グラフ理論 配布資料 #3 (教科書 pp. 21 〜 34 の内容)

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

平成 17 年 4 月 25 日

目 次

3 様々なグラフの例 **19**
3.1 空グラフ 19
3.2 完全グラフ 19
3.3 正則グラフ 20
3.4 閉路グラフ 21
3.5 道グラフ 21
3.6 車輪 21
3.7 ピータースン・グラフ 22
3.8 二部グラフ 22
3.9 完全二部グラフ 22
3.10 k-立方体 23
3.11 単純グラフの補グラフ 24

4 グラフにまつわるいくつかのパズル **24**
4.1 8 つの円の配置問題 24
4.2 4 つの立方体パズル 25

演習問題 2 の解答例

1. (i)(ii)(iii) を満たすグラフは図 24 のようになる.

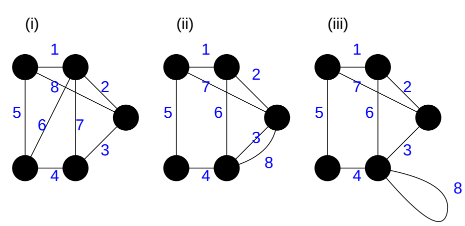


図 24: 5 個の点と 8 本の辺をもつグラフで条件 (i)(ii)(iii) を満たすもの.

2. 定義に従えば, 隣接行列 $\boldsymbol{A}$, 接続行列 $\boldsymbol{M}$ は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

3. 図 25 を参照. 単純グラフは無い.

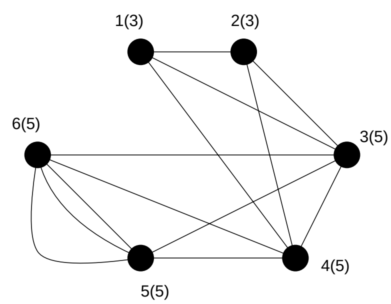


図 25: 6 点からなるグラフで次数列 $(3,3,5,5,5,5)$ であるもの.

3 様々なグラフの例

この節では一般的はグラフ G を論じるのではなく, 様々な (特殊な) グラフを例をとって説明し, 個々のグラフの特徴を見てゆくことにしょう. ここでは, 後のこの講義で頻出するグラフとその性質を簡単に述べるが, 具体的な応用例, 及び, 詳しい性質に関しては追々見て行くことになる. しかし, ここで出てくる各グラフの名前と大まかな性質を押さえておくと, 後の学習がスムーズに進むであろう.

3.1 空グラフ

空グラフ (null graph)：辺集合が空であるグラフ (「点のみからなるグラフ」あるいは「辺のないグラフ」), 数式で表現するならば, n 点からなる空グラフは N_n となる. 図 26 に N_4 の例を載せる.

3.2 完全グラフ

完全グラフ (complete graph)：相違なる 2 つの点が全て隣接している単純グラフ (ループや多重辺を含まないグラフ).
(難しく言うと) $\Rightarrow \forall_{v,v'} \in V(\mathrm{G}), v \neq v'$ に対し, v, v' を両端とする辺が唯一 1 個存在するグラフ.

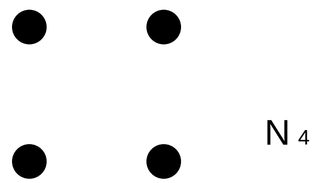


図 26: 空グラフ N_4.

式では n 個の点からなる完全グラフは K_n と表現される.

n 個の点からなる完全グラフ K_n の辺の総数は, $1, 2, \cdots, n$ 個の点の中から任意に 2 点選んで結ぶ場合の数, すなわち, ${}_nC_2 = n(n-1)/2$ 個である. 図の例で言うと, $n=4$ の場合には 6 本, $n=5$ の場合には 10 本であり, これは図 27 より直ちに確認できる.

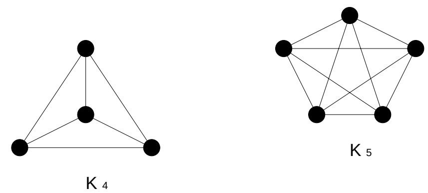


図 27: 完全グラフ K_4 及び K_5.

3.3　正則グラフ

r-**正則グラフ (regular graph)**：全ての $v \in V(\mathrm{G})$ に対して, $\mathrm{dev}(v) = r$ であるグラフ. 平たく言うと, どの点の次数も全て共通に r であるグラフ.

