平成 17 年度 グラフ理論 期末試験問題 (9/16 実施　出題者：井上 純一)

※ **注意事項**：問題用紙は 2 ページあり, 大問計 4 題である (50 点満点). 解答用紙, 計算 (下書き) 用紙は各 1 枚配布する. **解答用紙には氏名, 学科学生番号を記入し, 裏面を使う際には「裏に続く」と記入すること**. 試験開始後 30 分間は退室できない. また, 一度退室した場合には再入室できないので注意するように.

問題 1 (配点 10 点) (キーワード：隣接行列, 接続行列)

(1) 図 1 に与えたグラフの隣接行列 $\boldsymbol{A}$, 及び, 接続行列 $\boldsymbol{M}$ を求めよ **(4 点)**.

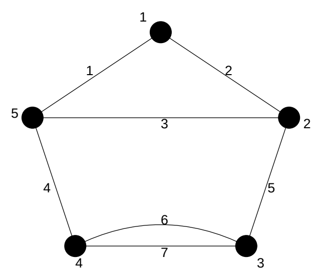

図 1: **問題 1** (1) のグラフ.

(2) 隣接行列が

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるグラフを図示せよ **(3 点)**.

(3) グラフ G にループが無いとき, 次のことに関してわかることを簡潔に述べよ **(3 点)**.

(i) G の隣接行列の任意の行, または, 列の要素の和

(ii) G の接続行列の任意の行の要素の和

(iii) G の接続行列の任意の列の要素の和

問題 2 (配点 10 点) (キーワード：木とその数え上げ)

図 2 のように 1 点から k 本の枝を出し, その k 本の枝からさらに k 本の枝を出すという操作を n 回繰り返してできる木を $\mathsf{T}_k(n)$ と名付けよう. (**注：** n と言うと普通はグラフの点の数を示しますが, ここでは「操作」の回数であることに注意. 図 2 の例は $\mathsf{T}_3(2)$ である.) このとき次の問いに答えよ.

(1) $\mathsf{T}_3(n)$ に含まれる点の総数 $S_3(n)$ を求めよ. また, $\mathsf{T}_3(n)$ の端点の総数を $Q_3(n)$ を求め, 比 $P_3(n) =$

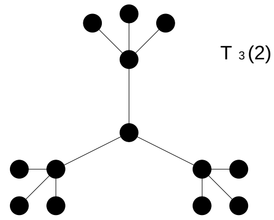

図 2: ここで述べた「操作」によって作られた木 $\mathrm{T}_3(2)$.

$Q_3(n)/S_3(n)$ に対し, 極限値：

$$p_3 = \lim_{n\to\infty} P_3(n)$$

を計算せよ (5 **点**).

(2) (1) を参考にして, 任意の自然数 K に対して $P_K(n)$ を計算し, n に関する極限値：

$$p_K = \lim_{n\to\infty} P_K(n)$$

を求め, さらに K に関する極限値：$p_\infty = \lim_{K\to\infty} p_K$ を計算せよ (5 **点**).

問題 3 (配点 15 点) (キーワード：平面グラフ, オイラーの公式)

グラフ G (点の数：$n \geq 4$) を三角形のみを含む平面グラフであるとする．G に含まれる次数 k の点の個数を n_k とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) G の辺数 m が $m = 3n - 6$ で与えられることを示せ (5 **点**).
(2) 次の関係式：$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \cdots = 12$ が成り立つことを示せ (5 **点**).
(3) G は次数 5 以下の点を 4 つ以上含むことを示せ (5 **点**).

問題 4 (配点 15 点) (キーワード：ピータースン・グラフ, 辺彩色と彩色指数, ハミルトン・グラフ)

(1) ピータースン・グラフを描け (2 **点**).
(2) (1) で求めたピータースン・グラフの辺彩色を考えるとき, その彩色指数を求めよ (3 **点**).
(3) 任意のグラフ G が 3 次のハミルトン・グラフであれば, その彩色指数は 3 であることを示せ (5 **点**).
(4) (2)(3) の結果を用いることにより, ピータースン・グラフはハミルトン・グラフか否かを判定せよ (判定理由も明記すること) (5 **点**).