混沌系工学特論 #2

平成20年1月7日　　第2回講義

大学院 情報科学研究科　　井上 純一

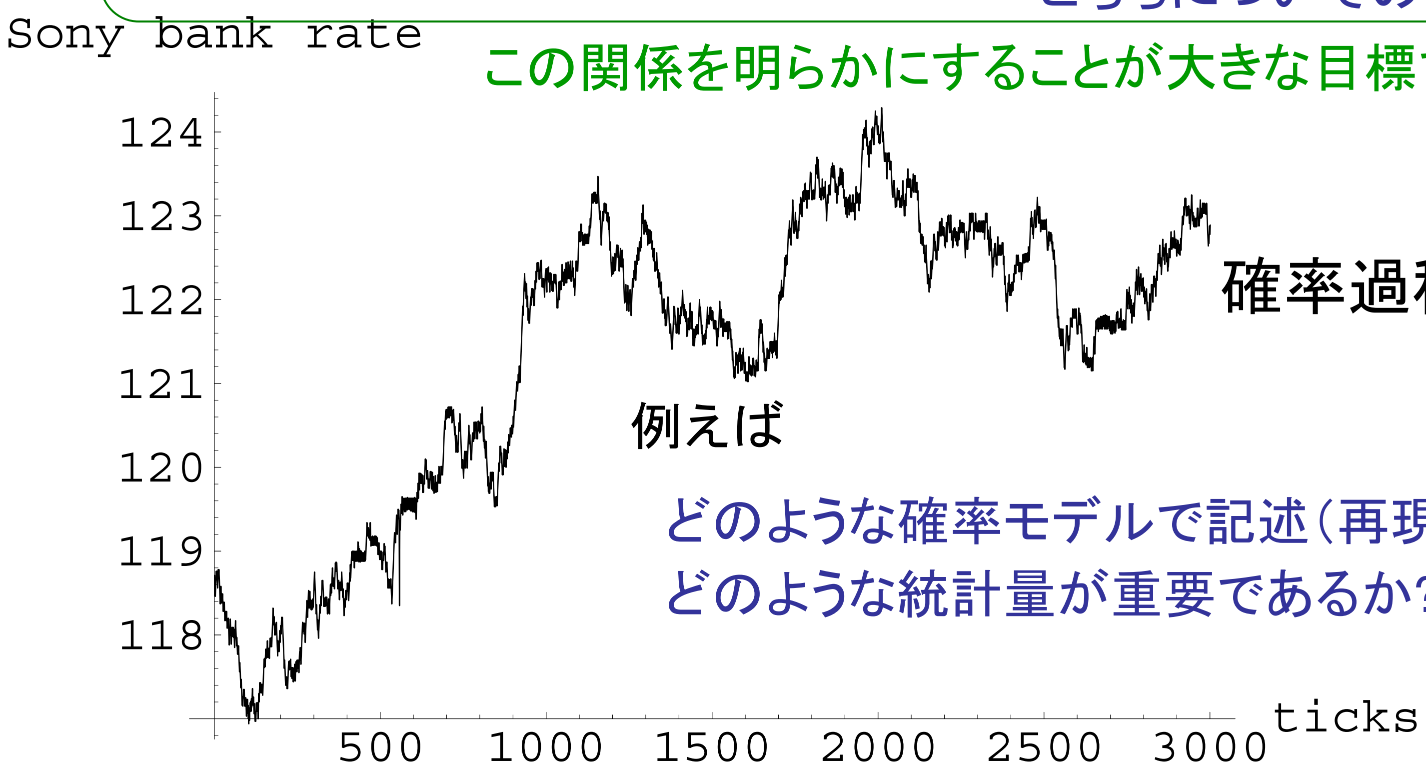
http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