(注)：正則グラフという観点からは, N_n は 0-正則グラフ, C_n は 2-正則グラフ, K_n は $(n-1)$-正則グラフということになる.

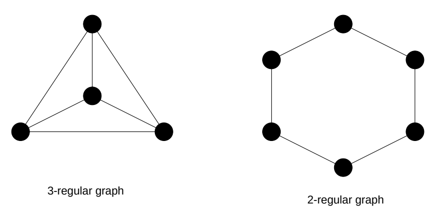


図 28: 次数 3 の正則グラフ (左), 及び, 次数 2 の正則グラフ (右) の例.

3.4　閉路グラフ

閉路グラフ (cycle graph)：次数 2 の正則連結グラフ．式では C_n のように表記される．

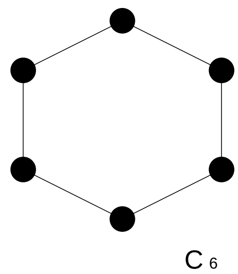


図 29: 閉路グラフ C_6.

3.5　道グラフ

道グラフ (path graph)：閉路グラフ C_n から一つの辺を除いて得られるグラフ．式で表現すると P_n となる．

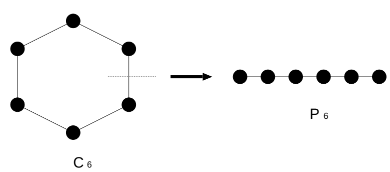


図 30: 閉路グラフ C_6 から次数 6 の道グラフ P_6 を作成する過程.

3.6　車輪

車輪 (wheel)：C_{n-1} に新しい点 v を一つ加え, v と他の全ての点とを辺 (「スポーク」と呼ばれる) で結んでできるグラフ．式で表記すると W_n となる．

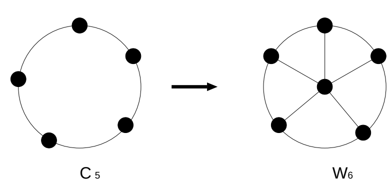


図 31: 閉路グラフ C_5 から次数 6 の車輪 W_6 を作成する過程.

3.7　ピータースン・グラフ

ピータースン・グラフ (Petersen graph) は図のような特殊な形状を持つグラフであるが, 今後の演習問題等でしばしば現れることになる [1].

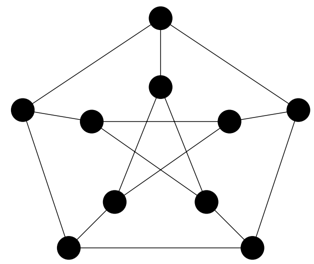


図 32: ピータースン・グラフ.

3.8　二部グラフ

二部グラフ (bipartite graph)：グラフ G の点集合を 2 つの素な集合 A, B に分割し, G の全ての辺は A の点と B の点を結ぶようにできたとする. このとき, グラフ G は二部グラフであるという.

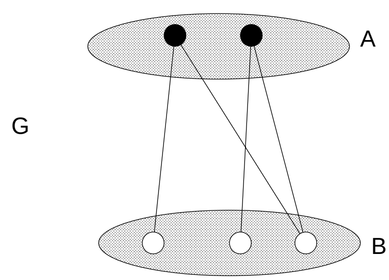


図 33: 二部グラフ G の例. 全ての辺の端点は黒丸と白丸のペアでなくてはいけない.

3.9　完全二部グラフ

完全二部グラフ (complete bipartite graph)：A の各点が B の各点とちょうど 1 本の辺で結ばれている二部グラフ.

図のように点を黒丸と白丸で 2 つの集合に分けたとき, 黒の点 r 個, 白の点 s 個からなる完全二部グラフは $\mathrm{K}_{r,s}$ と表記される.

当然であるが, $\mathrm{K}_{r,s}$ には $(r+s)$ 個の点と rs 本の辺がある.

[1] Petersen graph は教科書では「ピータースン・グラフ」と発音, 日本語表記されているが, 他の専門書では「ペテルセン・グラフ」と発音, 日本語表記されているものが多い (むしろ, こちらの方が多数派である)

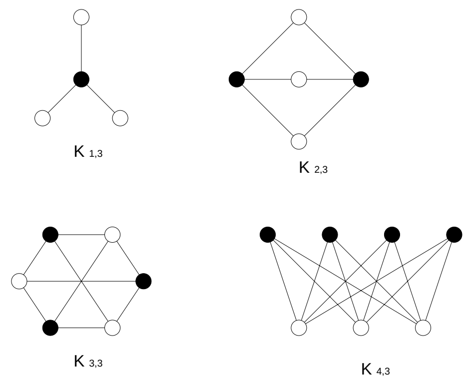


図 34: 完全二部グラフ $K_{1,3}, K_{2,3}, K_{3,3}, K_{4,3}$.

