 各トレーダの戦略ベクトルの各成分 ± 1 をどのような値に選んだらよいでろうか?

この指針として, 実際に何人かの被験者にゲームの状況を説明したのちに戦略ベクトルを作成してもらっても良いが, システムのマクロな振る舞いを調べる限りはトレーダ数が十分に大きな場合において, 確率 $1/2$ で各成分 ± 1 を割り振ってもよいであろう. そこで, ここではそれらの成分を上記の意味でランダムに割り振り, その値はゲームの開始前に与えられ, ゲームを通して固定された一定値をとるものとして話を進める[7]. 以上により, この情報ベクトルを可能な情報ベクトルの個数だけ縦に並べたものは

$$\boldsymbol{R}^i \quad = \quad \begin{pmatrix} R^{i1}_1 & R^{i2}_1 & \cdots & R^{iS}_1 \\ R^{i1}_2 & R^{i2}_2 & \cdots & R^{iS}_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ R^{i1}_{2^M} & R^{i2}_{2^M} & \cdots & R^{iS}_{2^M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & +1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ +1 & +1 & \cdots & +1 \end{pmatrix} \quad \text{(各成分はクエンチ変数)} \tag{6}$$

のような $S \times 2^M$ のサイズの行列となり, ここではこれを**ルックアップ・テーブル**と呼ぶことにする.

以下では簡単のため, $S = 2$, すなわち, 各トレーダは $a = 1$ あるいは $a = 2$ の 2 つの戦略のうちの一つを各ラウンド l で選択し, 自分の行動を決定する状況を考え, システムの振る舞いを計算機実験によって調べていくことにしょう.

1.2.2　各トレーダの行動決定式

各トレーダはゲームの各ラウンド (ステップ) l で次の決定方程式に従って戦略 $a(=1,2)$ を選択した場合の**利得**：$p_{ia}(l)$ を更新する.

$$p_{ia}(l+1) \quad = \quad p_{ia}(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} b_i(l) A(l), \quad b_i(l) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} R^{i\tilde{a}_i(l)}_{\boldsymbol{\lambda}} \tag{7}$$

ここで, $\delta(x,y)$ はクロネッカ・デルタであり, $\tilde{\eta}$ は更新の重みで, ここでは簡単のため $\tilde{\eta} = 1$ として話を進めることにする. $\tilde{a}$ は次で与えられる「利得を最大化する」という意味での**最適戦略**である.

$$\tilde{a}_i(l) \quad = \quad \underset{a}{\mathrm{argmax}}[p_{ia}(l)] \tag{8}$$

[6] ある戦略 A と戦略 B に対応するアクションが双方ともに「買い」でも構わないとする.
[7] つまり,「クエンチする」わけである

クロネッカ・デルタの性質:

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} f(\boldsymbol{\lambda}) \quad = \quad f(\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)) \tag{9}$$

から, $b_i(l)$ の値は, 各ラウンド l で選ばれた情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)$ に対し, 自分の所有するルックアップ・テーブルの中の該当戦略 $R^{i\tilde{a}_i(l)}_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} \in \pm 1$ の値に相当する. 従って, この更新式は各ラウンドで自分の入札価格の符号 (つまり, 「売る」か「買う」か) と総入札価格 $A(l)$ が逆符号になるとき (つまり, 自分が少数派の選択を行った場合), その戦略に対して得られる利得 p_{ia} を増加させるという意味を持っている[8]. これは各トレーダにとって合理的な行動と言えるであろう.

このときの最適戦略とは, (7) で各ラウンドで自分の各戦略 (ここでは $a = 1, 2$) に対する利得が決まった際, その利得を最大とするような (今の 2 戦略系の場合には「最大とする方の」) 戦略が選ばれるということである. 従って, 各トレーダ i は各ステップ l で**更新式 (7) に従って, 自分の入札価格 $b_i(l)$ と多数派の判定 $A(l)$ が逆になるように, 自らの持つ各戦略 a に対する利得 p_{ia} を定め, これらを最大にするような最適戦略を (8) 式に従って決める, という一連の行動をとって行く**ことになる.

さて, いま我々は 2 つの戦略が選択できる場合を考えているわけであるから, 具体的には次の 2 本の方程式で $a = 1, 2$ それぞれの戦略の利得を決めて行くことになる.

$$p_{i1}(l+1) \quad = \quad p_{i1}(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} \left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} R^{i1}_{\boldsymbol{\lambda}} \right) A(l) \tag{10}$$

$$p_{i2}(l+1) \quad = \quad p_{i2}(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} \left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} R^{i2}_{\boldsymbol{\lambda}} \right) A(l) \tag{11}$$

そこで

$$q_i(l) \quad = \quad \frac{1}{2}(p_{i1}(l) - p_{i2}(l)) \tag{12}$$

で 2 つの戦略間の利得の差 $q_i(l)$ を定義し,

$$\xi^i_{\boldsymbol{\lambda}} \quad = \quad \frac{1}{2}(R^{i1}_{\boldsymbol{\lambda}} - R^{i2}_{\boldsymbol{\lambda}}) \tag{13}$$

とおくと, (10)(11) 式を辺々引くことにより

$$q_i(l+1) \quad = \quad q_i(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} \xi^i_{\boldsymbol{\lambda}} A(l) \tag{14}$$

と $q_i(l)$ に関する更新式に書き直すことができる. この方程式 (14) をこのシステムを記述するための基本方程式の一つとしよう.

さて, 式 (14) は入札価格の総和 $A(l)$ を含むので, 我々は次にこれに関する更新式を求めることにする. まず, その定義より

$$A(l) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{N}} b_i(l) = \sum_i \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} R^{i\tilde{a}_i(l)}_{\boldsymbol{\lambda}} \tag{15}$$

[8] 先に「入札価格」という言葉を用いて各トレーダの提示する判断 (価格) : $b_i(l)$ を導入したが, 通常の「オークション」では各トレーダからの入札価格を参照し, 最も高い値で「買い」を出したトレーダがその商品を「落札」する. 従って, そこでの勝者は最終的に落札したトレーダであって, ここで考えている勝者であるところの「少数派」とは異なる. しかし, 我々がここで調べようとしている「総入札価格 : $A(l)$」あるいはそれの「揺らぎ (ボラティリティ)」に注目する限りは勝者を一人選び出す必要はなく, その意味でこのマイノリティ・ゲームはオークションの一面をも合わせ持った数理モデルであると言うこともできる.

であるから, 次で定義される新しい変数 $w_{\boldsymbol{\lambda}}^i$:

$$w_{\boldsymbol{\lambda}}^i \quad = \quad \frac{1}{2}(R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i1} + R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i2}) \tag{16}$$

を導入すると

$$R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i\tilde{a}(l)} \quad = \quad w_{\boldsymbol{\lambda}}^i + \mathrm{sgn}[q_i(l)]\xi_{\boldsymbol{\lambda}}^i \tag{17}$$

が成り立つことに注意しょう. 実際, $q_i(l) > 0$, つまり, $p_{i1}(l) > p_{i2}(l)$ で戦略 1 が選ばれるならば, 式 (17) より, $R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i\tilde{a}(l)} = R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i1}$ となるし, 逆に, $q_i(l) < 0$, つまり, $p_{i2}(l) > p_{i1}(l)$ で戦略 2 が選ばれるならば, 式 (17) より, $R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i\tilde{a}(l)} = R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i2}$ でつじつまが合っている. 従って, 入札価格の総和 $A(l)$ に関する方程式は

$$A(l) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} \left\{ w_{\boldsymbol{\lambda}}^i + \mathrm{sgn}[q_i(l)]\xi_{\boldsymbol{\lambda}}^i \right\} \tag{18}$$

となる. 従って, 我々がここで調べている市場履歴をともなったマイノリティ・ゲームのシステムは式 (14)(18) でミクロに記述されることになる. ここで強調しておきたいのは, この方程式 (14)(18) を良く見てみると, 個々のトレーダの利得決定方程式であるミクロな式 (14) の中には, マクロな量である総入札価格 $A(l)$ が現れており, 逆に, 市場のマクロな情報を担う総入札価格 $A(l)$ の方程式 (18) の中にはミクロな情報である個々のトレーダの利得 $q_i(l)$ (正確に言えば, 2 つの戦略による利得の差) が現れている. このことは, 我々が当初予想したように, **市場においてはミクロな情報とマクロな情報は無相関ではなく, 互いに絡み合っているという事実が, ここで導かれた決定方程式に反映されている**ことを意味する.

以上により, ここからの我々の目標は, これらのミクロな意思決定方程式を何らかの方法によって解析し, 市場のマクロな振る舞いをそこから導き出し, 様々な統計的性質を調べていくことである. その際の方法としては計算機による数値シミュレーションが有力である.

1.3 ボラティリティとその時間変化

我々はシステムの時間変化を式 (14)(18) から知ることになるが, どのような物理量に着目したら良いのであろうか ?

$q_i(l)$, あるいはその符号を取った $\mathrm{sgn}[q_i(l)]$ はトレーダ i が時刻 l に $a = 1, 2$ どちらの戦略をとったかという情報であるから, この値そのもので言えば, $(1, -1, 1, -1, -1, \cdots, -1, \cdots)$, あるいは, この時間変化を各トレーダの採用した戦略の時系列パターンに直した $(1, 2, 1, 2, 2, \cdots, 2, \cdots)$ 等を表している. しかし, これはトレーダ個人の意思決定の時系列であり, その意味でミクロな量である. 従って, このような, ある特定のトレーダの挙動にのみ着目しても, システム全体のマクロな振る舞いは当然わからない. そこで, 統計力学的な考え方 — ミクロな構成要素の挙動にはふれないで, マクロに定義される量の変化を追う — という精神のもとに, まずは各エージェントからの入札価格の総和 $A(l)$ に着目し, これを有限のサイズの系 (ここでは $N = 1001$ とする) に対し, (14)(18) を計算機上でシミュレートすることにより調べてみよう.

1.3.1 総入札価格の時間変化

まずはそのダイナミックスが (18) 及び (14) で記述される総入札価格の時間変化を調べよう. このとき, この $A(l)$ の値が連続する 2 つの時刻間 $A(l)$,$A(l+1)$ でどのような分布をするのかをそれ

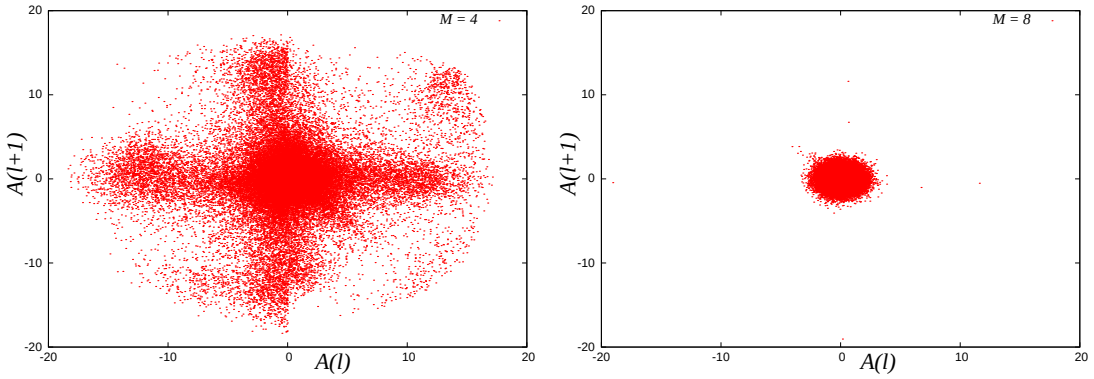


図 2: 総入札価格の連続する 2 ラウンド間隔の値 $A(l)$ と $A(l+1)$ のプロット．左は $M = 4(P = 2^4 = 16)$, 右が $M = 8(P = 2^8 = 256)$. $\zeta = 0$ の real memory の場合．システムサイズは $N = 1001$.