金融データの確率モデル

トレーダ(ミクロ情報） ⇒ 為替レート（マクロ情報）

こちらについての知見を深める

この関係を明らかにすることが大きな目標ではあるが



例えば

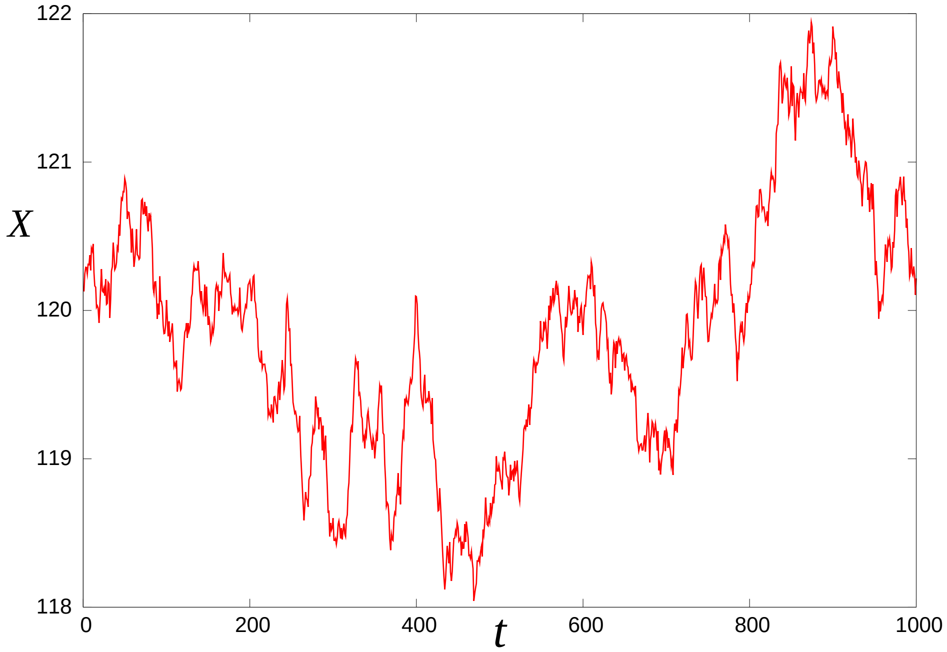
確率過程

どのような確率モデルで記述（再現）できるか?

どのような統計量が重要であるか?

等を調べる

ウイナー過程（ブラウン運動）



実データ

1	120.074612
2	120.178779
3	120.180312
4	120.130503
....	
....	
....	