3.10　k-立方体

k-**立方体** (**k-cube**)：$a_i = 0$ or 1 であるような 1 つの列 (ベクトル) $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ に一つの点を対応させ, 一つだけ異なる成分 a_i を持つ二つのベクトルに対応する二つの点が辺で結ばれるような正則二部グラフ. 式で表記すると Q_k となる.

$\Rightarrow$ Q_k は 2^k 個の点と, $k2^{k-1}$ 本の辺[2] を持つ.

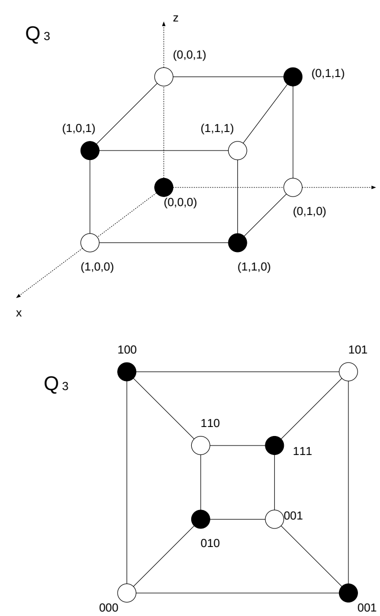


図 35: 3-立方体. 図の G_1 及び G_2 は同形である.

[2] $(0,0,0,1,0,0,\cdots,0), (0,0,0,0,1,0,\cdots,0), \cdots$ の各ベクトルの k 成分のうちのどの成分が食い違うかという場合 k 通り, 残りの $k-1$ 成分の並び替え 2^{k-1} 通りの積で $k2^{k-1}$ 本の辺の数となる.

3.11 単純グラフの補グラフ

単純グラフの補グラフ (complement)：単純グラフ G の補グラフ $\overline{\mathrm{G}}$ とは, 点集合 $V(\mathrm{G})$ を持ち, $\overline{\mathrm{G}}$ の 2 点が隣接するのは G におけるそれらの 2 点が隣接していないとき, かつ, そのときに限るような単純グラフを言う.

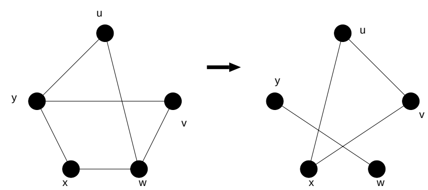


図 36: 単純グラフから, その補グラフを作成する過程.

- 完全グラフの補グラフは空グラフである. (ただし, 逆は言えない).
- 完全二部グラフの補グラフは 2 つの完全グラフの和である.

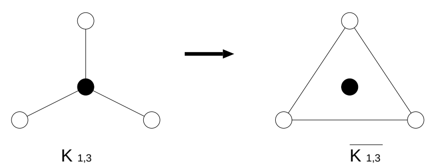


図 37: 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{1,3}$ とその補グラフ.

4 グラフにまつわるいくつかのパズル

ここでは, グラフを用いて効率的に解くことができる 2 つのパズルを紹介しょう.

4.1 8 つの円の配置問題

図 38 のような 8 つの円の中に A, B, C, D, E, F, G, H の 8 つの文字を入れることを考える. ただし, アルファベット順で隣にくる文字は互いに隣接しないように置く. このとき, このとき, 適切な配置の仕方を答えよ. ちなみに, 可能な配置の総数は $8! = 46320$ 通りであるから, 全ての場合をしらみつぶしに試してみる戦略は適切ではないことに注意しょう. **(着眼点)**：

- A と H の配置の仕方は易しい (片側にしか相手がいないから).
- 図の #1, #2 の円への配置が最も難しい (次数が最大だから).

(解答)：

1. 最も次数が多く難しい, #1, #2 にそれぞれ A, B を配置する.