ぞれ縦軸横軸に重ね打ちして調べてみよう．結果を図 2 に示す．この図より, 遡った市場の履歴数 M が比較的小さい場合 $(M = 4)$ には, この図 2 の左図より, $A(l)$-$A(l+1)$ のプロットはかなり広範囲に分散したものになる．一方, 用いることのできる履歴数 M が多くなり, $M = 8$ となるとこの広がりは小さくなっている (右図参照). 従って, 明らかに総入札価格 $A(l)$ のばらつきはトレーダの用いることのできる履歴数 M に依存する．「市場の安定性」という観点から見ると, ここでの結果より, 各トレーダが市場の履歴をより長い過去まで遡って利用できるシステムの方が, 市場全体としては安定化する傾向があると言える．

1.3.2　ボラティリティ — 総入札価格の揺らぎ —

図 2 の結果から, 我々が着目すべきなのは総入札価格それ自体の時間変化ではなく, その「揺らぎ」であることがわかった．つまり, 我々は次の量:

$$\sigma^2(L) \quad = \quad \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{l} A(l)^2 - \left\{\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} A(l)\right\}^2 \tag{19}$$

で総入札価格の「揺らぎ」を定義し, これをラウンド L まで累積した量とし, L の関数として調べてみようというわけである．この量 σ^2 を経済学 (金融工学) では**ボラティリティ**と呼んでいる[9]．このボラティリティはここで示したような, ある金融商品の不安定性を示す量であり, ボラティリティが大きい商品に対して各トレーダは大きく勝つ場合もあるけれども, 何しろ価格の揺らぎが大きいので, ひどく負けるケースもかなりの頻度で現れ, 商品の取引き自体がギャンブル的要素を持つようになる．図 3 にボラティリティの時間変化を示した．左は real memory $(\zeta = 0)$ の場合で右が fake memory $(\zeta = 1)$ の場合に対応する．それぞれ $M = 4(P = 2^4 = 16)$, 及び, $M = 8(P = 2^8 = 256)$ に対してプロットしてあるのだが, 明らかに遡る履歴数が大きい場合の方がボラティリティは小さい．この傾向は不思議なことに, real memory $(\zeta = 0)$ でも fake memory $(\zeta = 1)$ でも変わらない．ちなみに, 同じ M の値で異なる線は異なる情報ベクトル, 初期値などの「データ」に対応している．従って, 遡る履歴数が少ない場合にはデータによるばらつきも大きい．ところで, 履歴を過去まで遡って利用すればするほどボラティリティを小さく押さえること, 言い方をかえれば, 市場を安定

[9] 通常, ボラティリティσ^2 とは $\sigma^2(L)$ でラウンド数 L を無限大にした極限で定義される．しかし, ここではこの量が定常状態へ向かうプロセスにも興味があるので, $\sigma^2(L)$ と σ^2 をともにボラティリティと呼ぶことにする．

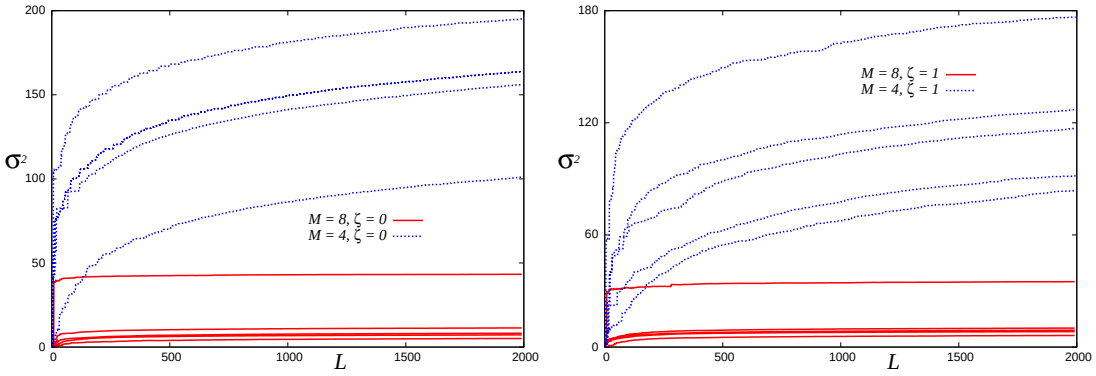


図 3: ボラティリティの時間変化. 左は real memory ($\zeta = 0$) の場合で右が fake memory ($\zeta = 1$) の場合. $M = 4(P = 2^4 = 16)$, 及び, $M = 8(P = 2^8 = 256)$ に対してプロットしてある. 異なる線は異なる情報ベクトル, 初期値に対応している. システムサイズ (トレーダ数) は $N = 1001$.

化させることができるであろうか? 直観的にその予想は正しそうではあるが, この問い具体的に答えるために, 次節ではボラティリティの履歴数 M 依存性について調べてみよう.

1.4 ボラティリティの履歴数依存性

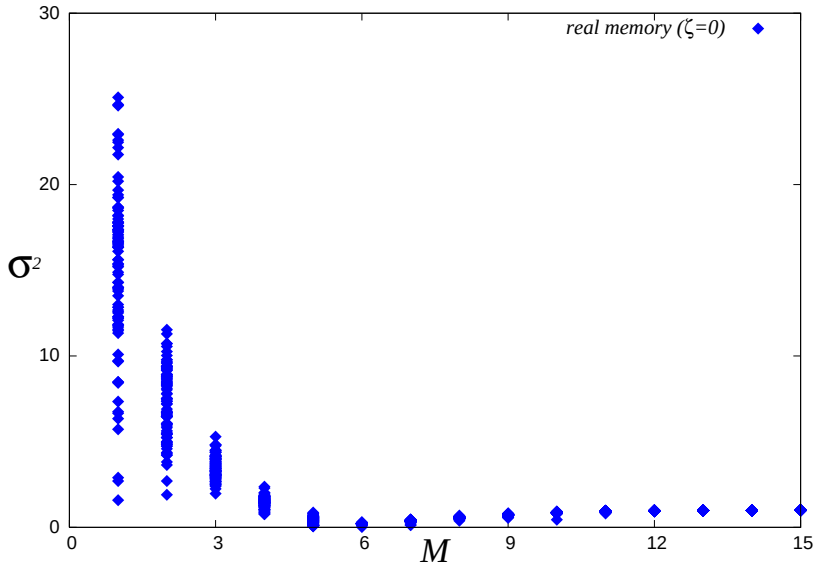


図 4: ボラティリティの履歴数 M 依存性. real memory ($\zeta = 0$) の場合.

図 4 に real memory ($\zeta = 0$) の場合のボラティリティ:

$$\sigma^2 \quad = \quad \lim_{L\to\infty} \sigma^2(L) \tag{20}$$

の履歴数 M 依存性をプロットした. この図より, **ボラティリティを最小化するような最適な履歴**

数 M が存在することがわかる[10]. また, 意外なことに, この依存性は real memory($\zeta = 0$) でも fake memory($\zeta = 1$) でも変わらない.

以上で市場の履歴をともなったマイノリティ・ゲームに関し, 計算機シミュレーションによりわかってきているごく一部を紹介した. 計算機シミュレーションは有限サイズのシステム (これらの実験ではいずれも $N = 1001$ 程度) を扱うため, 各種の統計誤差は考慮しなければならない. ここに示した結果は市場で公に開示される履歴情報が総入札価格の安定性— 市場の安定性 — に及ぼす影響を調べるための有益な指針, より数学的/解析的に調べていくための動機づけを与えるものと位置づけられる. もちろん, 実際の市場では公開される各商品の価格変動に対し, 各トレーダが「売り」「買い」のマイノリティ・グループへ属することを目標として行動するわけではないし, また, 各ラウンドで提示される情報も「売り」「買い」の 2 値化された符号ではなく, 直前の数ラウンドからどの程度入札価格が上がったか下がったか, などの変動幅それ自体である場合が多い[11]. 例

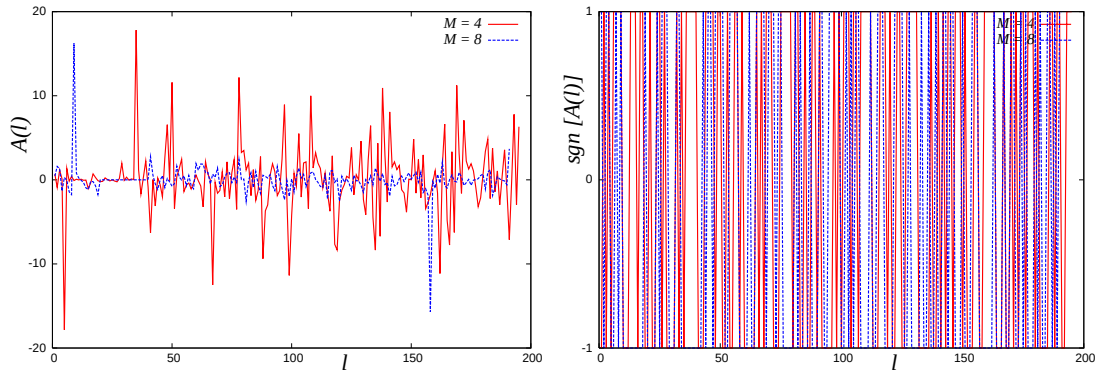


図 5: 総入札価格 $A(l)$ の時間変化 (左) と総入札価格の符号 $\mathrm{sgn}[A(l)]$ の時間変化 (右).

えば, 図 5 はここで得られた総入札価格 $A(l)$ とその符号 $\mathrm{sgn}[A(l)]$ の時間変化を表しているが, 明らかに総入札価格の変動幅そのものの情報を含む左図の方がトレーダの意思決定に対して有益であるように思われる. また, ここでゲームの開始から終了まで固定した各トレーダの戦略ベクトルも, 変化の時間スケールは緩やかではあるけれども時間的に変化する (各トレーダの市場情報からの「学習効果」により変化する) と考えた方が, より現実の状況に近いかもしれない. しかし, そのような場合でもここで紹介したゲームを逐次改良, 拡張することにより, そうした状況を反映した数理モデルの振る舞いを計算機実験などで解析することで, トレーダの動きである「ミクロ」から市場の振る舞いである「マクロ」な性質を調べていくことは可能であるように思われる.

そのような模型の改良の際に我々の指針となるべきなのは, やはり, 実際の金融データである. 経済学が実証的科学である以上, そのような実データの存在を無視することはできない. よって, マクロな市場の情報を担う金融データそのものの解析も, 経済現象を説明する数理モデルを提案し, それに基づく理論を構築していく上でとても重要になる. そこで次回からはそのような金融データの一つである, 為替レートの変動を確率過程にみたて, その統計的性質を調べていくためのいくつかの方法, 道具立てについて解説していくことにしよう.

[10] つまり, ネット上に公開する株価をコンピュータ上に蓄積された過去数年にわたる履歴まで遡って顧客に提示する場合, 「その履歴が長ければ長いほど価格が安定化する」ということは言えないことになる.

[11] 例えば Google 検索で「株価 ソニー」と打ち込むとソニーの株価が表示されるが, 多くのトレーダは株価の上がり下がりの 2 値化された情報に基づき行動するのではなく,「株価自体がどれくらいの幅で上がり続けているか (あるいは逆に下がり続けているか)」という, 中・短期間にわたる「トレンド」を参考にする場合が多いのではないだろうか.

2　金融データと確率過程

ここでは為替レートなどの金融時系列データを確率過程として扱い, それを人工的に再現するような確率モデル, その確率モデルを特徴つける基本的な統計量について学ぶ. 前回のゲーム理論で述べたように, この種のレート変動をミクロな立場から説明することが我々の最終的な目標であるが, レート変動の時系列の統計的性質を詳細に調べることによっても有益なマクロ情報を得ることができる. 例えば, 図 6 はある確率モデルを用いて為替レート (例えば 1 ドル当たり何円になるか

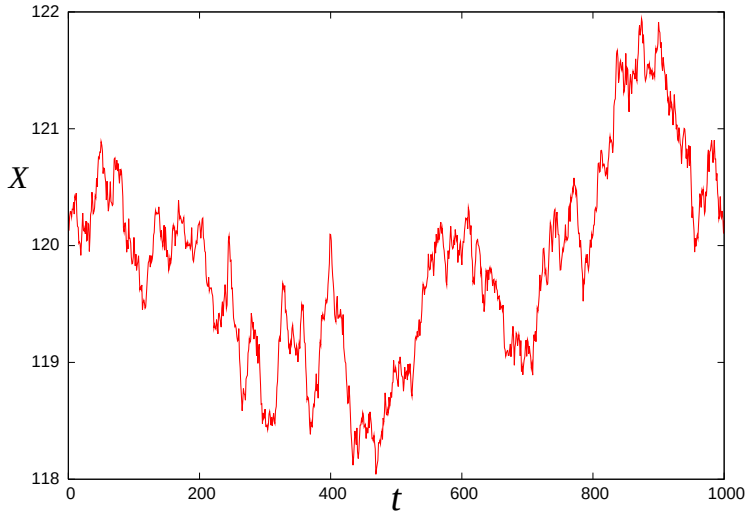


図 6: 確率モデルによって人工的に生成した為替レート変動

という値段) の時系列: X_t を計算機上で人工的に生成したものであるが, 具体的には, このレート変動が前回の講義でみたソニー銀行の円ドル為替レートの時系列をよく再現しているか否か, というのがここでの問題になる. その際, 我々が考えなければならないのは, 確率モデルの生成する時系列と実データの何を比較したらよいのか, その観点で両者の差が大きい場合には確率モデルの何を修正したらよいのか, またそのような確率モデルの適切な候補に対して, 工学的にどのような応用が考えられるかということなどである.

今回と次回 (1/21) の前半では, そうした金融データの確率モデル化を考える際に必要となる確率過程の復習をしておくことにする. その際, あまり数学的に厳密な議論に踏み込むことはせず, 主に計算機を用いた数値実験を通じて直観的な理解を深めることを目指す. 時間があれば各節で説明されている例を自分でプログラミングを行うことにより確認しながら読み進めていくと理解が深まるものと思われるし, そうされることを期待している.