レートの差分

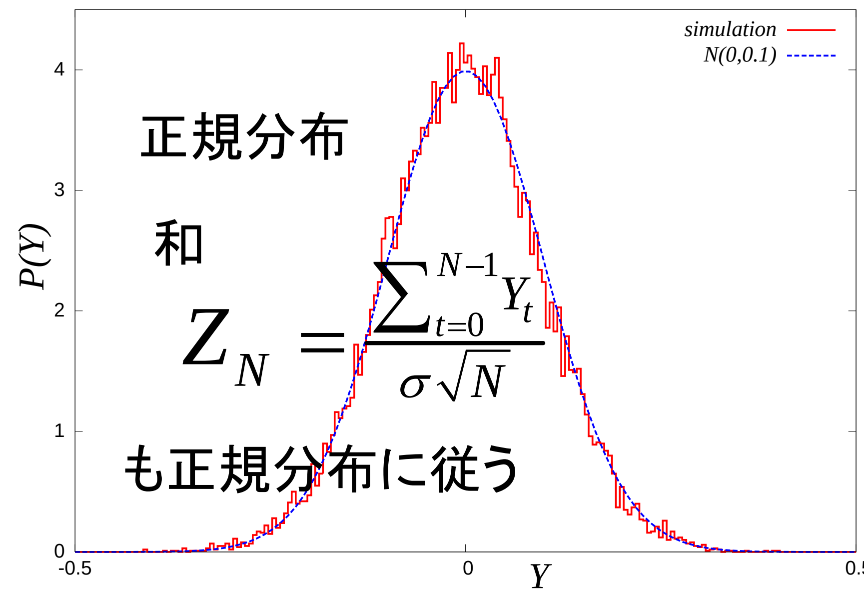
$$Y_t = X_{t+1} - X_t$$

の従う分布を調べる

$$X_{t+1} = X_t + Y_t$$

$$P(Y_t) = N(0, \sigma)$$

ウイナー過程



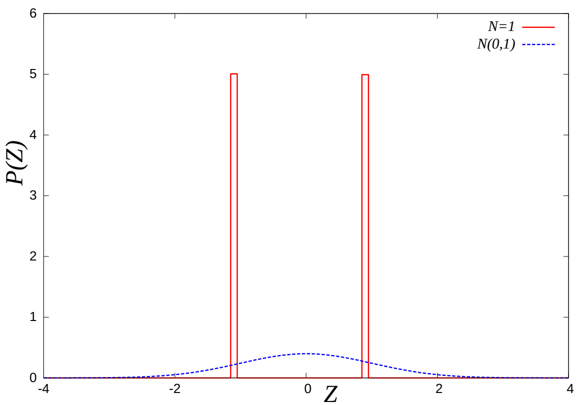
正規分布

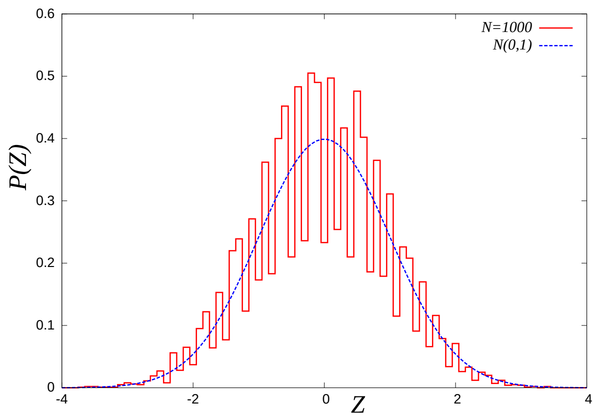
和

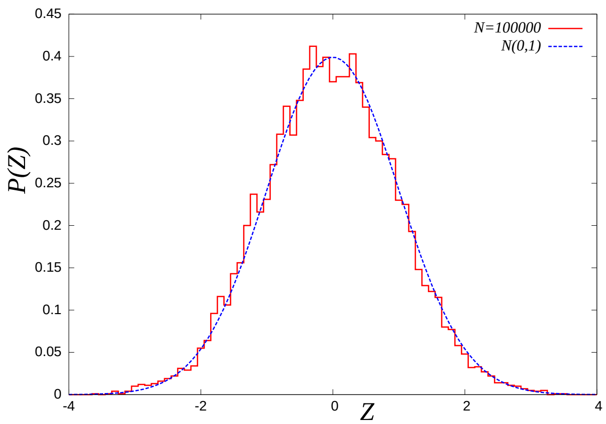
$$Z_N = \frac{\sum_{t=0}^{N-1} Y_t}{\sigma\sqrt{N}}$$

も正規分布に従う

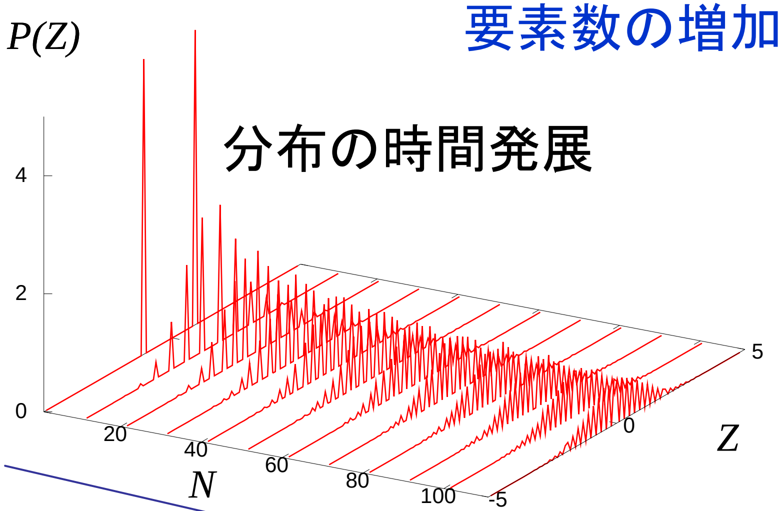
正規分布への収束







要素数の増加(「時間」)の向き



分布の時間発展

時間の向き

リターンが有限の分散を持てば

$$X_N = \sum_{t=0}^{N-1} Y_t, \quad \frac{X_N}{\sqrt{N}\sigma} \to N(0,1)$$

中心極限定理

確率変数の和の従う確率分布

確率変数の和の要素数を増やした場合の時間発展

$$P(Z_1) \to \cdots \to P(Z_N) \to \cdots \to P(Z_\infty)$$

各要素が有限分散ならば $P_G(Z_\infty)$

正規分布

分散有限の条件を緩める

$$X = \underbrace{X_1}_{f} + \underbrace{X_2}_{g} \qquad P_2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(X-t)g(t)dt = f * g$$

畳み込み

特性関数

$$\phi_2(q) = \hat{f}(q)\hat{g}(q) = \{\phi(q)\}^2$$ （f=g=P ならば）

N変数に拡張

$$\phi_N(q) = \{\phi(q)\}^N$$

和の各要素の従う分布と同一ならば

$$\boxed{P_N(X) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_N(q) e^{-iqX} dq}$$

安定分布

具体例は講義ノート

レビ分布とレビ過程

特性関数

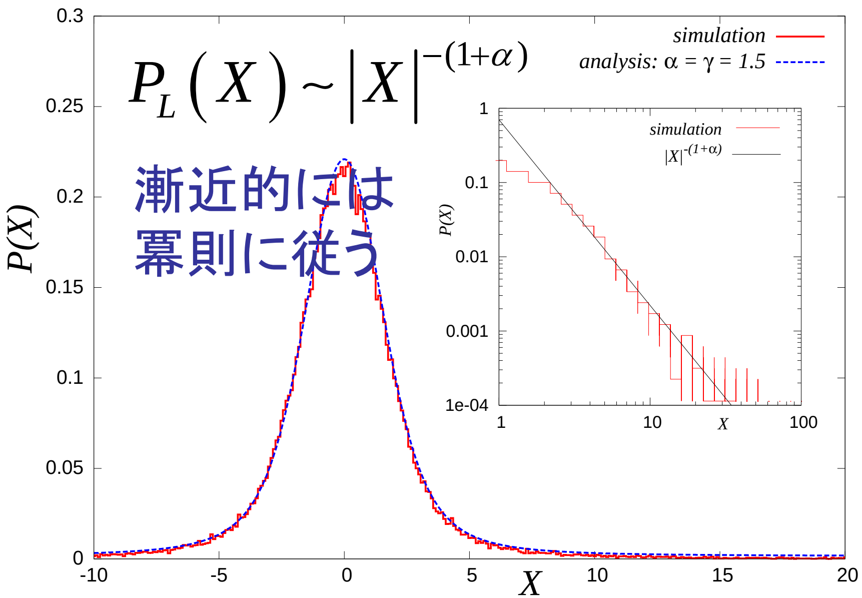
$$\phi(q) = \mathrm{e}^{-\gamma|q|^{\alpha}}$$