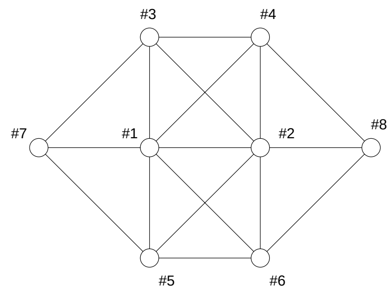


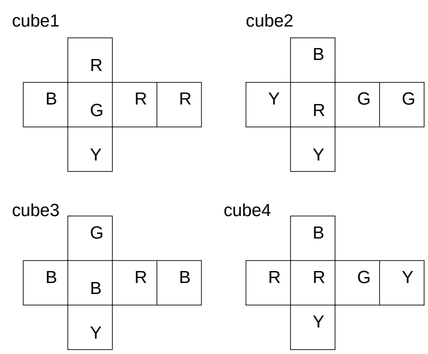
図 38: 8 つの円の配置問題の図.

2. アルファベットで A, H の隣にくる B 及び G をそれぞれ #8, #7 にそれぞれ配置する.
3. 残りの文字をそれぞれがアルファベットで隣り合わないように配置する．例えば, $\#3 = $ C, $\#4 = $ E, $\#5 = $ D, $\#6 = $ F のように配置すればよい.

4.2 4 つの立方体パズル

(問題)

図のような立方体の展開図：cube1, cube2, cube3, cube4



から立方体を作り, それらを積み上げげて, 四角柱を作り, 四角柱の 4 つの側面それぞれに 4 色全てが表れるような四角柱の積み上げ方を見つけたい.

以下の問い (1)〜(3) に答え, このような配置を求めよ.

(1) 各立方体を 4 点からなるグラフで表し, R, B, G, Y の各点は各色に対応させ, 平行な面に塗られた色に対応する点は辺で結ぶ. このようにして出来上がるグラフを cube1, cube2, cube3, cube4 に対して描け.
(2) (1) で求めたグラフを重ね合わせたグラフ G を描け.
(3) G の部分グラフ H_1, H_2 を見つけ出し, 立方体：cube1, cube2, cube3, cube4 を積み上げて, 四角柱を作り, 四角柱を作ったとき, その四角柱の 4 つの長方形の側面にそれぞれ 4 色全部が現れるような積み上げ方を示せ.

(解答)

(1) まず, cube1, cube2, cube3, cube4 に相当するグラフはそれぞれ図 39 のようになる.

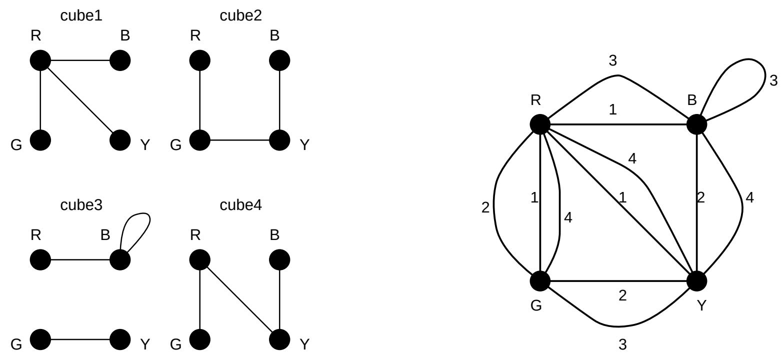


図 39: cube1, cube2, cube3, cube4 にそれぞれ相当するグラフ (左), 及び, それぞれのグラフを重ね合わせることにより得られるグラフ G(右).

(2) (1) で得られたグラフを重ね合わせると, 図 39(右) の G が得られる.

(3) 各 cube の辺をちょうど 1 本ずつ含み, 共通な辺が無く, 次数 2 の正則グラフとしてのグラフ G の部分グラフ $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2$ を選ぶと, 図 40 のようになる. これらの部分グラフ H_1 (FB), H_2 (LR) を用いて, cube1, cube2, cube3, cube4 を積み上げると図 40(右) のようになる. これが答えである.

