平成17年度 グラフ理論 期末試験解答 (9/16 実施　解答作成：井上 純一)

※ **採点基準**：各問題の配点は問題用紙に記した通り. 以下では太字で書かれた点数のうち,「プラス (＋) 何点」と書かれたものが部分点,「マイナス (－) 何点」と書かれたものが減点である. これら太字での記入が無いものはすべて完全な正解のみ有効. なお, これ以外にも部分点を与える場合がある.

問題 1 (配点 10 点)

(1) 隣接行列 $\boldsymbol{A}$, 接続行列 $\boldsymbol{M}$ は以下の通り **(各 2 点)**.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 問題文に与えられた隣接行列を持つグラフを描くと図 1 のようになる (※ 注：このグラフと完全に一致しなくても同形なグラフであれば正解).

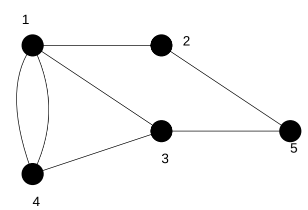

図 1: **問題 1** (2) の正解グラフ.

(3)(i) 「隣接行列の第 i 行, あるいは, 第 i 列の要素和は点 i に接続する辺の数を表す.」**(1 点)**

(ii) 「接続行列の第 i 行の要素和は点 i に接続する辺の本数を表す.」 **(1 点)**

(iii) 「接続行列の第 i 列の要素和は辺 i の両端の点の数を表し, 必ず 2 となる.」 **(1 点)**

問題 2 (配点 10 点)

(1) 明らかに, $S_3(n)$ は初項 1, 公比 3 の等比数列の第 n 項までの和であるから

$$S_3(n) = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{3} \qquad (1)$$

である. 一方, $\mathsf{T}_3(n)$ の端点の総数 $Q_3(n)$ は $\mathsf{T}_3(n)$ の作り方から明らかに $Q_3(n) = 3^n$ であるので, これらの比 $P_3(n) = Q_3(n)/S_3(n)$ は

$$P_3(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{3^{n+1}-1} \qquad (2)$$

であり, 問題の極限値は

$$p_3 = \lim_{n\to\infty} P_3(n) = \frac{2}{3} \qquad (3)$$

と求まる $(S_3(n), Q_3(n)$ **のいずれか一方だけ正解で** $+1$ **点**).

(2) $k = K$ の場合には

$$S_K(n) \;=\; \frac{K^{n+1}-1}{K-1},\;\; Q_K(n) = K^n,\;\; P_K(n) = \frac{(K-1)K^n}{K^{n+1}-1} \tag{4}$$

となるので $(S_K(n), Q_K(n)$ **のいずれか一方だけ正解で** $+1$ **点**), $P_K(n)$ に関して $n \to \infty$ の極限をとると

$$p_K \;=\; \lim_{n\to\infty} P_K(n) = \frac{K-1}{K} \tag{5}$$

が得られる. さらに, この確率で $K \to \infty$ の極限をとれば $p_{K\to\infty} = 1$ となる (**この極限値を忘れていたら** -1 **点**).

問題 3 (配点 15 点)

(1) 全ての辺は 3 本の辺で囲まれており, 全ての辺は 2 つの面の境界となっているので, 面数 f, 辺数 m の間には

$$3f \;=\; 2m \tag{6}$$

が成り立つ (**この関係に気づいて** $+1$ **点**). これとオイラーの公式：$n - m + f = 2$ から面数 f を消去すれば (**この公式が書けて** $+1$ **点**)

$$m \;=\; 3n - 6 \tag{7}$$

が得られる.

(2) (7) を 2 倍したものに

$$n \;=\; \sum_{k=3} n_k,\;\; 2m = \sum_{k=3} k n_k \tag{8}$$

を代入すれば (**これら 2 つの関係のうち, 1 つについて気がつけて** $+1$ **点. 2 つとも気づけて** $+3$ **点**)

$$\sum_{k=3} k n_k \;=\; 6\sum_{k=3} n_k - 12 \tag{9}$$

が得られるが, 和の中のはじめの数項を書き出してみると

$$3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 + 7n_7 + 8n_8 + \cdots \;=\; 6(n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + \cdots) - 12 \tag{10}$$

すなわち

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \cdots \;=\; 12 \tag{11}$$

が成り立つ.

(3) (2) で得られた関係式から

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \cdots - 12 = 0 \le 3n_3 + 2n_4 + n_5 - 12 \tag{12}$$

であるから

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 \;\ge\; 12 \tag{13}$$

である．また, 明らかに $(3n_3+3n_4+3n_5) \geq 3n_3+2n_4+n_5$ であるから, これらの不等式から直ちに

$$n_3+n_4+n_5 \quad \geq \quad \frac{1}{3}(3n_3+2n_4+n_5) \geq \frac{1}{3} \times 12 = 4 \tag{14}$$

従って, グラフ G には次数が 5 以下の点が 4 つ以上含まれることが示せた.

問題 4 (配点 15 点)

(1)(2) ピータースン・グラフは図 2 で与えられる連結グラフであり, 図に示したように辺彩色できるので, その彩色指数は 4 である (**ピータースン・グラフが描けて** $+2$ **点**).

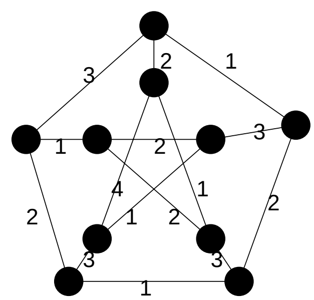

図 2: ピータースン・グラフの彩色. 辺に付された数字が各色を表す.

(3) まず, G が 3 次のハミルトン・グラフなのであるから, 各点でハミルトン閉路に属する 2 辺をハミルトン閉路に沿って互い違いに 2 色 (色 1 と 2 としょう) で $1 \to 2 \to \cdots$ のように辺彩色する．各点で残りの 1 辺を 1,2 と異なる色 3 で彩色すれば, G の 3 彩色が完成する．よって G の彩色指数は 3 である.

(4) (2) より, 3 次のグラフであるピータースン・グラフの彩色指数は 4 であり, これは (3) で示した 3 次のグラフがハミルトン・グラフであるための必要条件である「彩色指数が 3」を満たさない．従って, ピータースン・グラフはハミルトン・グラフではない.