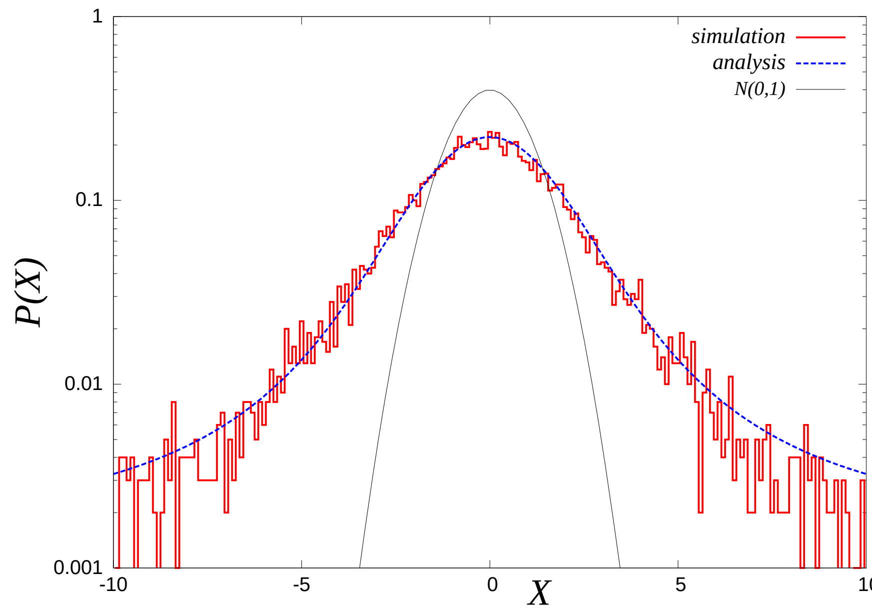
α =2 正規分布

α =1 ローレンツ分布

$$P_L(X) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\gamma|q|^{\alpha}} \cos(qX)\,dq$$