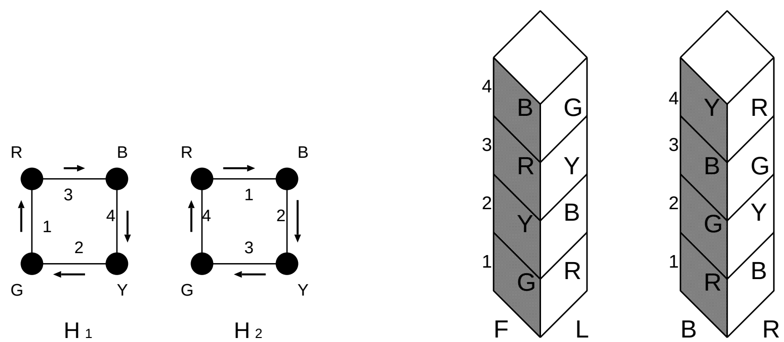
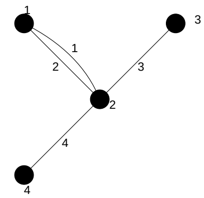


図 40: 求める G の部分グラフ $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2$ (左), 及び, 求める立方体の積み上げ方 (右).

例題 4

図に載せるグラフ G に関して以下の問いに答えよ.



(1) グラフ G の接続行列を求めよ.

(2) 接続行列の各列の要素の和は何を意味しているか？

(3) 接続行列の各行の要素の和は何を意味しているか？

(4) $\epsilon(\mathrm{G})$ をグラフ G の辺数とすると

$$\sum_{v \in V(\mathrm{G})} \deg(v) = 2\epsilon(\mathrm{G})$$

が成り立つことを示せ.

(解答例)

(1) 定義に従って, 問題に与えられたグラフの接続行列 $\boldsymbol{M}$ を書き下すと

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のようになる.

(2) 例えば, 上記の接続行列の第 1 行目を見てみると, 第 1, 2 列に 1 が立っている. これは点 1,2 が辺 1 で結ばれていることを表している. 接続行列の定義から, 各列は辺の番号を表し, 各列に 1 が立っている行が該当する辺に接続する点を表しており, 1 つの辺に接続できる点の数は常に 2 つであるから, **接続行列の各列の成分の和は常に 2 である**ということができる.

(3) 接続行列の定義から, 各行の成分の和は**各点の次数の和を表す**.

(4) (2)(3) の考察より, 次数の和 $\sum_{v \in V(\mathrm{G})} \deg(v)$ 接続行列の各行の成分和を全ての行に対して計算したものに等しく, これは接続行列の全ての成分を足したものである. 一方, 接続行列の各列の要素の和は常に 2 であり, 従って, 接続行列の全ての成分の総和は, 辺の数の 2 倍すなわち $2\epsilon(\mathrm{G})$ であり, 結局

$$\sum_{v \in V(\mathrm{G})} \deg(v) = 2\epsilon(\mathrm{G})$$

が成り立つ.

例題 5
図 27 に載せた完全グラフ K_5 について以下の問いに答えよ.

(1) 図 27 の完全グラフ K_5 の 5 つの頂点に, 時計回りに番号 $1, \cdots, 5$ を割り当てる. このとき, この完全グラフの隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ.
(2) 点 1 と点 3 を結ぶ長さ 2 の歩道の数は, $\boldsymbol{A}^2$ の第 $(1,3)$-成分に等しいことを示せ.
(3) 点 1 と点 3 を結ぶ長さ 3 の歩道の数は, $\boldsymbol{A}^3$ の第 $(1,3)$-成分に等しいことを示せ.
(4) 一般に, 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を持つ単純グラフ G の 2 点 i, j を結ぶ長さ K の歩道の数は, $\boldsymbol{A}^K$ の第 (i,j)-成分に等しいことを示せ.

(解答例)

(1) 完全グラフ K_5 の隣接行列 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のように対角成分がゼロであり, 非対角成分に 1 が並んだ行列となる.

(2) まず, 図の完全グラフ K_5 から考察してみると, 点 1 と 3 を結ぶ長さ 2 の歩道は

$$[1] \quad \mathbf{1} \to 2 \to \mathbf{3}$$
$$[2] \quad \mathbf{1} \to 5 \to \mathbf{3}$$
$$[3] \quad \mathbf{1} \to 4 \to \mathbf{3}$$

の **3 つ**である.
一方, 隣接行列の自乗を計算してみると

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

となり, これから直ちに $\boldsymbol{A}^2$ の**第** $(1,3)$**-成分は 3 である**ことがわかる. 従って, 題意が示せた.