2.1　確率モデルとその統計的性質

さて, 図 1 に載せた為替レートがどのような確率モデルから生成されたものなのかを調べるために, 時刻 t でのレート X_t と次の時刻でのレート X_{t+1} の差を**リターン**として

$$Y_t \equiv X_{t+1} - X_t \tag{21}$$

で定義しよう．このとき, X_t が確率的に変動するならば, Y_t も確率変数であるはずなので, ここでのレート変動は (21) 式を書き直した漸化式: $X_{t+1} = X_t + Y_t$ で与えられ, 直前のレートの値に Y_t なる「ノイズ」が加わったものとして逐次生成されるものとする．各時刻で直前のレート値に加わるノイズ Y_t が各時刻で独立に同一の確率分布から生成されているものと仮定すれば, Y_t の統計的性質を調べるにはこの量 Y_t を $t = 0$ から $t = 20000$ 程度まで観測し, そのヒストグラムを取ってみればよい．具体的には図 6 を与えるデータ:

```
1 120.074612
2 120.178779
3 120.180312
4 120.130503
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
```

に対し, $Y_1 = 120.178779 - 120.074612 = -0.567341$ などを算出し[12], Y に関するヒストグラムを作成する．その結果を図 7 に載せよう．この図の実線がそのヒストグラムである．ただし, ここでは

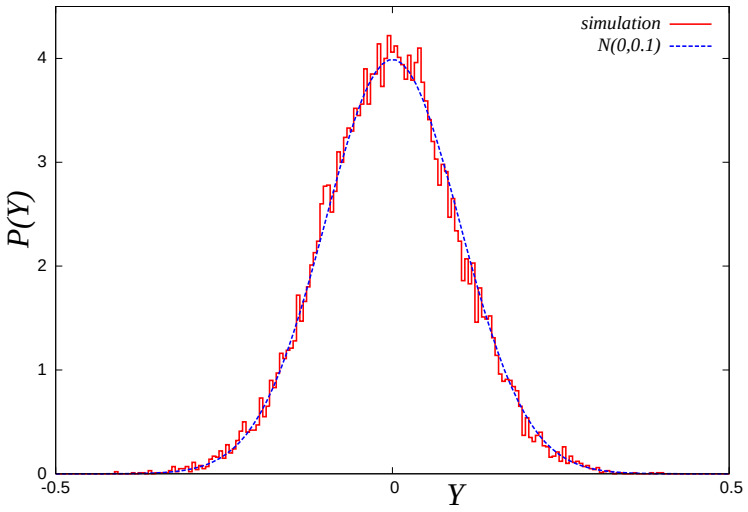


図 7: リターン Y のヒストグラム．実線は標準偏差 $\sigma = 0.1$ の正規分布.

このヒストグラムを確率分布にするために適当な規格化を施していることに注意されたい．一方, 図中の実線は標準偏差が $\sigma = 0.1$ の正規分布である．この図から明らかに両者は良く一致していることがわかる．従って, 図 1 で人工的金融データ X_t は次の確率モデルから生成されたものであることがわかる[13]

$$X_{t+1} = X_t + Y_t, \quad P(Y_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{Y_t^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma = 0.1 \text{ (時間によらない一定値)} \tag{22}$$

[12] このデータの第 1 列はレートが変動した時刻を表す．この場合, 一定間隔ごとにレートが変動するが, 実際の金融データではこの様にならない場合が多い.

[13] ここでは人工的にそのような確率モデルでレート変動を生成したので, この一致は当然である．実際の金融データでは, 後にみるように (21) 式の妥当性, 各時刻での分布の独立性, 同一性などを吟味しながら実データを説明する確率モデルを組み立てなければならない.

このとき (22) 式は N ステップ後のレートの値 X_N として次のように書き直すことができることに注意しょう.

$$X_N \quad = \quad \sum_{t=0}^{N-1} Y_t \tag{23}$$

ここで, 簡単のため, 初期条件として $X_0 = 0$ としたことに注意されたい. また, ここでの解 X_N 自身も確率変数になっていることも注意しなければならない. よって, 確率変数 X_N の統計的性質, つまり, X_N の従う分布がわかれば図 6 に示した人工的為替レートの様々な統計量を計算することができる. そこで, まずはこの X_N の平均値と分散を計算してみよう. まず平均値は

$$E[X_N] \quad = \quad E\left[\sum_{t=0}^{N} Y_t\right] = E[Y_0] + E[Y_1] + \cdots E[Y_{N-1}] = 0 \tag{24}$$

となる. ここに $E[\cdots]$ は確率変数 $\cdots$ の平均を意味する. また分散は平均値がゼロであったことを考慮すると

$$E[X_N^2] \quad = \quad E\left[\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} Y_k Y_l\right] = \sum_{k=0}^{N-1} E[Y_k^2] + 2\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l\neq k} E[Y_k]E[Y_l] = N\sigma^2 \equiv \sigma_N^2 \tag{25}$$

となる. 従って, 確率変数 X_N は平均ゼロ, 分散 $\sigma_N^2 = N\sigma^2$ を持つことになる. すなわち, X はその平均値からステップ数の平方根 $\sim \sqrt{N}$ で離れていくというランダムウォークとして良く知られた結果が得られる. ここで述べた確率過程 (特にその連続時間版) は**ウイナー過程**と呼ばれている.

2.1.1　中心極限定理 — 正規分布への収束 —

中心極限定理によれば, 確率変数 X_N をここで得られた標準偏差 σ_N で割ったもの

$$Z_N \quad \equiv \quad \frac{X_N}{\sigma_N} = \frac{Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_{N-1}}{\sqrt{N}\sigma} \tag{26}$$

は $N \to \infty$ で平均ゼロ, 分散 1 の正規分布 $\mathcal{N}(0,1)$ に従う. つまり,

$$P_G(Z_\infty) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{Z_\infty^2}{2}\right) \tag{27}$$

である. ここで N を「ステップ数」とみなすと, 確率変数 Z_N の従う分布はステップ数とともに

$$P(Z_1) \to P(Z_2) \to P(Z_3) \to \cdots \to P(Z_N) \to \cdots \to P_G(Z_\infty) \tag{28}$$

のように正規分布に収束する. ここで考えた例では (26) 式右辺の和を構成する各 Y_t の従う分布は平均ゼロ, 分散標準偏差 σ の正規分布であったが, 中心極限定理によれば, Y_t が有限の分散を持つならば, (26) 式で定義される確率変数 Z_N は $N \to \infty$ の極限で正規分布へと収束することが知られている.

例えば, Y_t の従う分布を定数 c を有限値として

$$P(Y_t) \quad = \quad \frac{1}{2}\,\delta(Y_t - c) + \frac{1}{2}\,\delta(Y_t + c) \tag{29}$$

と置けば, この確率変数の平均はゼロ. 分散を評価すると

$$E[Y_t^2] \quad = \quad \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(Y_t - c)\, Y_t^2 dY_t + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(Y_t + c)\, Y_t^2 dY_t = c^2 < \infty \tag{30}$$

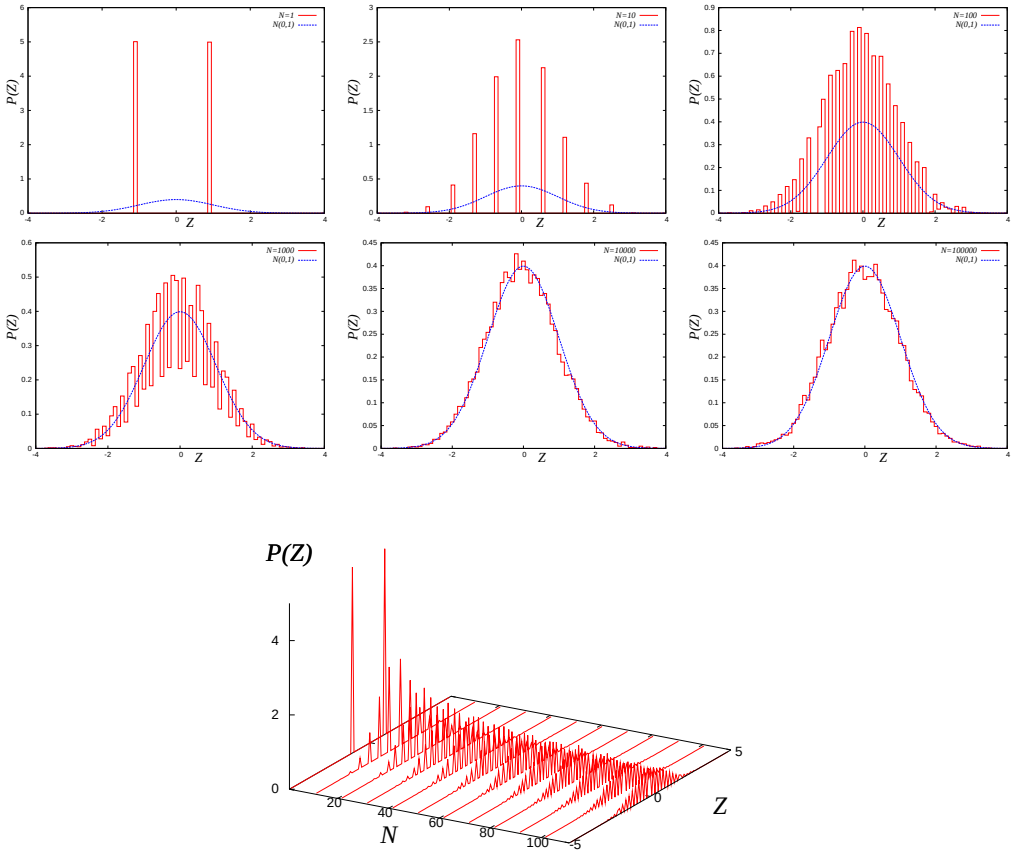


図 8: $P(Y_t) = (1/2)\,\delta(Y_t - c) + (1/2)\,\delta(Y_t + c)$ に従う確率変数 Y_t で構成された Z_N の従う分布が N の増加とともに正規分布 $\mathcal{N}(0,1)$ へと近づく様子. ここでは $c = 0.01$ に選んでおり, ヒストグラムの作成では各 10000 回のサンプリングを行っている. $N = 10000$ と $N = 100000$ のヒストグラムがほとんど変わらないのは $N = 10000$ 程度で実質的に正規分布へと収束したため. 下は確率分布 $P(Z_N)$ の「時間発展」の様子.

であるから有限値を持つ. よって, この Y_t による確率変数 Z_N は N の増加とともに平均値ゼロ, 分散 1 の正規分布 $\mathcal{N}(0,1)$ へと近づいていくはずである. これを実際に計算機による数値実験で確かめてみよう. 図 8 より, 明らかに N の増加とともに Z_N の従う分布は正規分布 $\mathcal{N}(0,1)$ に近づいていくことがわかる. また, これをもう少し明示的に見るために, 分布の「時間発展」の様子を 3 次元的にプロットしたものを図 8(下図) に載せておく.

2.2 安定分布

前節では有限分散を持つ確率変数の和が要素数の増加とともに $P(Z_1)\cdots P_G(Z_\infty)$ のように正規分布に収束することをみた. この考察を拡張して, ある確率分布 (分散が有限とは限らない) に従う確率変数の和の従う確率分布を考えてみる.

例えば, $x = X_1$ と $x = X_2$ の従う確率分布をそれぞれ $f(x)$, $g(x)$ とすると, この確率変数 X_1, X_2 の和 $X = X_1 + X_2$ の従う分布は

$$P_2(X) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt f(X-t)g(t) = f * g \tag{31}$$

のように関数の畳み込みの形で書ける．よって, 畳み込み積分のフーリエ変換はそれぞれの関数のフーリエ変換の積で書けたことを思い出すと, (31) 式両辺にフーリエ変換を施すことで

$$\phi_2(q) \quad = \quad \hat{f}(q)\hat{g}(q) \tag{32}$$

が得られる．ここに

$$\phi_2(q) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} P_2(X)\,\mathrm{e}^{-iqX}dX \tag{33}$$

$$\hat{f}(q) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-iqx}dx, \quad \hat{g}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{e}^{-iqx}dx \tag{34}$$

と定義したことに注意されたい．従って, X_1, X_2 の従う確率分布が同一の $P(x)$ であるならば, つまり, 定義域全体で $f(x) = g(x) = P(x)$ ならば, 式 (32) を

$$\phi_2(q) \quad = \quad \{\phi(q)\}^2, \;\; \phi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\mathrm{e}^{-iqx}dx \tag{35}$$

と書き直すことができる．これを一般化し, 確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ の従う分布が同一の $P(x)$ であるならば, $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ の従う分布 $P_N(X)$ のフーリエ変換 $\phi_N(q)$ は $P(x)$ のフーリエ変換 $\phi(q)$ と

$$\phi_N(q) \quad = \quad \{\phi(q)\}^N \tag{36}$$

の関係で結ばれることになる．このとき, ϕ_N の逆フーリエ変換:

$$P_N(X) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_N(q)\,\mathrm{e}^{-iqX}dq \tag{37}$$

によって得られる分布 $P_N(X)$ の関数形が $P(x)$ と同一の場合, この分布 $P(x)$ を**安定分布**と呼ぶ.

2.2.1　正規分布とローレンツ分布の安定性

以下ではいくつかの安定分布について見ていく.

(1) $P(x)$ **が正規分布の場合**

これは前節で見たように有限の分散を持つ確率分布であるから, ウイナー過程の N ステップ後の確率変数 $X = X_1 + \cdots + X_N$ の従う確率分布 $P_N(X)$ も同じ正規分布を持つはずであり, 安定分布であることがわかる．しかし, 以下では本節での議論に従い, この事実を明示的に示してみる．正規分布 $\mathcal{N}(0, \sigma)$ のフーリエ変換は $\gamma \equiv \sigma^2/2$ として

$$\phi(q) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{iqx} = \mathrm{e}^{-\gamma q^2} \tag{38}$$

で与えられる．従って, $\phi_N(q) = \{\phi(q)\}^N = \mathrm{e}^{-N\gamma q^2}$ であるから, この逆フーリエ変換は

$$P_N(X) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-N\gamma q^2}\,\mathrm{e}^{-iqX}dq = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}\sigma}\exp\left(-\frac{X^2}{4N\sigma^2}\right) \tag{39}$$

となる．よって, $P_N(X)$ の関数形は $P(x)$ と同じガウス関数であるから正規分布は安定分布であることがわかる.

