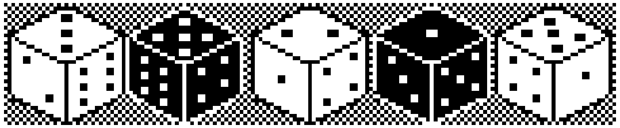
混沌系工学特論 #1

平成19年12月17日　　第1回講義

大学院 情報科学研究科　　井上 純一

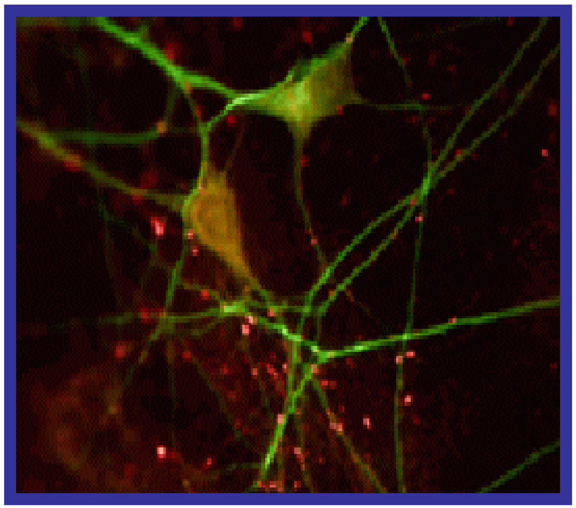
http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

確率を用いた柔らかな情報処理



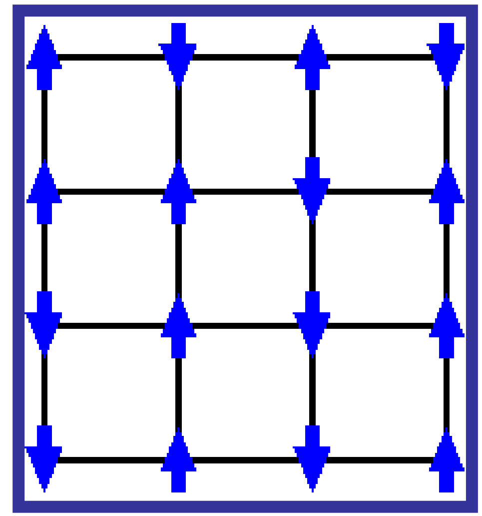
http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

熱・統計物理の方法に基づくアルゴリズムの構築と性能評価



単位：神経細胞
ネットワーク：脳

単位：画素
ネットワーク：デジタル画像



単位：スピン
ネットワーク：磁石

確率的にふるまう要素がネットワークをなして全体が情報処理系を形成している

そのような題材としては・・・

ニューラルネット（連想記憶、学習）、画像修復 / 誤り訂正符号、最適化問題、スペクトル拡散通信、ゲーム理論、植物ネットワーク、金融工学、etc・・・.

今回はこれらをやる

マイノリティ・ゲーム

売る

買う

市場の情報を用いる

自分の決定が他人に
影響を与え、他人の決定
が自身にフィードバックされる

N人（奇数）のエージェントが
「売り」「買い」を選択する

Nが十分大きなとき
多体問題として扱うべきであ

少数派(minority)に属した者が勝つ

繰り返しゲーム

もともとの問題　：　El-Farol Bar　の問題

週末に行われる酒場の演奏会では観客が多すぎると楽しめない
「自宅待機」か「酒場」かの選択を強いられて少数派が勝つ

数理モデル化 #1

各トレーダーの入札価格

トレーダ i のゲームラウンド l での入札価格：

$$b_i(l) \in \mathbb{R}$$

正の値を持つならばその値での「売り」を
負の値を持つならばその値での「買い」を表す

ここでは特別な場合として

$$\boxed{b_i(l) = \pm 1}$$

ミクロな量

を採用する

N人からなるゲーム全体の入札価格の総和

$$\boxed{A(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} b_i(l)}$$

マクロな量

各ラウンドで各トレーダがどの入札
価格を提示するかは戦略に依存する

後に相入札価格のラウンド数依存性（時間変化）を調べることになる

数理モデル化 #2

情報ベクトル

M次元のベクトル

遡る履歴数

$$\vec{\lambda}(l, A, Z) = \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}[(1-\varsigma)A(l-1)+\varsigma Z(l,1)] \\ \mathrm{sgn}[(1-\varsigma)A(l-2)+\varsigma Z(l,2)] \\ \cdots \\ \mathrm{sgn}[(1-\varsigma)A(l-M)+\varsigma Z(l,M)] \end{pmatrix}$$

情報ベクトル

総入札価格　　ホワイト・ノイズ

$$0 \le \varsigma \le 1$$

Real memory　　Fake memory

情報ベクトルの可能な組み合わせ

$$P = 2^M$$ 個

ゲームの各ラウンドでこの中の一つが選ばれ、全てのトレーダで共有される

数理モデル化 #3

戦略ベクトルと入札価格

戦略ベクトル： 各トレーダがゲーム開始時に決めて保持する

$$\vec{R}^{i}_{\vec{\lambda}(l,A,Z)} = \left(R^{i1}_{\vec{\lambda}(l,A,Z)}, \dots, R^{iS}_{\vec{\lambda}(l,A,Z)}\right)$$