レビ分布

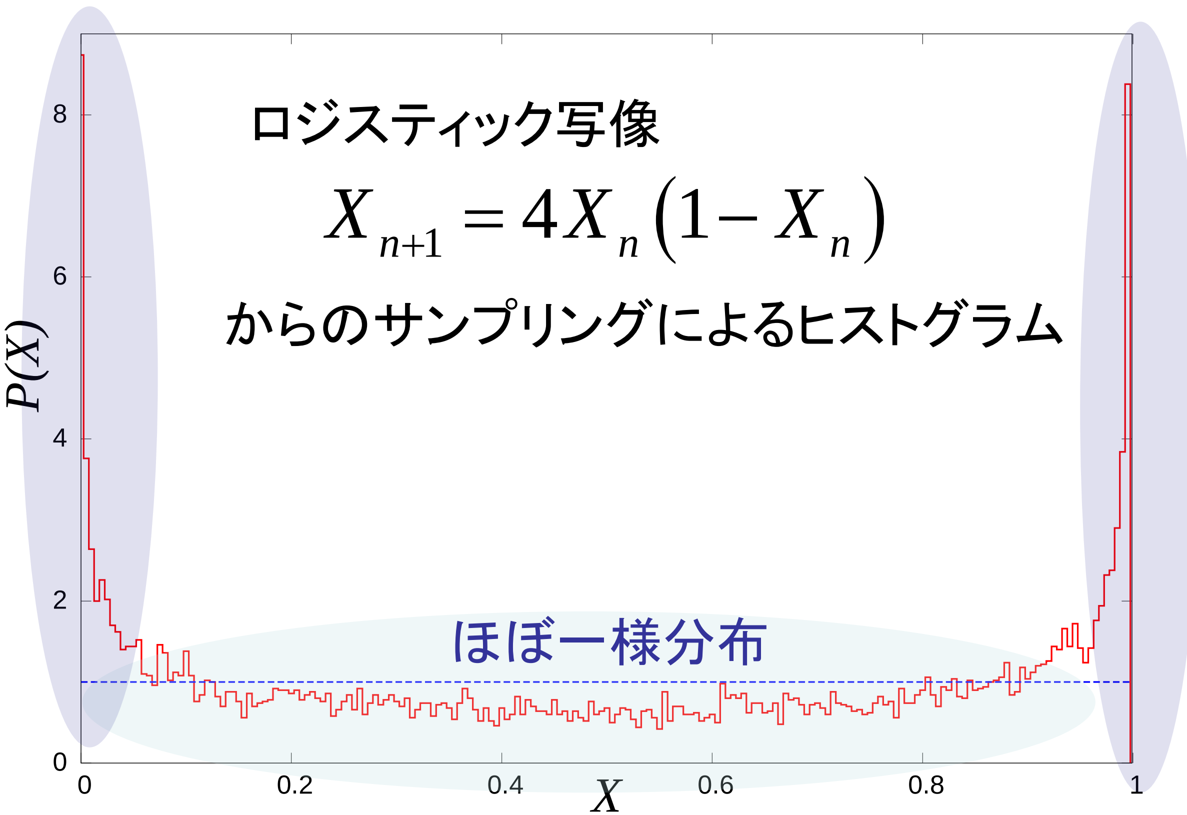




$$X_{t+1} = X_t + Y_t,\ P_L(Y_t)$$

レビ過程（レビ・フライト）

カオス写像からのサンプリング



一様分布からのズレ

レビ分布がカオス写像から作れないか?

カオスの重ね合わせとレビ分布

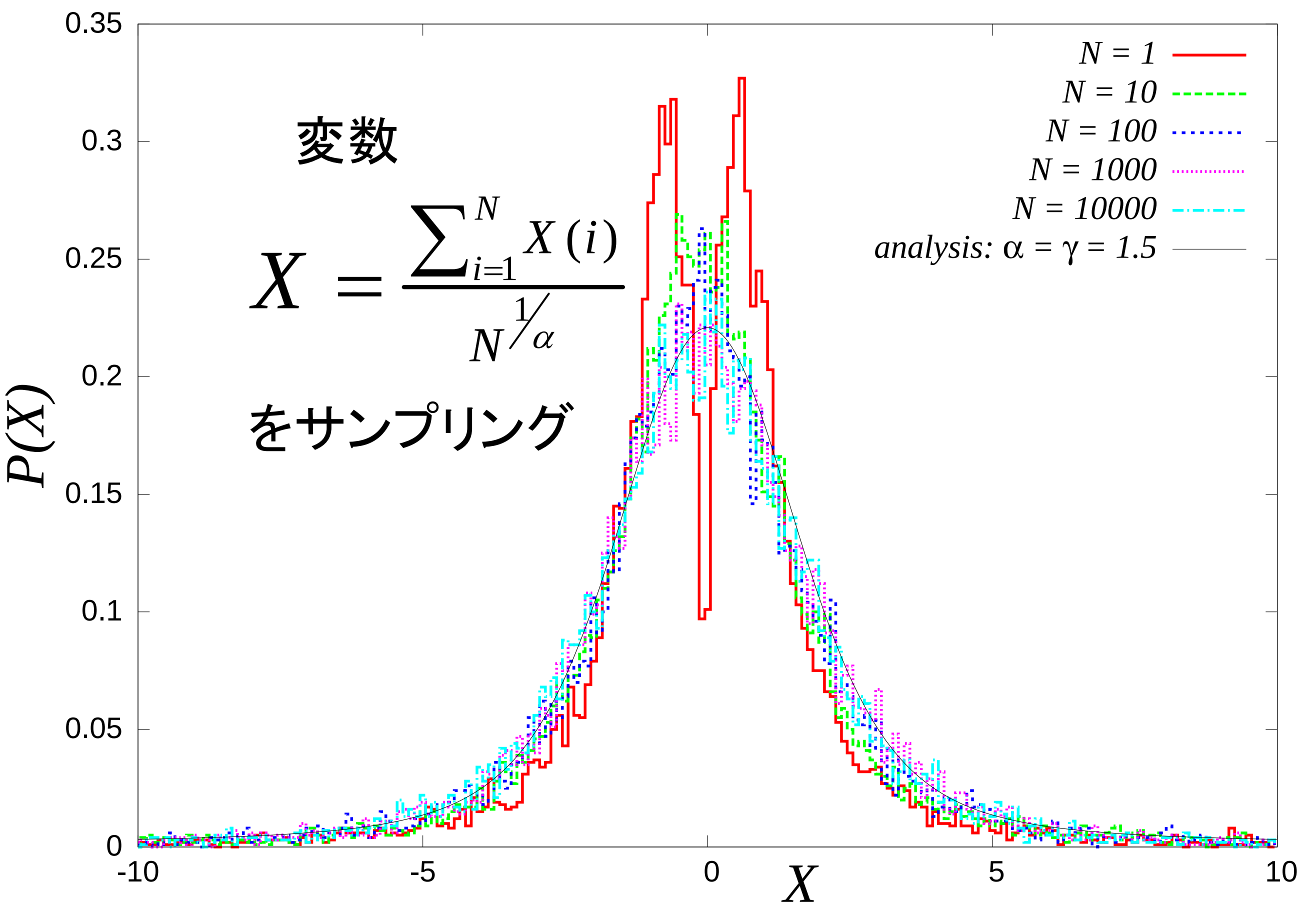
$$X_{n+1} = \left| \tfrac{1}{2}\left(\left|X_n\right|^{\alpha} - \frac{1}{\left|X_n\right|^{\alpha}} \right) \right|^{1/\alpha} \operatorname{sgn}\left(X_n - \frac{1}{X_n} \right)$$