(2) $P(x)$ **がローレンツ分布の場合**

和 $X = X_1 + \cdots + X_N$ の各要素: $X_1, X_2, \cdots, X_N$ の従う分布 $P(x)$ が

$$P(x) \quad = \quad \frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{\gamma^2 + x^2} \tag{40}$$

で定義されるローレンツ分布の場合, そのフーリエ変換は

$$\phi(q) \quad = \quad \frac{\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{iqx}}{\gamma^2 + x^2}dx = \mathrm{e}^{-\gamma|q|} \tag{41}$$

となる[14]. 従って, $\phi_N(q) = \mathrm{e}^{-N\gamma|q|}$ であるから, これの逆フーリエ変換を計算してみると

$$P_N(X) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-N\gamma|q|}\,\mathrm{e}^{-iqX}dq = \frac{N\gamma}{\pi}\frac{1}{(N\gamma)^2 + X^2} \tag{42}$$

が得られる[15]. 明らかにこれは $P(x)$ と同じローレンツ関数である. よって, ローレンツ分布は安定分布であることがわかる.

2.2.2　レビ分布とレビ過程

正規分布とローレンツ分布がともに安定分布であることがわかった. また, それぞれの分布のフーリエ変換　— **特性関数** — は $\mathrm{e}^{-\gamma q^2}, \mathrm{e}^{-\gamma|q|}$ で与えられた. このとき, 一変数 α を用いて正規, ローレンツの両者を含む形でこれらの特性関数を拡張した

$$\phi(q) \quad = \quad \mathrm{e}^{-\gamma|q|^\alpha} \tag{43}$$

を考えてみたい. ここで, $\alpha = 2$ で正規分布, $\alpha = 1$ でローレンツ分布が復元できることに注意しょう. このとき, この特性関数が与える分布 $P_L(X)$ がどのような分布であるかを見るために, この特性関数の逆フーリエ変換を求めてみると

$$P_L(X) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dq\,\mathrm{e}^{-\gamma|q|^\alpha}\,\mathrm{e}^{-iqX} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dq\,\mathrm{e}^{-\gamma|q|^\alpha}\cos(qX) \tag{44}$$

が得られる. この分布を $\alpha = 1.5$ に対してプロットしたものを図 9 に載せよう. この図 9(左) 中の組み込み図には分布の「すそ」の部分の両対数プロットを示す. この組み込み図より, この分布 $P_L(X)$ は X の大きな領域では正規分布における「平均」や「分散」, 指数分布における「緩和時間」のような特徴的なスケールを持たない冪分布に従うことがわかる. 実際, (44) 式を $|X| \gg 1$ に対して展開してみると

$$P_L(X) \quad \sim \quad |X|^{-(\alpha+1)} \tag{45}$$

のような冪則に従うことがわかる. この分布 $P_L(X)$ を**レビ分布**と呼ぶ. レビ分布は安定分布である. 図 9(右) に示したように, 正規分布と比べてレビ分布は「すそ広がり」な分布である. 従って, 金融データの確率モデルとして $X_{t+1} = X_t + Y_t$ を選び, Y_t をレビ分布から生成すると, レートが

[14] 応用数学の復習になると思うが, この場合には複素数に拡張して積分すると良い. 被積分関数: $\mathrm{e}^{iqz}/(z + i\gamma)(z - i\gamma)$ の特異点が $z = \pm i\gamma$ であるから, そのうちの一つ $i\gamma$ を含む複素平面上の半径 R の半円と実軸上の $[-R, R]$ をつなげた経路でこの関数を積分すると, この経路内の留数が $\mathrm{Res}(i\gamma) = \lim_{z\to i\gamma}(z - i\gamma)\mathrm{e}^{iqz}/(z + i\gamma)(z - i\gamma) = \mathrm{e}^{-\gamma|q|}/2i\gamma$ となるから, 半円上の経路 C_R からの寄与は $R \to \infty$ でゼロとなることを考慮して, コーシーの積分定理を使って $\phi(q) = (\gamma/\pi)2\pi i\,\mathrm{Res}(i\gamma) = \mathrm{e}^{-\gamma|q|}$ が得られる.

[15] $\mathrm{e}^{-iqX} = \cos(qX) - i\sin(qX)$ と展開して各々部分積分.

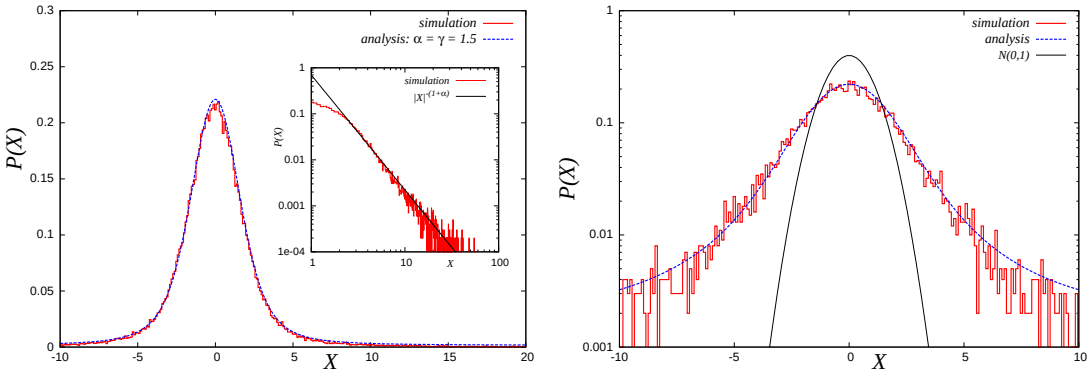


図 9: $\alpha = 1.5$ に対する $P_L(X)$. 実線は計算機上で人工的に作成したヒストグラム. 破線は (44) を数値的に積分することで得られる解析解. 組み込み図はこの分布の「すそ」の様子を表す両対数プロット. 右図では縦軸を対数目盛りに変えてプロットしたものを比較のために正規分布とともに示した.

大きく変動するチャンスは Y_t を正規分布に選んだウイナー過程と比べて大きくなる. このような確率過程を**レビ過程**と呼ぶ. また, ウイナー過程と比べ, レート自体が大きくジャンプするチャンスが多いことから**レビ・フライト (Lévy flight)** と呼ばれることも多い.

金融データの再現, モデル化において, このような大きなレート変動のジャンプの生じる頻度の高い確率過程が適切なのか, あるいはウイナー過程でよいのかは, もちろん扱う金融データに依存する. 従って一見すると地味な作業であるデータ解析, 統計解析も適切な確率モデルを構築する上では重要なプロセスである.

2.2.3　カオス写像を用いたレビ分布からのサンプリング

計算機上で人工的にレビ過程を生成させる場合, レビ分布 (44) からのデータ・サンプリングが必要になる. この際, 一様乱数を用いて (44) 式に比例するようにデータ点を生成させることもできるが, ここではある種のカオス写像からのサンプリングによりレビ分布が生成できることを見ておこう.

既に情報工学実験では $[0, 1]$ の一様分布を生成するために次のロジスティック写像:

$$X_{n+1} \quad = \quad aX_n(1 - X_n) \tag{46}$$

を用い, $a = 4.0$ の場合にカオス・アトラクタを持つ軌道を生成させ, そこからのサンプリングにより, 擬似的な一様分布が生成できることを学んだ (図 10 参照). このようなカオス写像を改良することでレビ分布を人工的に生成させることを考える.

この際, 次のようなカオス写像の重ね合わせによってもレビ分布からのサンプリングを行うことができる (Umeno 2005).

$$X_{n+1} \quad = \quad \left| \frac{1}{2} \left(|X_n|^\alpha - \frac{1}{|X_n|^\alpha} \right) \right|^{1/\alpha} \mathrm{sgn} \left(X_n - \frac{1}{X_n} \right) \tag{47}$$

上記の写像を N 個の異なる初期条件から更新させ, 各々を十分にカオス・アトラクタに落ち込ませたのちのサンプリング点 $X(i),\ i = 1, \cdots, N$ の N 個からなる次のような重ね合わせを考える.

$$X \quad = \quad \frac{\sum_{i=1}^{N} X(i)}{N^{1/\alpha}} \tag{48}$$

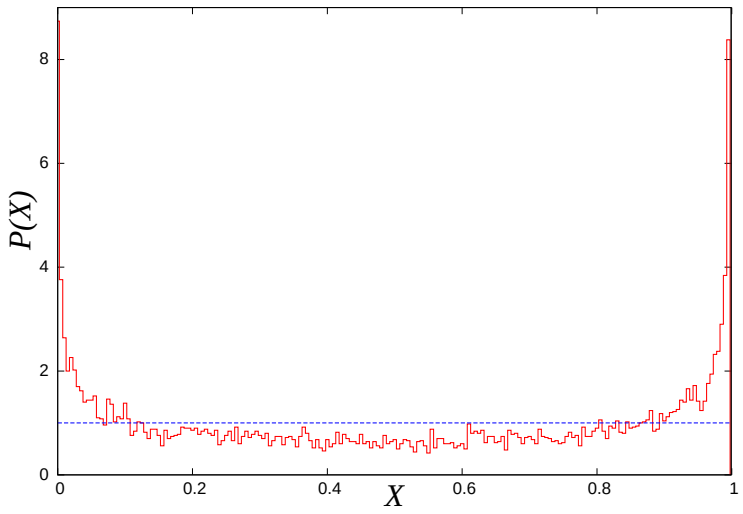


図 10: ロジスティック写像 $X_{n+1} = 4X_n(1 - X_n)$ からのサンプリングによるヒストグラム.

この重ね合わせを施された変数 X を再サンプリングすることで, 重ね合わせの個数 N の増加とともに確率変数 X はレビ分布に従うようになる. 図 11 にその結果を載せる. この図より, 写像の重ね合わせの個数 N を増加させることによって, このカオス写像からのサンプリング点からなるヒストグラムは (44) 式を数値積分した解析解に近づいていくことがわかる.

2.3 ボラティリティ変動モデル

前節までみたウイナー過程:

$$X_{t+1} = X_t + Y_t, \ \ P(Y_t) = \mathcal{N}(0, \sigma) \tag{49}$$

において, リターンの分散であるボラティリティ:

$$E[(X_{t+1} - X_t)(X_{t+1} - X_t)] = E[Y_t^2] = \sigma^2 \tag{50}$$

は時間的に変動しない一定値をとるものであった. しかし, 実際の金融データを具体的に調べてみると, このボラティリティ自体が時間的に変動するような場合が多い. そこで, ここではそのようなボラティリティが変動する確率モデルのいくつかを見ておくことにする.

2.3.1 ARCH 過程

金融工学などにおいて, ボラティリティ変動モデルとして最もよく使われるものの一つは **ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) モデル**と呼ばれるものである. 最も単純な ARCH モデルである ARCH(1) 過程は次式で与えられる.

$$X_{t+1} = X_t + Y_t, \ \ P(Y_t) = \mathcal{N}(0, \sigma_t) \tag{51}$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t^2 \tag{52}$$

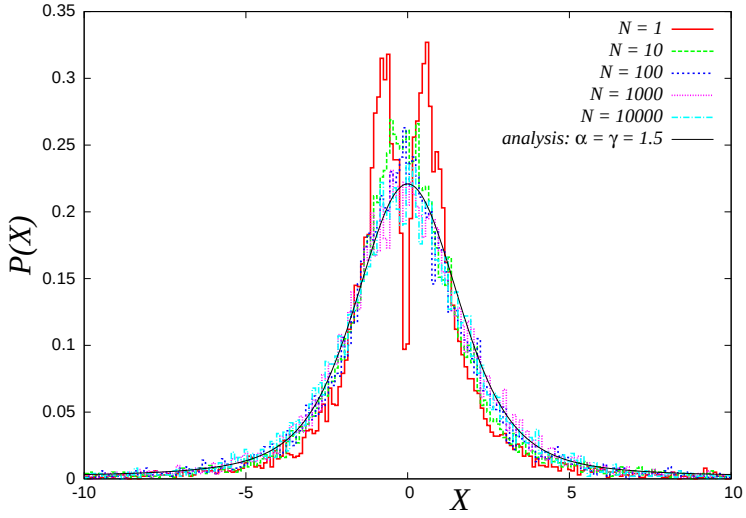


図 11: $\alpha = \gamma = 1.5$ に対するレビ分布 $P_L(X)$. 破線はカオス写像 (47) の N 個の重ね合わせを用いて計算機上で人工的に作成したヒストグラム. 実線は (44) を数値的に積分することで得られる解析解. 重ね合わせの個数 N を増やすと次第に解析解に一致する.