各成分は± 1をとる

各ラウンドで
システムが選ぶ
情報ベクトルに依存

入札価格：

最適戦略

$$b_i(l) = \sum_{\vec{\lambda}} \delta_{\vec{\lambda}, \vec{\lambda}(l,A,z)} R^{i\tilde{a}_i(l)}_{\vec{\lambda}}$$

この決め方は
自分が少数派に
なるように決める

各ステップでシステム
によって選ばれた情報ベクトルに該当する
戦略ベクトルの最適戦略成分

数理モデル化 #4

各トレーダの行動決定式

$$p_{ia}\left(l+1\right)=p_{ia}\left(l\right)-\frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}}b_i\left(l\right)A\left(l\right)$$

トレーダｉが戦略ａを
とった場合の利得

少数派に入った場合に利得が
増えるように総入札価格と逆符号

$$b_i\left(l\right)=\sum_{\vec{\lambda}}\delta_{\vec{\lambda},\vec{\lambda}(l,A,z)}R_{\vec{\lambda}}^{i\tilde{a}_i(l)}$$

$$\tilde{a}_i\left(l\right)=\arg\max_a\left[p_{ia}\left(l\right)\right]$$

利得を最大にするような戦略が最適戦略として選ばれる

数理モデル化 #5

2戦略系の方程式

$S=2$ の場合には $q_i(l)=\frac{1}{2}\left(p_{i1}(l)-p_{i2}(l)\right)$ を導入すると

$$q_i(l+1)=q_i(l)-\frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}}\sum_{\lambda}\delta_{\vec{\lambda},\vec{\lambda}(l,A,Z)}\xi_{\vec{\lambda}}^{i}A(l)$$

$$A(l)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i}\sum_{\vec{\lambda}}\delta_{\vec{\lambda},\vec{\lambda}(l,A,Z)}\left\{w_{\vec{\lambda}}^{i}+\mathrm{sgn}\left[q_i(l)\right]\xi_{\vec{\lambda}}^{i}\right\}$$

2戦略系の方程式

$$\xi_{\vec{\lambda}}^{i}=\frac{1}{2}\left(R_{\vec{\lambda}}^{i1}-R_{\vec{\lambda}}^{i2}\right)$$

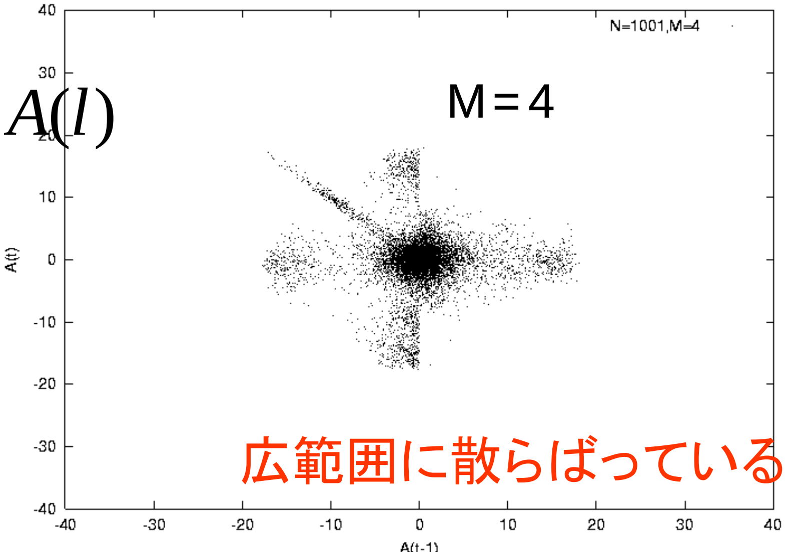
$$w_{\vec{\lambda}}^{i}=\frac{1}{2}\left(R_{\vec{\lambda}}^{i1}+R_{\vec{\lambda}}^{i2}\right)$$

導出は講義ノートを参照

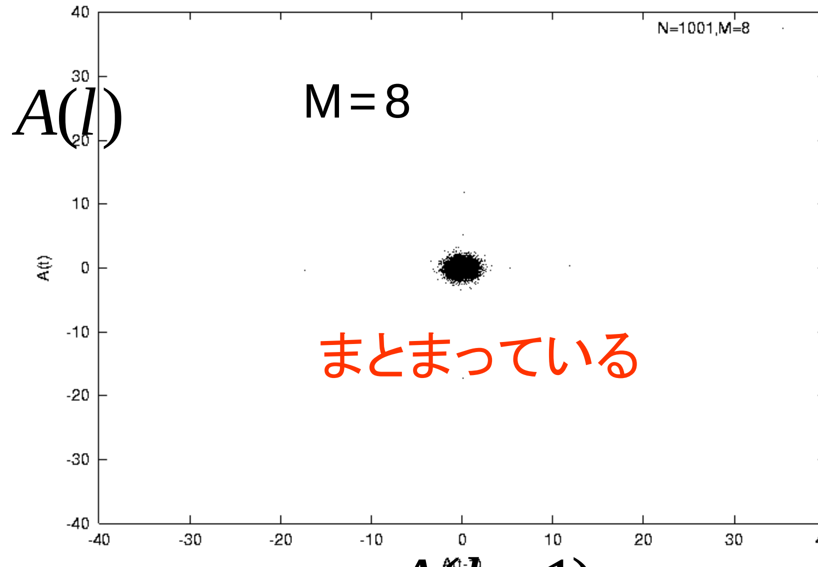
計算機シミュレーションによりマクロな量としての
総入札価格の時間変化を追ってみる