(3) (2) と同様に, 少々面倒であるが, まずは問題の完全グラフから点 1,3 を結ぶ長さ 3 の歩道を数え上げてみると

$$[1] \quad \mathbf{1} \to 2 \to 1 \to \mathbf{3}$$
$$[2] \quad \mathbf{1} \to 3 \to 1 \to \mathbf{3}$$
$$[3] \quad \mathbf{1} \to 4 \to 1 \to \mathbf{3}$$
$$[4] \quad \mathbf{1} \to 5 \to 1 \to \mathbf{3}$$
$$[5] \quad \mathbf{1} \to 2 \to 5 \to \mathbf{3}$$
$$[6] \quad \mathbf{1} \to 2 \to 4 \to \mathbf{3}$$
$$[7] \quad \mathbf{1} \to 3 \to 2 \to \mathbf{3}$$

$$[8] \quad \mathbf{1} \to 3 \to 4 \to \mathbf{3}$$
$$[9] \quad \mathbf{1} \to 3 \to 5 \to \mathbf{3}$$
$$[10] \quad \mathbf{1} \to 4 \to 2 \to \mathbf{3}$$
$$[11] \quad \mathbf{1} \to 4 \to 5 \to \mathbf{3}$$
$$[12] \quad \mathbf{1} \to 5 \to 2 \to \mathbf{3}$$
$$[13] \quad \mathbf{1} \to 5 \to 4 \to \mathbf{3}$$

のようになり, **計 13 通り**存在する.
一方, $\boldsymbol{A}^3$ を計算すると

$$\boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 12 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 12 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

となり, この**第 $(1,3)$-成分は 13** となり, 題意が示された.

(4) 一般に n 点からなる単純グラフの隣接行列の K 乗, つまり, $\boldsymbol{A}^K$ の第 (i,j)-成分は

$$[\boldsymbol{A}^K]_{ij} = \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_K=1}^{n} a_{ik_1}a_{k_1k_2}a_{k_2k_3}\cdots a_{k_{K-1}k_K}a_{k_Kj}$$

であり, a_{ik_1} は点 i と k_1 を結ぶ道の数であることから, 上記の $[\boldsymbol{A}^K]_{ij}$ は点 i, j を結ぶ道の数に等しいことがわかる.

例題 6
完全三部グラフ $\mathrm{K}_{r,s,t}$ はそれぞれに属する点の個数が r, s, t である 3 つの点集合からなり, 異なる集合に属する点は全て辺で結ばれているグラフである. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{K}_{2,2,2}$ 及び $\mathrm{K}_{3,3,2}$ を描け.
(2) $\mathrm{K}_{r,s,t}$ には全部で何本の辺があるか答えよ.

(解答例)

(1) 完全三部グラフ $\mathrm{K}_{2,2,2}$ を描くと図 41 のようになる ($\mathrm{K}_{3,3,2}$ も同様にして作図できるが, ここでは省略.).

(2) $\mathrm{K}_{r,s,t}$ の辺の本数は $rs + rt + st$ 本である.

演習問題 3

1. 次の (i)〜(v) のグラフがある場合にはそれを 1 つ挙げて描け (無い場合には「無し」と書く).
 (i) 次数 5 の正則グラフであるような二部グラフ.
 (ii) 二部グラフであるプラトン・グラフ.
 (iii) 車輪である完全グラフ.
 (iv) 11 個の点をもつ 3 次グラフ.

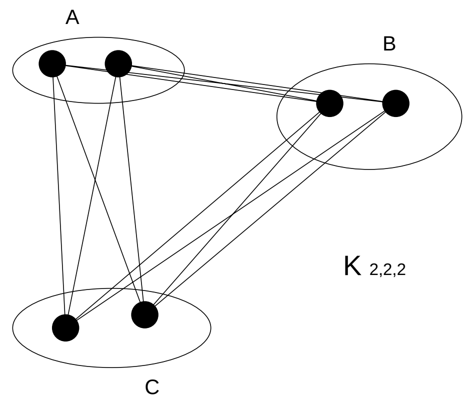


図 41: 完全 3 部グラフ $K_{2,2,2}$ の作図例. $K_{3,3,2}$ も同様にして作図できるが, ここでは省略.

(v) 次数 4 の正則グラフで $K_5, K_{4,4}, Q_4$ 以外のグラフ.

2. それ自身の捕グラフと同形な単純グラフは**自己捕対 (self-complementrary)** であるという．このとき

(1) 4 個, または 5 個の点をもつ自己捕対グラフを全て描け.

(2) 8 個の点からなる自己捕対グラフを見つけよ.

連絡 #1：次回 5 月 2 日は休講です.

連絡 #2：今回のレポートの〆切は 5 月 9 日の講義開始時です.