ここで, 確率変数である Y_t の従う分布はウイナー過程と同じ正規分布ではあるが, その分散 (ボラティリティ) は一定ではなく, (52) 式に従って時間的に変化することに注意されたい. また, この分散の更新式から, 分散の時間変化は一つ手前の時刻でのレートの値に依存することになる. 図 12 にボラティリティ σ_t^2, 及び, レートの累積:

$$X_t \quad = \quad \sum_{k=0}^{t-1} X_k \tag{53}$$

をパラメータ値 $\alpha_0 = 0.45, \alpha_1 = 0.55$ に対してプロットしたものを 12 に載せる. この図より, ボラ

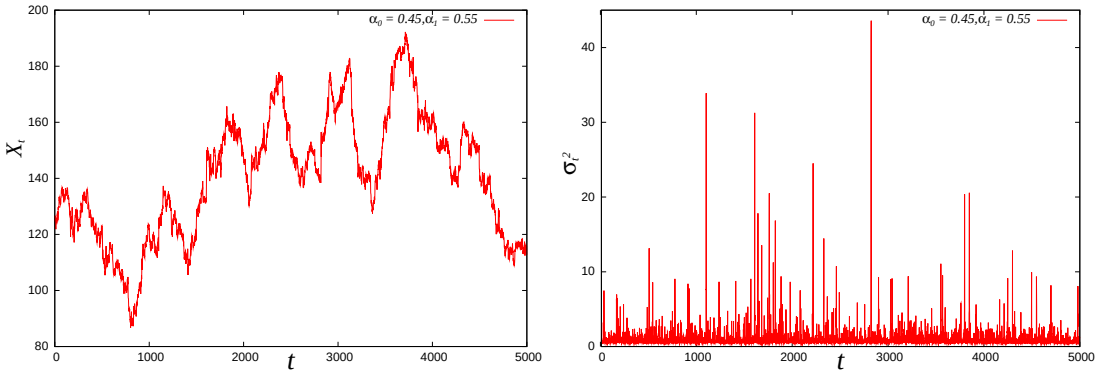


図 12: ARCH(1) 過程のレートの累積 $X_t = \sum_{k=0}^{t-1} X_k$ (左) とボラティリティ σ_t^2 (右) の時間変化. ここではパラメータの値を $\alpha_0 = 0.45, \alpha_1 = 0.55$ と選んでいる.

ティリティが時々大きく上昇しながら時間的に変化する様子を見て取れる.

ところで, 十分に時間が経ったのち, ボラティリティが定常値 σ^2 を持つとすると (52) 式より

$$\sigma^2 = E[\sigma_t^2] = \alpha_0 + \alpha_1 E[X_{t-1}^2] = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma^2 \tag{54}$$

が得られるから, これを σ^2 について解いて

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \tag{55}$$

がその定常値を与える. ここで, 期待値 $E[\cdots]$ は確率変数 $\cdots$ の示す時刻の一つ手前の時刻における変数が確定した条件下で $\cdots$ の従う分布での平均を意味する. 従って, 図 12 におけるパラメータ $\alpha_0 = 0.45, \alpha_1 = 0.55$ に対しては $\sigma^2 = 1$ となる.

また, $Z_t = X_t/\sigma_t$ を**イノベーション (innovation)** として定義し, この変数が $\mathcal{N}(0,1)$ に従うとすると[16], $X_t = Z_t\sigma_t$ の 4 次のモーメント $c = E[X_t^4]$ が具体的に計算できて, (52) 式の両辺の自乗を用いると

$$c \equiv E[X_t^4] = E[Z_t^4]E[\sigma_t^4] = 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 E[X_{t-1}^2] + \alpha_1^2 E[X_{t-1}^4]) \tag{56}$$

が得られる[17]. $E[X_{t-1}^2] = \sigma^2 = \alpha_0/(1-\alpha_1), E[X_{t-1}^4] = c$ より, 上式を c について解くと

$$c = E[X_t^4] = \frac{3\alpha_0^2(1-\alpha_1^2)}{(1-3\alpha_1^2)(1-\alpha_2)^2} \tag{57}$$

が 4 次のモーメントとして得られる. 従って, 2 次のモーメントが $E[X_t^2] = \sigma^2 = \alpha_0/(1-\alpha_1)$ でであったから, X_t の分布の尖り具合を表す**尖度 (Kurtosis)** は

$$\kappa \equiv \frac{E[X_t^4]}{\{E[X_t^2]\}^2} = \frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2} \tag{58}$$

となる. 従って, ARCH(1) 過程の尖度はパラメータ α_1 のみで決まり, 図に示した ARCH(1) 過程の場合の尖度は $\kappa = 23$ となる. 実際には, 金融の実データ解析から尖度を計算し, その値を再現するように (58) 式から ARCH(1) モデルのパラメータ α_1 を決めることになる.

2.3.2 GARCH 過程

ARCH 過程はボラティリティの時間発展の式 (ARCH(1) モデルの場合には (52) 式) に過去の時刻でのボラティリティの値を逐次加えることで一般化することができる. このようにして一般化された確率モデルを **GARCH (Generalized ARCH) モデル**と呼び, 最も単純な GARCH モデルである GARCH(1,1) 過程は

$$X_{t+1} = X_t + Y_t, \;\; P(Y_t) = \mathcal{N}(0, \sigma_t) \tag{59}$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 \tag{60}$$

で与えられる. ARCH(1) のときと同様の解析により, GARCH(1,1) 過程の定常分散と尖度はそれぞれ

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1} \tag{61}$$

$$\kappa = \frac{3(1+\alpha_1^2-2\alpha_1\beta_1-\beta_1^2)}{1-3\alpha_1^2-2\alpha_1\beta_1-\beta_1^2} \tag{62}$$

で与えられる. 図 13 にパラメータの値を $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = (0.4, 0.3, 0.3)$ の場合 (尖度 $\kappa = 4.17$) の GARCH(1,1) 過程に対するリターン Y_t の分布を載せる.

[16] この場合を特に「強 ARCH 過程 (*strong ARCH process*)」と呼んでいる.
[17] $E[Z_t^4]$ は $\mathcal{N}(0,1)$ の 4 次のモーメント 3 であることに注意.

ここではいくつかの代表的なボラティリティ変動モデルについて述べたが, これ以外にも様々な確率モデルが提案されている. そのどれが適切なのかは, もちろん, 実際の金融データとの整合性を計りながら選ばなくてはいけない. そのようなデータ解析の一部を次回の後半以降に紹介したい.

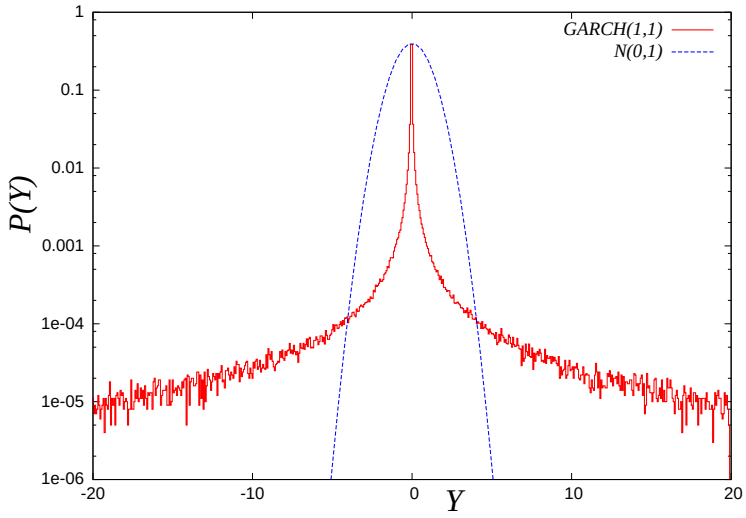
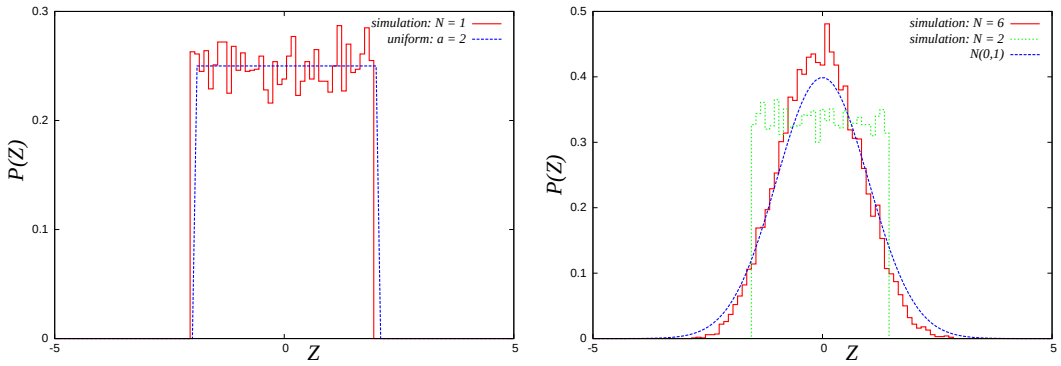


図 13: パラメータの値 $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = (0.4, 0.3, 0.3)$ の場合 (尖度 $\kappa = 4.17$) の GARCH(1,1) 過程に対するリターン Y_t の分布. 比較のために $\mathcal{N}(0, 1)$ も同時にプロットしてある.

課題 1：
その確率分布が

$$P(Y_t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|Y_t| \leq a) \\ 0 & (|Y_t| > a) \end{cases} \tag{63}$$

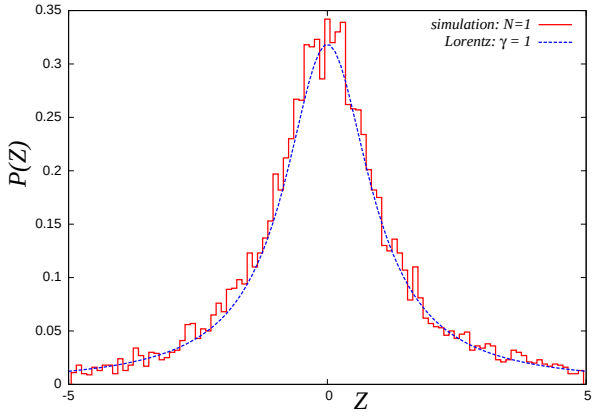
で与えられる確率変数 Y_t に対し, Z_N の従う分布 $P(Z_N)$ が N の増加とともに収束していくを図 3 にならって数値的に調べよ (下図を参考にせよ).



また, Y_t の従う分布が次のような**ローレンツ分布**:

$$P(Y_t) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma^2 + Y_t^2} \tag{64}$$

の場合はどうなるか? (下図を参考にせよ)



(ヒント) ローレンツ分布を生成させる際に次の写像からのサンプリングを用いても良い.

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(|X_n| - \frac{1}{|X_n|}\right)$$

2.4 点過程

前回までの講義では株価や為替レート等の金融商品の変動を確率過程にみたてて解析するための基本的な確率モデルを見てきた. このとき, 価格変動が生じる「時刻」とそれらの「間隔」に関しては特に何も言及しなかった. インターネット上で公開されている株式などはその価格が 1 時間程度の間隔で提示されるものもあれば, その履歴が 1 日単位, 1 週間単位などで提示されるものもある. 一方, 円/ドルなどの為替レートでは変動が逐次提示されることはなく, たいていの場合, 1 日を通して同じレートが用いられている[18]. 従って, 顧客に対し, そのように一定の単位時間に区切って価格の変動を提示する限り, その確率モデルを考える際には価格変動がある単位時間 (ステップ) 毎に発生するという仮定を置けば十分であった. 例えば, ウイナー過程は

$$X_{t+1} \quad = \quad X_t + Y_t, \quad P(Y_t) = \mathcal{N}(0, \sigma) \tag{65}$$

で与えられたが, この際, レート X_t の変動は $t+1-t=1$ 単位時間毎に生じる.

しかし, インターネットを介した金融取引きが一般にも普及し, 所謂, インターネット・トレーディング・システムを構築する際には顧客に対して可能な限り頻繁にレートを提示することが重要になる. つまり, 極端な場合には市場のレートをそのまま開示する方が, 顧客各自が購入した商品の価格動向を逐次観察することができ, その結果, オンラインでの投資を楽しみたいという類の顧客ニーズに応えることができる. しかし, 現実には, インターネットなどを介して我々が目にすることのできる「開示レート」の背後には (プロのトレーダ達の取り引きによって決まる) 「市場レート」があり, トレーディング・システムを提供する側が, その市場レートからある程度の情報を「間引いて」からそのレートを提示しているわけである.

このとき, どのように情報を間引くかが問題になるが, 一番単純には, 前述のように 1 日単位, あるいは 1 時間単位と一定の時間を区切り, その時点での市場レートを公開するのが良さそうである. しかし, 例えば大きな事件があったり, 何らかのアクシデントでレートそのものが乱高下し, その乱高下がある日の正午から午後 6 時の間継続した場合, 1 日ごとのレート提示 (開示) では, この時間帯のレート乱高下は顧客には見えなくなってしまう. 顧客にとっては出来る限り市場レートそのものにアクセスできた方が, このような乱高下のタイミングを利用して (それは小さなチャンスかもしれないが) 自分の資金を増やすことができるかもしれない. しかし, これは銀行 (システムを構築する側) にとってみれば逆な意味でリスクを負うことになりかねない. 従って, 両者にとって好ましいレート提示の方法は市場レートそのものを全て提示するのではなく, やはり, 情報を間引くのであるが, その**情報の縮約によって作られる開示レートの変動が市場レートの性質をある程度反映している**ようなものが望ましい. この意味では 1 日毎, 1 時間毎などの一定間隔での情報公開は好ましくない. 頻繁に変動したレート変動は上述のように「粗視化」されてしまうからである. このような市場レートの変動をうまく反映させた情報提示 (開示) として最近, **第 1 通過過程 (First-Passage Process)** を用いる方法が 24 時間随時トレーディングが可能な個人顧客向けのインターネット・バンクであるソニー銀行[19] などで採用されている. これは図 14 のように頻繁に変動する市場レート (実線) に対し, 2ϵ の幅を設定し[20], 市場レートがこの幅を超えた場合のみ, その時点でのレートを顧客に提示する. このやり方だと, ± 0.1 円を越えて大きく変動した後のレートは必ず顧客に提示されることになり, 1 日毎, 1 時間毎にレートを提示するやり方よりも市場レートを開示レートに反

[18] 例えば, 外国旅行へ行く前に円を外貨に換金する際, 銀行では「本日のレート」というような掲示があるし, 多くの場合, このレートは 1 日中変わらない

[19] http://moneykit.net

[20] ソニー銀行の円ドル為替レートの場合には $\epsilon = 0.1$ 円と設定されている.