総入札価格の時間変化

$N = 1001$



$A(l+1)$



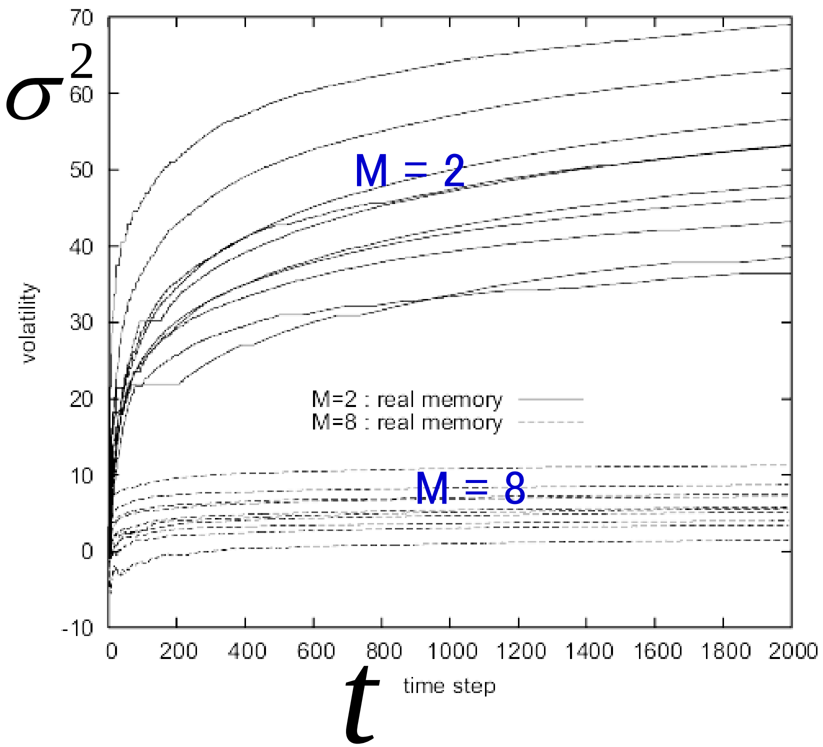
$A(l+1)$

総入札価格の「揺らぎ」に着目すべき

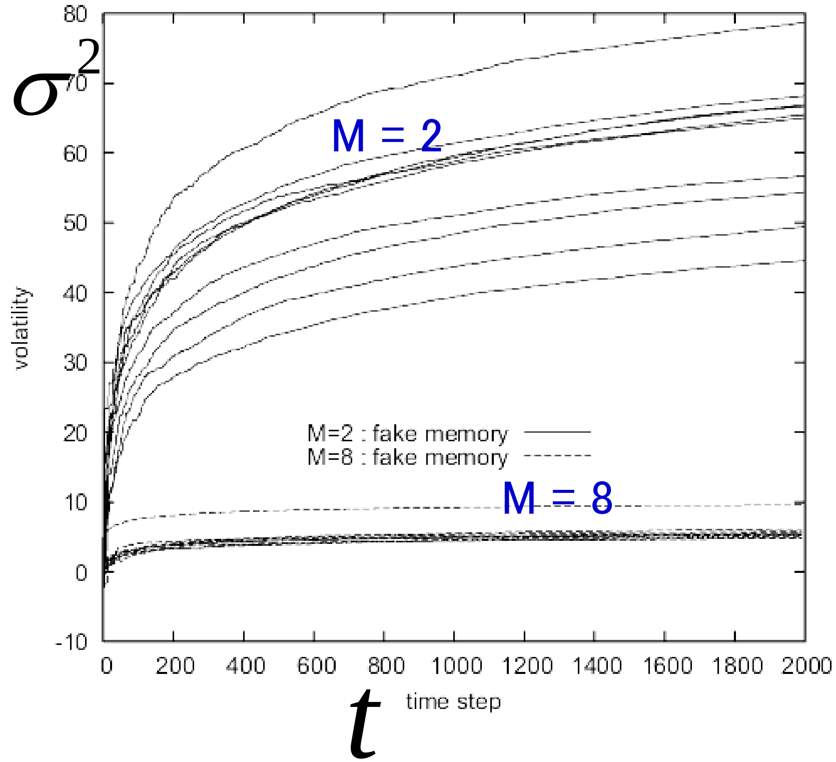
$$\sigma^2(L) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} A(l)^2 - \left\{ \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} A(l) \right\}^2$$

ボラティリティ

ボラティリティの時間変化



Real Memory



Fake memory

ボラティリティの履歴数依存性