N個の異なる
初期条件からの
写像を並列に
動作させる

変数

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{N} X(i)}{N^{1/\alpha}}$$

をサンプリング



重ね合わせの個数増加
とともにヒストグラム
はレビ分布に近づく

ボラティリティ変動モデル #1

ウイナー過程 $X_{t+1} = X_t + Y_t,\ P(Y_t) = N(0,\sigma)$

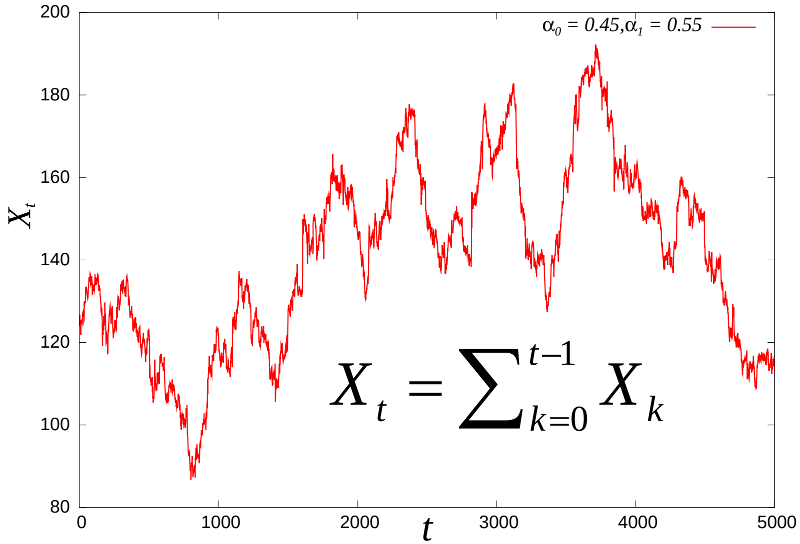
ボラティリティ $E\left[(X_{t+1} - X_t)(X_{t+1} - X_t)\right] = E\left[Y_t^2\right] = \sigma^2$ 時間的に不変

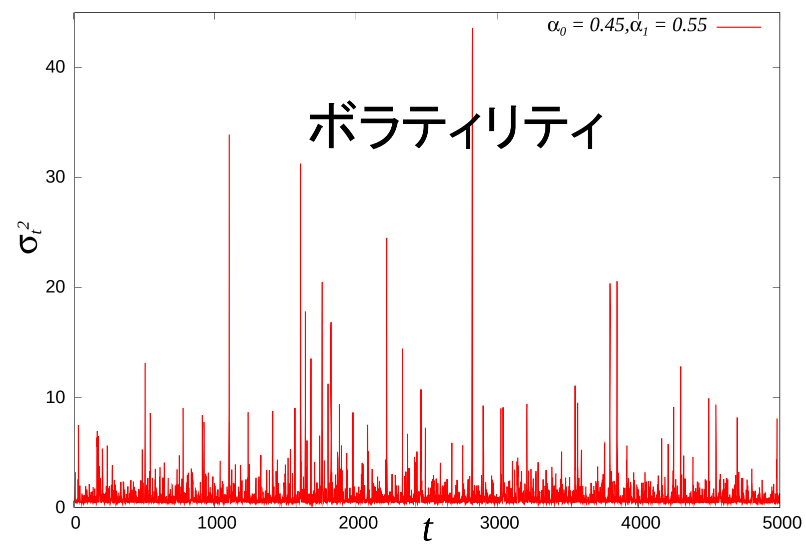
金融の実データではボラティリティは時間とともに変化している

$$X_{t+1} = X_t + Y_t,\ P(Y_t) = N(0,\sigma_t)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t^2$$