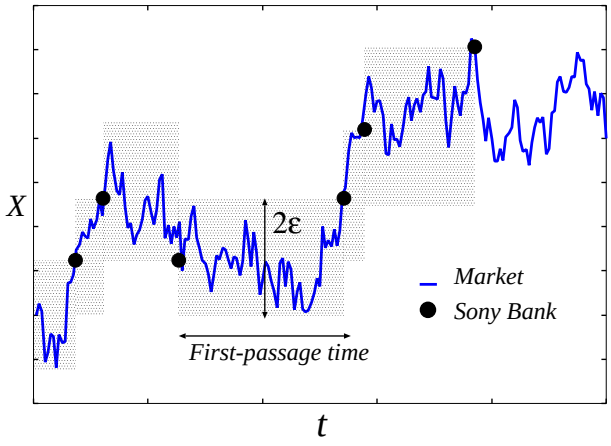


図 14: 市場レート (実線) に対する第一通過過程 (First-Passage Process) を取ったのちの提示レート (黒丸). このような提示システムを採用している企業としてソニー銀行がある.

映させることができる[21] ここで注意しなければならないのは, 市場レートがウイナー過程 (65) に従っていたとしても, この第一通過過程のフィルタ (以下では単に「フィルタ」と呼ぶ) を介して提示されるレート変動の時間間隔はもはや一定ではなくなっているという事実である. つまり, フィルタを介した後のレート変動が時刻 $t_1, t_2, t_3, \cdots, t_N$ (当然, この順序は $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ であり, $N \to \infty$ とする) に生じたとし, その間隔を

$$\Delta t_i \quad = \quad t_{i+1} - t_i, \quad (i = 1, \cdots, N) \tag{66}$$

で定義すると, Δt_i は一定ではなく, 揺らいでいて, ある確率分布を持つことになる. このレート変動時刻を表す点列: $t_1, \cdots, t_N$ からなる確率過程を**点過程 (Point Process)** と呼ぶ. このような点過程としてスーパーのレジに到達する顧客の時刻, 高速道路の料金所に入ってくる車の到着時刻などが挙げられるが, この他にも我々の身の周りで多くの例を見ることができる.

課題 2：
身の周りで点過程であると思われる事例を数件具体的に挙げよ. ただし, 上記 2 例を除く.

2.5　ポアソン過程

ここで, レートの変動 (イベント) がランダムに生じる場合にそのレート変動間隔の従う分布を求めてみよう. $P_n(t)$ をそのようなイベントが時刻 0 から t までの間に n 回生じる確率とする. また, 時刻 t と $t + \Delta t$ の間の Δt の時間間隔にそのようなイベントはその間隔に比例するものとし, その比例係数を λ と置く. つまり, t と $t + \Delta t$ の間の微小時間 Δt にレート変動が生じる確率は $\lambda \Delta t$ と

[21] これ以外にもいろいろやり方はあるかもしれない. 例えば, 立て続けに 5 回連続してレートが上昇あるいは下降した場合にはその 5 回目の変動直後のレートを提示するとか, もう少し複雑にしたければ, 1 ステップでのレート変動を「上昇 (u)」「留まり (s)」「下降 (d)」と 3 値に「符号化」し, (u, u, d, u, d, s) の組み合わせが時系列中に現れたら, その時点の値を開示するというような方法もとれるかもしれない. しかし, そのような時系列の構造を反映した複雑なレート開示を採用すれば, どのような状況が生じるのかは直観的にちょっとわかりにくい. その意味で, ここでの第 1 通過過程を用いた情報開示はかなり妥当な方法であると思われる. また, 同じ第 1 通過過程を用いるにしても, 顧客の生活リズム (顧客が日本人だけであると考えれば, 日本時間の真夜中にトレーディングする人はあまり居ない) や実社会での「季節性」を考えて, レート窓の幅 ϵ に時間依存性を持たせるやり方もあるかもしれない.

なる. このとき, 確率の保存から次の方程式が成り立つ.

$$P_n(t+\Delta t) \quad = \quad (1-\lambda\Delta t)P_n(t) + \lambda\Delta t P_{n-1}(t) \tag{67}$$

この右辺第 1 項は時刻 t までに n 回のイベントが生じている場合, 次の Δt の間隔でイベントが生じなければ左辺への寄与となることから来る部分. 右辺第 2 項は時刻 t までに $n-1$ 回のイベントが生じている場合, 次の Δt の間隔でイベントが生じれば左辺への寄与となることから来る部分であり, この 2 つの寄与の合算が $P_n(t+\Delta t)$ を与えることは明らかであろう. また, 右辺の各項がこのよう書けることから, ここでは「時刻 t と $t+\Delta t$ ではイベントが互いに独立に起こる」という仮定を置いていることに注意しておこう. これを $\Delta t \to 0$ のもとに書き換えると次の微分方程式が得られる.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} \quad = \quad -\lambda(P_n(t) - P_{n-1}(t)) \tag{68}$$

これは今までにも度々出てきた**マスター方程式**と呼ばれるものである. 通常, (統計物理や確率的情報処理で扱うような) マスター方程式はその変数が膨大となるため解くことが困難である場合が多いが, 上記の場合には解析的にその解を求めることができる. $n=-1$ のとき, $P_{-1}=0$ であるとすると, $n=0$ に対する方程式は

$$\frac{dP_0(t)}{dt} \quad = \quad -\lambda P_0(t) \tag{69}$$

であり, $P_0(0)=1$ の条件下でこの解は $P_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ である. 従って, $n=1$ のときに解くべき方程式はこの結果を (68) 式に代入して

$$\frac{dP_1(t)}{dt} \quad = \quad -\lambda P_1(t) + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{70}$$

が得られる. この方程式は通常よくやるように, 右辺第 2 項を無視した斉次方程式の解の積分定数を時変なものとした解 $A(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ を (70) 式に代入し, A についての微分方程式を作り, それを解けばよい (定数変化法). 実際, その方程式は

$$\frac{dA}{dt} \quad = \quad \lambda \tag{71}$$

となり, その解は $A(t)=\lambda t$. 従って, 求めるべき方程式の解は $P_1(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$ となる. この操作を繰り返すと, $n=k$ のときの方程式の解 $P_k(t)$ は

$$P_k(t) \quad = \quad \frac{(\lambda t)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{72}$$

となる. この分布を**ポアソン分布**と呼ぶ. 図 15 に $\lambda=1$, $k=0,1,2$ の場合のポアソン分布の概形を載せよう. また, 上記の意味でイベントがランダムに次々と発生する確率過程 (点過程) を**ポアソン過程**という. ここで, このポアソン過程に対し, 計測を始めてからはじめのイベントが生じるまでの時間間隔 (duration) t の従う分布は (72) 式で $n=0$ とおいた

$$P(t) \quad \propto \quad \mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{73}$$

のような指数分布に従うことがわかる. 従って, 為替レートの変動間隔 t の従う分布を実データから評価し, それが指数分布に従うのであれば, レートの変動は完全にランダムなポアソン過程であることがわかる.

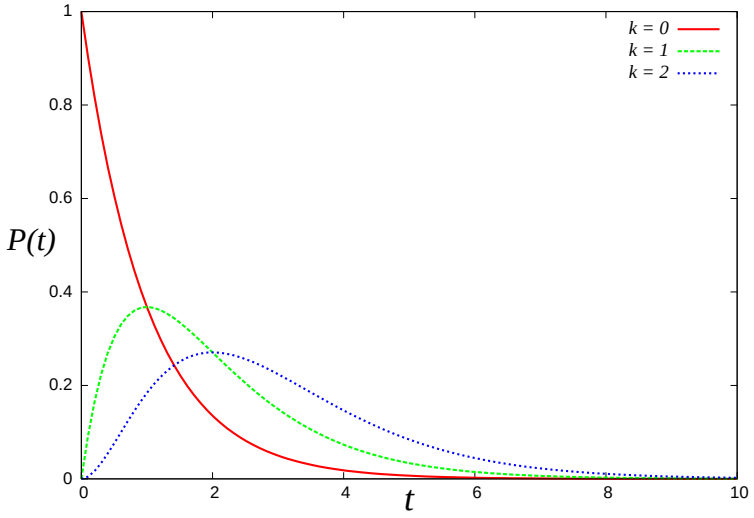


図 15: $\lambda = 1$, $k = 0, 1, 2$ の場合のポアソン分布.

2.6　レート変動間隔の実データ解析

実際にレート変動がランダムに起こるポアソン過程に従っているのか, あるいはランダムではなく, レート変動間隔間には何らかの相関があるのかを調べるためにはレートの変動間隔の従う分布を実データから評価すればよい. その際, 問題の焦点がレート変動がポアソンか否かであるのであれば, 指数分布を変数 m を用いて一般化した次のワイブル分布:

$$P_{m,a}(t) \quad = \quad \frac{mt^{m-1}}{a} \exp\left(-\frac{t^m}{a}\right) \tag{74}$$

に対し, この分布と実データから得られるレート変動間隔のヒストグラムとの当てはまり具合を調べることでパラメータ m, a を求めればよい (a は分布のスケールを決定するパラメータ. 図 16 参照). ここで, ワイブル分布は $m = 1$ であれば指数分布になり, 従って, その変動間隔分布を持つ確率過程はポアソン過程ということになる. つまり, パラメータ m の値の $m = 1$ からの「ズレ」によってポアソン過程からの外れ具合を検出しょうというわけである. 「分布間の近さ」を議論するわけであるから, 実データからの分布 (経験分布) と上記ワイブル分布とのカルバック-ライブラ距離を変数 m, a の関数とし, それを最小化するように m, a を決める方法をとることもできるが, ここではもう少し直接的な方法 — ワイブル確率紙の方法 — を紹介することにしょう.

2.6.1　ワイブル確率紙の方法

通常, データ (x, y) が指数分布に従うかどうかを調べる際には $y = \mathrm{e}^{-x}$ の両辺の対数を取った $\log y = -x$ から, このデータを y 軸が対数スケールとなるようにプロットし, そのプロットが直線に乗るかどうかで判断した. 同じような方法がワイブル分布で使えないかを考えたい. このとき, まず, ワイブル分布 (74) 式の累積分布:

$$W(t) \quad = \quad \int_0^t P_{m,a}(t)dt = \exp\left(-\frac{t^m}{a}\right) \tag{75}$$

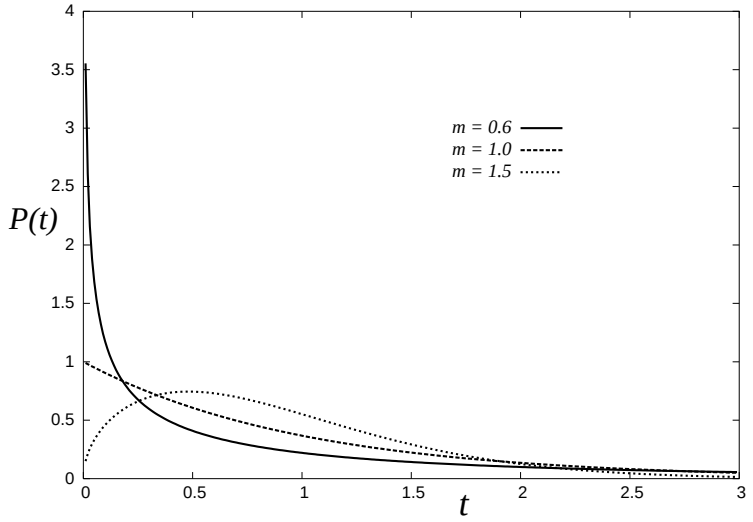


図 16: ワイブル分布.

を計算する. 従って, 次の式が成り立つことが容易にわかる.

$$\log\left(-\log W(t)\right) \quad = \quad m\log t + a \tag{76}$$

よって, レート変動間隔のヒストグラムから累積分布を求め, 間隔 t の「頻度」の対数を取ったものの符号を変えてさらにその対数をとり, それと間隔 t の対数をとったものをそれぞれ y, x 軸にプロットしたとき, そのプロットが直線に乗ればレート変動間隔はワイブル分布に従うことがわかり, このときの直線の傾きがワイブル分布を特徴つけるパラメータ m を決めることになる (y 軸との切片が a を与える). その m が 1 と異なれば, その確率過程はポアソン過程ではないと結論されることになる. この手の方法を**ワイブル確率紙の方法 (Weibull Paper Analysis)** と呼ぶ.

2.6.2　変動間隔が揺らぐ GARCH(1,1) 過程での計算機実験

ところで, 前述のレート変動幅 2ϵ のフィルタの効果はどのようなものであろうか？ 我々はここでレート変動間隔そのものに興味があるので, 確率過程のレート変動間隔がフィルタを介す前後でどのように変化するのかに興味がある. そこで, 前回学んだ GARCH(1,1) 過程の時間間隔がワイブル分布に従う確率過程に対し, 実際にレート窓のフィルタをかけることでこれを調べてみよう. 具体的には次の確率過程にフィルタをかける.

$$X_{t+\Delta t} \quad = \quad X_t + Y_t, \;\; P(Y_t) = \mathcal{N}(0, \sigma_t) \tag{77}$$

$$\sigma^2_{t+\Delta t} \quad = \quad \alpha_0 + \alpha_1 X_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 \tag{78}$$

$$P_{m_0,a}(\Delta t) \quad = \quad \frac{m_0(\Delta t)^{m_0-1}}{a}\exp\left(-\frac{(\Delta t)^{m_0}}{a}\right) \tag{79}$$

ここで, 為替レートそのものと時間間隔の間には何ら相関がないものと仮定する. すなわち, $P(X_t, \Delta t) = P(X_t)P_{m,a}(\Delta t)$ である. しかし, 当然, この相関を取り込んでモデル化することも可能である[22].

[22] 相関があれば $P(X_t, \Delta t) = P(X_t|\Delta t)P_{m,a}(\Delta t)$ なので, 条件つき確率 $P(X_t|\Delta t)$ を具体的に与えてモデル化することになる. 実際にそうなっているか否かは検証が必要であるが, 例えば, 「長く待たされた直後のレートは大きく変動する」などを具体的に条件つき確率 $P(X_t|\Delta t)$ に反映させることができるかもしれない.

さて, この確率過程に窓をかけ, 出てくる確率過程の時間間隔をワイブル確率紙で調べよう. その際, m_0 で指定される第 1 通過過程の背後にある確率過程が, 第 1 通過過程を経ることでその時間間隔の従う統計性に変化が生じ, m_0 とは異なるパラメータ m で指定されるワイブル分布に従うようになると仮定する. そして, 最終的に m_0-m プロットを描くことでパラメータ m の変化を介してここでのフィルタの効果を調べようというわけである. その結果の一例を図 17 に載せる. ここ

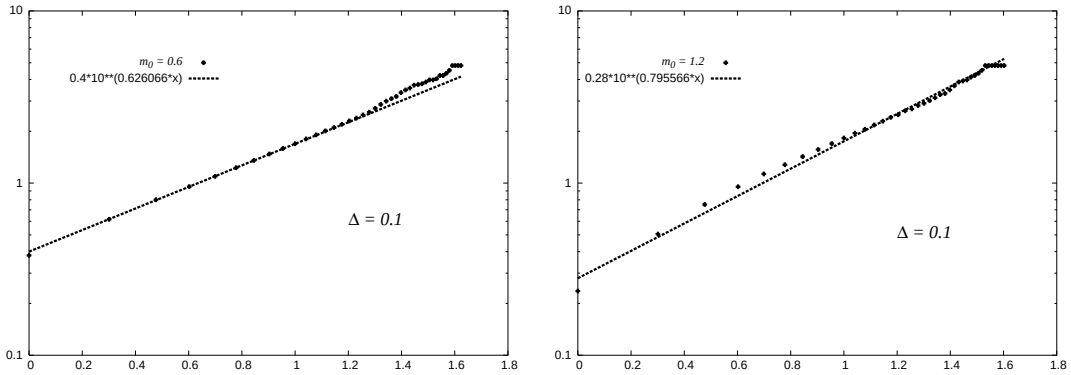


図 17: $m_0 = 0.6, 1.2$ のワイブル分布で変動間隔が揺らぐ GARCH(1,1) 過程のフィルタ出力の変動間隔をワイブル確率紙により評価する.

では $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = (0.4, 0.3, 0.3)$ と変数を選び, $m_0 = 0.6, 1.2$ のワイブル分布で変動間隔が揺らぐ GARCH(1,1) 過程のフィルタ出力の変動間隔をワイブル確率紙により評価している. ただし, レート自体は完全な連続値を取るわけではなく, レート窓幅 $\epsilon = \Delta = 0.1$ に応じた離散値を取ることから,

$$X_t \quad = \quad \Psi_\Delta(X_t) \equiv \Delta \, \mathrm{ceil}(\Delta^{-1} X_t) \tag{80}$$

なる変換を施していることに注意しょう. この図より, ワイブル確率紙による解析で出力データは直線上に乗っている. 従って, フィルタにかけた後の確率過程のレート変動間隔もやはりワイブル分布に従う. しかし, その傾きは一般に $m \neq m_0$ である. そこで, 図 18 に m_0-m プロットを載せよう. この図より, フィルタへの入力データが $m_0 = 1$ のポアソン過程である場合でも, フィルタをかけた後では $m \neq 0$ であり, ランダムなレート変動間隔ではなくなることがわかる. では, レート変動間隔がランダムでなく, ある種の偏りがある場合, それをどのように定量化すればよいのであろうか. 時節ではそれを定量化する一つの指標としてジニ係数について見ていくことにする.

2.7　ジニ係数: 格差の一指標

最近では社会における格差が問題になっており, 各国での格差の指標として**ジニ係数 (Gini index)** と呼ばれる量が用いられている. この量は $[0, 1]$ 間の実数値を取るように規格化されており, 完全に平等な社会で, その意味で富が国民に等分配される (少なくとも社会主義が考える) 理想的社会では 0 をとり, その対極の一人が全ての富を独占する状況では 1 をとる. 従って, ここで言うところの「格差」という観点で捉えるのであれば, ジニ係数がゼロに近ければ近いほど格差の無い社会ということになる. 参考までに 2000 年の統計によると日本のジニ係数は 0.314, アメリカ合衆国は 0.357, メキシコが 0.450, デンマークが 0.225 であった.

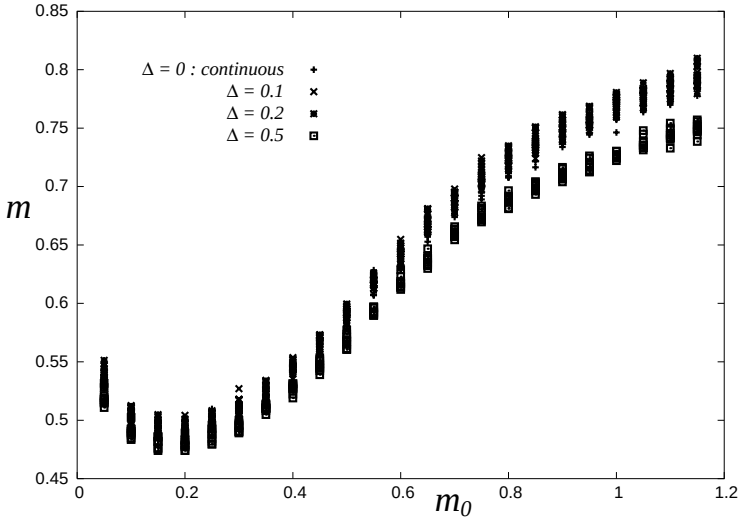


図 18: m_0-m ダイアグラム.

2.7.1　解析的評価

ジニ係数を解析的に求めるためには, まず, 所得の分布から**ローレンツ曲線 (Lorentz Curve)** を求めなければならない. そのために所得分布を $P(t)$ とし, その累積分布:

$$X(r) \quad = \quad \int_0^r P(t)dt \tag{81}$$

と規格化された累積所得:

$$Y(t) \quad = \quad \frac{\int_0^r tP(t)dt}{\int_0^\infty tP(t)dt} \tag{82}$$

を計算し, r を媒介変数として X と Y の関係をプロットする. このとき描かれる曲線がローレンツ曲線である. これは $[0,1]$ 間で下に凸の曲線であり, 完全平等の場合には $P(t) = \delta(t - t_*)$ を代入し

$$X(r) \quad = \quad \int_0^r \delta(t - t_*)dt = \Theta(r - t_*) \tag{83}$$

$$Y(t) \quad = \quad \frac{\int_0^r t\delta(t - t_*)dt}{\int_0^\infty t\delta(t - t_*)dt} = \frac{t_*\Theta(r - t_*)}{t_*} = \Theta(r - t_*) \tag{84}$$

となるから, $Y = X$ がローレンツ曲線となる ($\Theta(\cdots)$ は階段関数). これを「完全平等線」と呼ぶことにする.

ワイブル分布 (74) のローレンツ曲線は簡単な計算の結果

$$Y \quad = \quad Q\left(\frac{1}{m} + 1, -\log(1 - X)\right) \tag{85}$$

となる. ここに, $Q(z, x)$ は不完全ガンマ関数であり

$$Q(z, x) \quad = \quad \int_0^x t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}dt \tag{86}$$

で定義される. 図 19 にいくつかの m 対するワイブル分布のローレンツ曲線を載せる. ジニ係数は

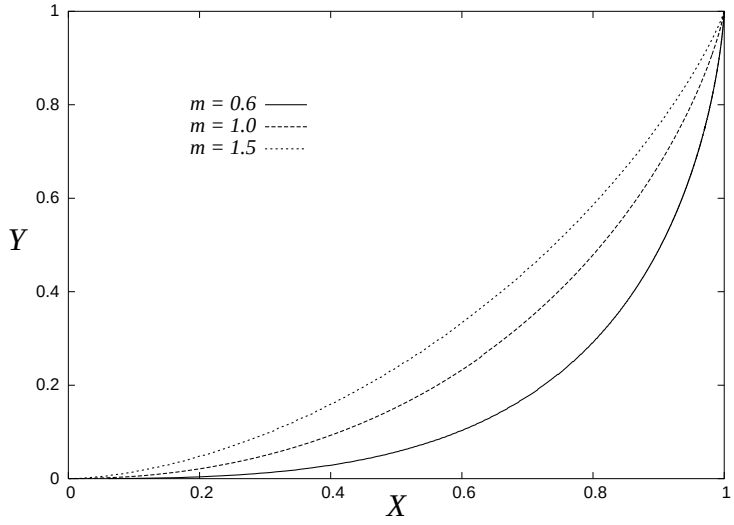


図 19: ワイブル分布に対するローレンツ曲線.

このローレンツ曲線と完全平等線との間の面積を 2 倍したものとして算出される. 従って, ローレンツ曲線自体が完全平等線の場合にはゼロ. その対極の一人勝ちの場合には一人に全ての富 r があつまるから (83)(84) の結果に $t_* = r = \infty$ を代入して, $Y = X = 1$ がローレンツ曲線となり, このときの面積は $Y = X$ と X 軸, Y 軸とで囲まれる三角形の面積 $1/2$ であり, 従ってジニ係数はその 2 倍の 1 となる.

このジニ係数は具体的に書くと

$$G \quad = \quad 2\int_0^1 (X - Y)dX = 2\int_0^\infty (X(r) - Y(r))\frac{dX}{dr} \cdot dr \tag{87}$$

となる. 具体的にワイブル分布に対して計算すると

$$G \quad = \quad 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \tag{88}$$

が得られる. ここで変数 a には依存しないことに注意しておこう. これを m の関数としてプロットすると図 20 のようになる. ところで, ここでは所得の分布を取り上げたが, 不平等の程度を測る量は所得に限る必要はない. 事実, 例えば, ここで取り上げた所得を「レート変動間隔」と読み直すことで, レート変動の間隔がどの程度ばらつき, どの程度偏りがあるのかを調べることができる. 例えば, $m = 1$ としてレートの変動がランダムなポアソンに従う場合, ジニ係数は 0.5 となる. また, ジニ係数がゼロに近ければ, おおよそ同じ変動間隔でレートが変化すると言える. 逆にジニ係数が 0.5 より大きければ間隔は偏りが大きく, 飛びぬけて大きな間隔, あるいは逆に小さな間隔がところどころで現れるようになる. ちなみに, 第 1 通過過程を採用しているソニー銀行のレート変動間隔はワイブル確率紙からの結果 $m = 0.59$ より, $G = 0.694$ 程度となり, これは後者, つまり, 飛びぬけて大きな間隔, あるいは逆に小さな間隔がところどころで現れている.

2.7.2　数値的評価

データが与えられたときに数値的にジニ係数を求めることもできる. 例えば各人の所得が $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_N$ のように与えられたとすると (必ずしもデータとしてはこの順序に並んでいないか

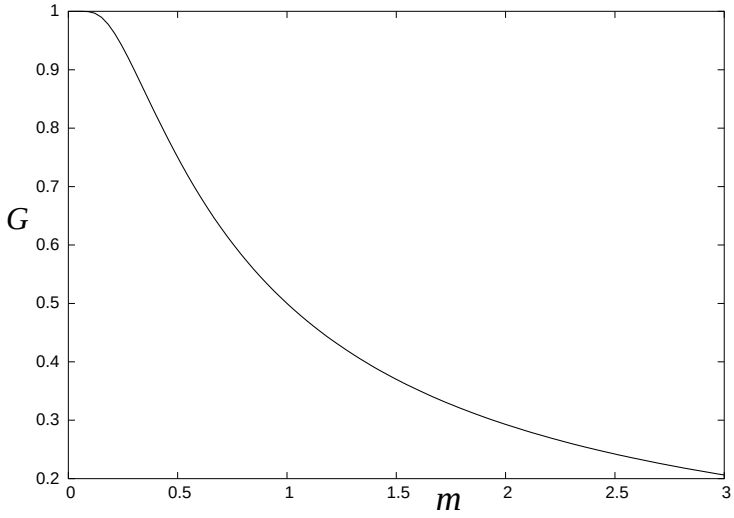


図 20: ワイブル分布に対するジニ係数.