ARCH(1) モデル





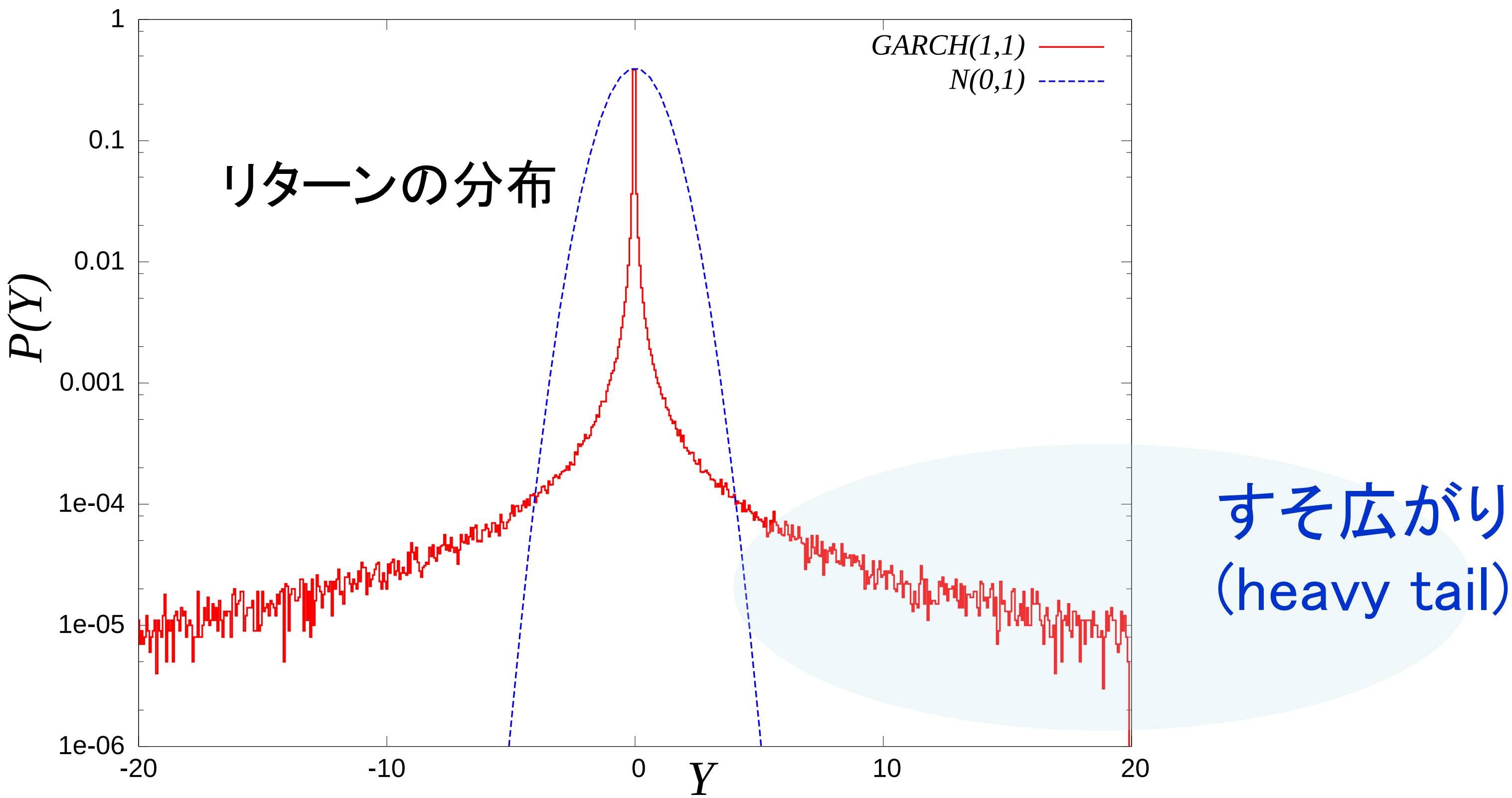
ボラティリティ変動モデル #2

ARCH(1)モデルを一般化する

$$X_{t+1} = X_t + Y_t,\ P\left(Y_t\right) = N\left(0, \sigma_t\right)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2$$