もしれないが, その場合には逐次ソーティングを行い, この順番に並び替える),

$$X_i = \frac{i}{N} \tag{89}$$

$$Y_i = \frac{\sum_{r=1}^{i} x_r}{\sum_{r=1}^{N} x_r} = \frac{\sum_{r=1}^{i} x_r}{N\mu}, \quad \mu \equiv \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N} x_r \tag{90}$$

であるから, $dX_i = (i+1)/N - i/N = 1/N$ に注意して

$$G = 2\sum_{i=1}^{N}(X_i - Y_i)\frac{1}{N} = \frac{1}{N^2\mu}\sum_{i=1}^{N}(2i - N - 1)x_i \tag{91}$$

が求めるジニ係数となる.

課題 3 :
混沌系工学特論のページ:

`http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/konton2007/konton2007.html`

上に, ある分布から計算機を用いて人工的に生成したデータ (kadai3DATA.txt) を載せるので, このデータのジニ係数を (91) 式を用いて求めよ.

2.8 平均待ち時間

前節までで, 確率過程としてみたときの為替レートの変動間隔は一定ではなく, 揺らぎを持っていることがわかった. また, その揺らぎをジニ係数を介して定量化し, インターネット・トレーディングシステムを採用しているソニー銀行のそれは 0.694 であることも見た. この結果からレート変動がランダムに起こるポアソン過程とは異なり, 飛びぬけて大きな間隔, あるいは逆に小さな間隔がところどころで現れていることになる. ところで, ワイブル確率紙によるデータ解析でソニー銀

行のレート変動間隔は $m = 0.59, a = 50.858$ のワイブル分布で特徴つけられることがわかったので, この分布の平均:

$$\langle t \rangle \quad = \quad \int_0^\infty t P_{m,a}(t) dt \tag{92}$$

を計算することで平均レート変動間隔を評価することができる. ソニー銀行の場合にはこれが理論, 実データ解析双方から約 20 分となることがわかっている. この量はシステム設計においては有益な情報に違いないが, 顧客にとってさえも, この情報が有益であるかどうかはわからない[23]. 例えば, 顧客は任意の時刻にインターネットにアクセスし, 為替レートをチェックするわけであるが, もし, 仮に変動間隔に偏りを持つソニー銀行のレートをチェックしたとすると, 極端に変動間隔の長いタイミングでレートをチェックしてしまい, 長い待ち時間にうんざりしてしまうかもしれないし, 逆に, 極端にレート変動間隔が短いタイミングでレートをチェックし, あまりにも早いレートの変化に驚くことになるかもしれない. 顧客のレート・チェックが 1 日 24 時間の中でどの時間帯にも偏ることなく行われる条件下では, レート変動間隔がランダムならば, 前述の平均変動間隔が顧客の平均待ち時間と考えても良いであろう. しかし, レート変動がポアソン過程ではなく変動間隔に偏りがある場合には顧客の平均待ち時間は平均変動間隔とは異なる値を持つかもしれない.

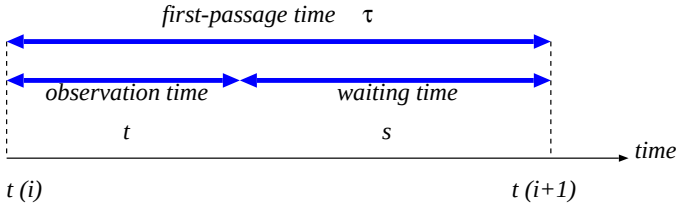


図 21: レート変動とその観測にともなう 3 つの時間.

2.8.1 レート変動とその観測に関連する時間

そこで, もう一度問題を整理すると, 我々の扱っている系にはレートの変動とその観測に関連して 3 種類の異なる時間 (時刻) が存在することがわかる. 一つは第一通過時間 τ であり, この時間の従う分布は実データ解析からワイブル分布であることがわかっている. もう一つは, 直前のレート変動時刻から測って顧客がレートをチェックするまでの時間 t であり, 最後は, レートをチェックしてから実際にレートが変動するまでの時間 s である. これら 3 者の関係は図 21 で与えられる.

ここで, 我々はインターネット・トレーディングを行う顧客にとって重要な情報は τ よりも s であると考える. つまり,

$$s \quad = \quad \tau - t \tag{93}$$

の分布, あるいは, この平均値こそ重要であると考えるわけである.

そこで, t の分布を $P_O(t)$ とし, 問題の待ち時間 s の分布 $\Omega(s)$ をこれと $P_{m,a}(\tau)$ を用いて表すと

$$\Omega(s) \quad \propto \quad \int_0^\infty d\tau \int_0^\tau dt\, Q(s|\tau, t) P_O(t) P_{a,m}(\tau). \tag{94}$$

[23] 有益には違いないだろうが, 他により適切な量があるのではないかと, ここでは考える.

となる. ここに, $Q(s|\tau,t)$ は第一通過時間が τ である間隔に直前のレート変動から t だけ経過した時点で顧客がログインし, レートをチェックした条件下でその顧客が次のレート変動まで s だけ待つ確率であり, ここでは

$$Q(s|\tau,t) \quad = \quad \delta(s-\tau+t) \tag{95}$$

で与えられる. 従って, 待ち時間 s の分布は規格化定数も含めて

$$\Omega(s) = \frac{\int_0^\infty d\tau P_{m,a}(\tau)\int_0^\tau dt\,\delta(s-\tau+t)P_O(t)}{\int_0^\infty ds\int_0^\infty d\tau P_{m,a}(\tau)\int_0^\tau dt\,\delta(s-\tau+t)P_O(t)} \tag{96}$$

と書くことができる. 顧客のログイン時間は一様: $P_O(t)=1$ と考えるのが自然であろうから, これを考慮して問題の待ち時間 s の平均を計算してみると

$$\begin{aligned} w &= \langle s\rangle = \int_0^\infty dss\Omega(s) = \frac{\int_0^\infty dss\int_s^\infty d\tau P_{m,a}(\tau)}{\int_0^\infty ds\int_s^\infty d\tau P_{m,a}(\tau)} \\ &= \frac{\int_0^\infty \frac{d}{dt}\{s^2/2\}ds\int_s^\infty d\tau P_{m,a}(\tau)}{\int_0^\infty \frac{d}{ds}\{s\}ds\int_s^\infty d\tau P_{m,a}(\tau)} = \frac{(1/2)\int_0^\infty s^2P_{m,a}(s)ds}{\int_0^\infty sP_{m,a}(s)ds} = \frac{E(\tau^2)}{2E(\tau)} \end{aligned} \tag{97}$$

が得られる[24]. ここに第 1 通過時間の分布でのモーメントを

$$E(\tau^n) \quad = \quad \int_0^\infty dss^nP_{m,a}(s) \tag{98}$$

で定義したことに注意しよう. 従って, (97) 式から顧客の平均待ち時間はここでの第 1 通過時間の従う分布の 2 次と 1 次のモーメントの比で与えられることになる. また, この結果から一般には $E(\tau)\neq w$ であることもわかる.

そこで, 実際に第 1 通過時間の分布をワイブル分布にした場合の平均待ち時間を求めてみよう. 簡単な計算の結果

$$\Omega(s) \quad = \quad \frac{m\,\mathrm{e}^{-s^m/a}}{a^{1/m}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)} \tag{99}$$

$$w \quad = \quad a^{1/m}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)} \tag{100}$$

$$\sigma \quad = \quad \frac{a^{1/m}\sqrt{\Gamma(1/m)\Gamma(3/m)-\Gamma(2/m)^2}}{\Gamma(1/m)} \tag{101}$$

を得ることができる. ここに, $\Gamma(x)$ は

$$\Gamma(x) \quad = \quad \int_0^\infty dzz^{x-1}\mathrm{e}^{-z} \tag{102}$$

で定義されるガンマ関数であり, σ は待ち時間の標準偏差である. 図 22(左) に $\Omega(s)$ の概形を載せる.

2.8.2 レートの観測に関するパラドクス

ところで, 前に一般には $E(\tau)\neq w$ であると述べたが, 特殊なパラメータの選び方に対しては $E(\tau)=w$ となることがあるかもしれない. そこで, $a=1$ で固定し, m を様々変えた場合に対し,

[24] 待ち時間 w の分布 $\Omega(s)$ までは必要なくて, s の平均値のみを求めるだけでよければ, **講義スライド** #3 の 10 ページに幾何学的証明を載せたので参考にするとよい.

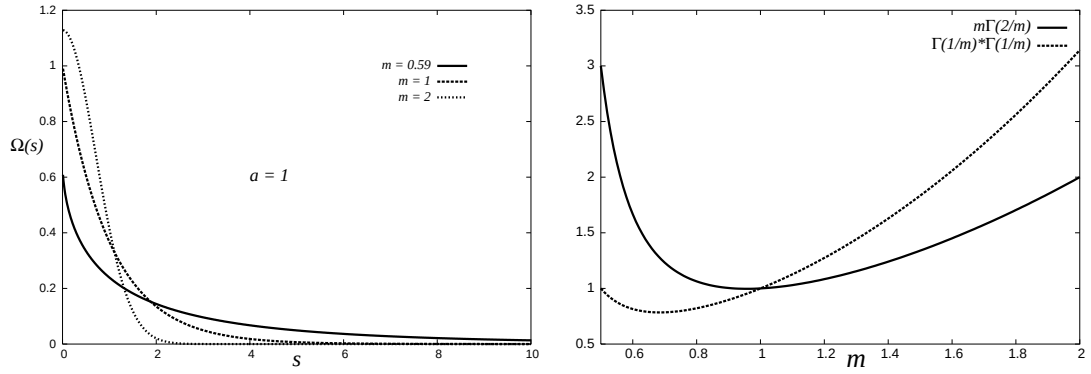


図 22: 待ち時間の分布 $\Omega(s)$ (左). 右図は $E(\tau)$ と w の大小関係. $m = 1$ で両者は一致し, $m < 1$ で $E(\tau) < w$ となる.

$E(\tau)$ と w の関係を調べてみると図 22 (右) のようになる. つまり, この図では $E(\tau)$ を具体的にワイブル分布に対して計算すると

$$E(\tau) \quad = \quad \int_0^\infty d\tau \tau P_{m,a}(\tau) = a^{1/m} \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \tag{103}$$

となるから, これと w を比較し, $w > E(\tau)$ ならば, $m\Gamma(2/m) > \{\Gamma(1/m)\}^2$ となることから, $m\Gamma(2/m)$ と $\{\Gamma(1/m)\}^2$ の比較でもって, 両者の関係を示したものが図 22 (右) である. この図より, 我々の当初の推測通り, $m = 1$ のポアソン過程の場合には平均待ち時間が平均レート変動間隔と等しくなる. しかし, $m \neq 1$ であれば両者は異なり, 特に $m < 1$ では平均待ち時間が平均レート変動間隔よりも長くなっている. これは一見すると矛盾しているように思える. なぜならば, 図 21 から明らかなうに, 必ず顧客は第 1 通過時間のいずこかへログインするので, s が t よりも大きくなってしまうのは不自然に思えるからである. このことを**レート観測上のパラドクス (Inspection Paradox)** と呼ぶ.

このパラドクスは以下のようにして説明がつく. ジニ係数の m 依存性を示す図 20 より, m の値が 1 から小さくなればなるほどジニ係数が上昇し, その意味でレートの変動間隔に大きな偏りができる. その結果, 極端に長い変動間隔, 極端に短い変動間隔が現れ, 前者のタイミングでログインするチャンスは後者のタイミングでログインするチャンスと比べて圧倒的に多くなることが予想できる. 従って, このようなログインのタイミングも含めて平均すると, 結果としてその待ち時間が変動間隔幅よりも大きくなることがありうるわけである.

ちなみに, w の式にソニー銀行のデータから見積もることのできるパラメータの値 $m = 0.59, a = 50.858$ を代入するとおおよそソニー銀行の顧客の待ち時間は 42 分と評価できる. 平均レート変動間隔は約 20 分だったので, この場合には上記パラドクスが起こる. ところで, この待ち時間 42 分は当然, 背後にある市場データを加工する際に用いたフィルタのレート変動窓の幅 ϵ に依存して変化する. 従って, システム設計の観点からはこの幅 ϵ の制御指針が得られることが望ましい. そのためには背後にある市場レートを調べなければならないが, そのようなデータは今のところ提供されていない. これは全く残念な話ではあるが, 無いものは無いわけであるから, 限られた状況証拠から市場レートを近似する確率モデルを構築していかなければならない. その際に第 1 回の講義でみたマイノリティ・ゲームなどのエージェント・ベースの計算機シミュレーションがそのヒントを与えるかもしれないし, ものすごく楽観的に考えれば, それと実データである為替レートなどをつき合わせることで [ミクロ情報] と [マクロ情報] 間のつながりを明らかにできるかもしれない. これらは今後の課題として残されている.

その後の研究経過に関して興味をもたれた方は時々

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/major.html

をのぞいてみてください.

課題 4：
各自の取り組んでいる研究課題において実データからの知見を使う場合, あるいは, 現在使ってなくとも, 将来, そのような知見を使うことで理解が深まったり理論の正当性が確認できたりすると思われる場合, それらデータの入手方法 (あるいは計測方法), 解析方法等を A4 用紙 2 ページ程度で簡単に説明せよ.

レポート締め切り：2 月 15 日 (金) 午後 5 時 (厳守). 提出場所は情報科学研究科棟 8-13 のポスト