GARCH(1,1)モデル



課題1（1）

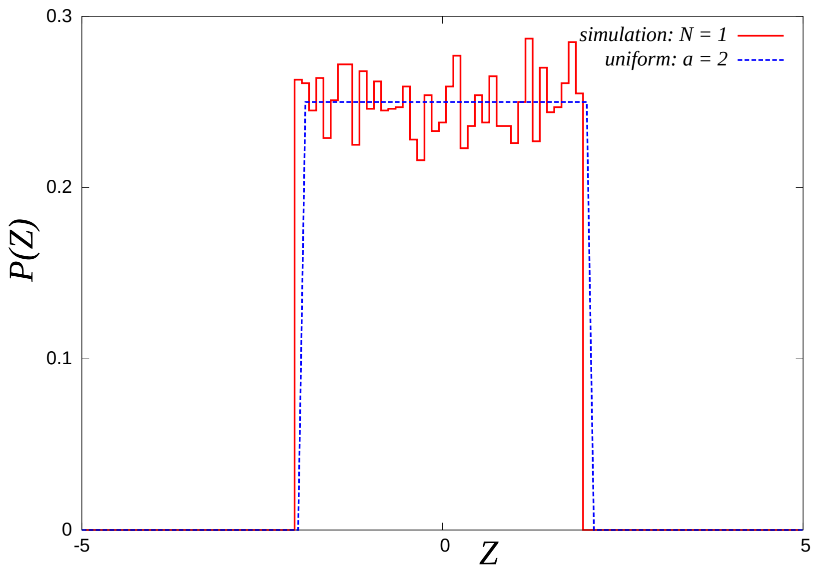
各要素が一様分布

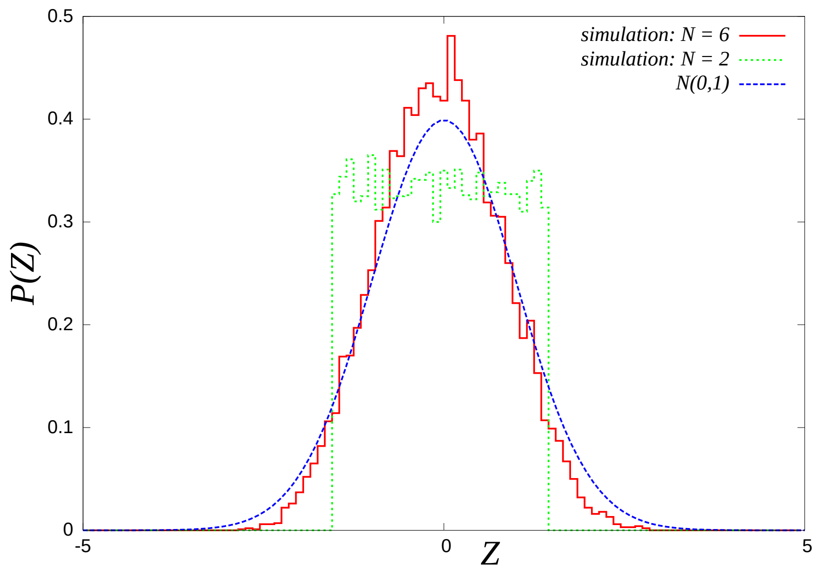
$$P\left(Y_t\right) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \left(\left|Y_t\right| \le a\right) \\ 0 & \left(\text{その他}\right) \end{cases}$$

に従うとき

$$Z_N = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} Y_k}{\sigma\sqrt{N}}$$

の従う分布を計算機で求めよ

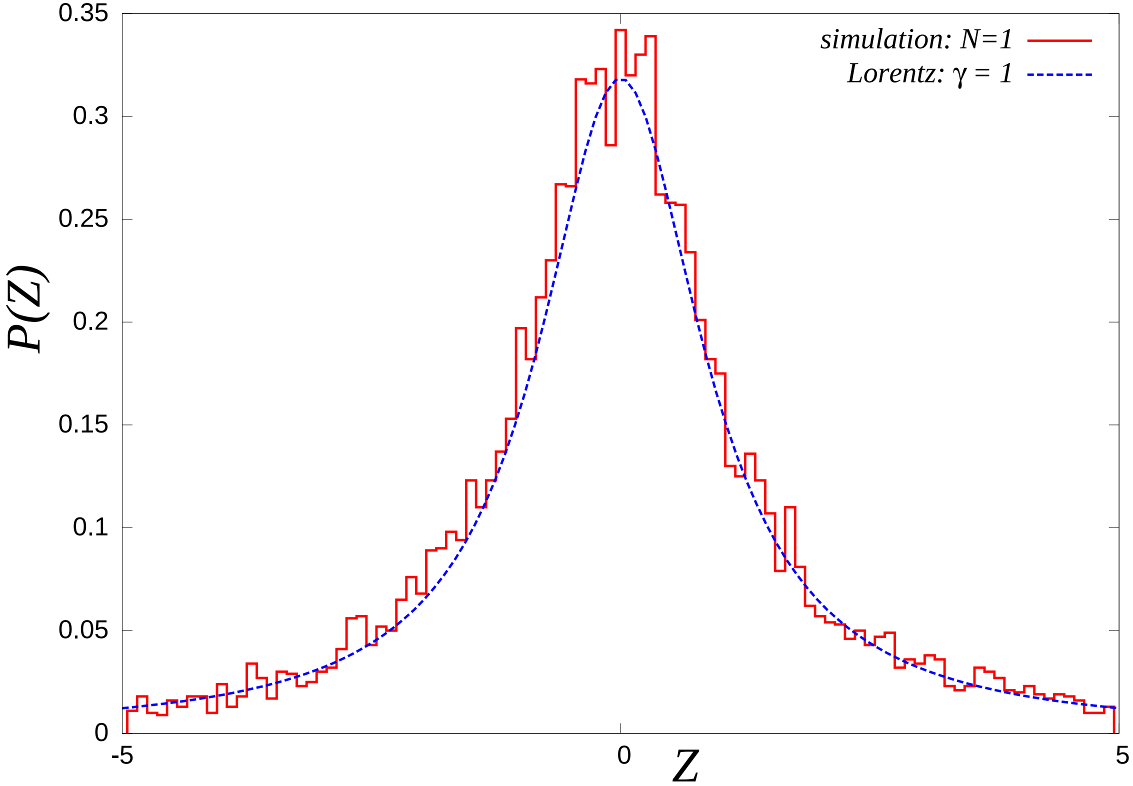




課題1（2）

各要素はローレンツ分布

$$P(Y_t) = \frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{\gamma^2 + Y_t^2}$$ に従う



確率変数

$$Z_N = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k$$

のヒストグラム
を計算機で求めよ

次回は
1月21日