

# グラフ理論 配布資料 #8 (教科書 pp. 83 ~ 102 の内容)

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

平成 17 年 6 月 13 日

## 目 次

9 平面性	83
9.1 平面グラフとオイラーの公式	83
9.2 交差数と厚さ	89

### 演習問題 7 の解答例

この行列木定理を用いた証明では、後に述べるように完全グラフ  $K_n$  の点行列の行列式を求めることが必要となるので、まずは準備として次のような  $m \times m$  の対称行列の行列式を求める公式を作っておくことにする。

$$\begin{aligned} b_m &\equiv \begin{vmatrix} a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\ &= (a+1)b_{m-1} + (a+1)c_{m-1} \end{aligned} \quad (68)$$

ただし、下付きの添え字はその行列式のサイズを表し、 $c_{m-1}$  は次のような漸化式で定義される行列式である。

$$\begin{aligned} c_{m-1} &\equiv \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &= (1+a)c_{m-2} \end{aligned} \quad (69)$$

従って、 $b_m$  を求めるためには  $b_m, c_{m-1}$  に関する次の連立漸化式を解けばよい。

$$\begin{cases} b_m &= (a+1)b_{m-1} + (a+1)c_{m-1} \\ c_{m-1} &= (a+1)c_{m-2} \end{cases} \quad (70)$$

$c_{m-1}$  に関する漸化式は直ちに解けて、 $c_{m-1} = (a+1)^{m-2}c_1$  が得られるので、これを  $b_m$  に関する漸化式に代入すれば、求めるべき  $b_m$  は簡単に

$$b_m = (a+1)^{m-1}b_1 + (m-1)(a+1)^{m-1}c_1 \quad (71)$$

のように定まる. 完全グラフの全域木の総数はこの公式 (71) で求めることができる. 例として完全グラフ  $K_5, K_6$  の点行列はそれぞれ

$$D_{K_5} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (72)$$

$$D_{K_6} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad (73)$$

と書くことができる. 従って, 一般に完全グラフ  $K_n$  の全域木の総数は, 前に求めた公式 (71) で

$$m = n - 1, a = n - 1, b_1 = a, c_1 = -1 \quad (74)$$

と置けばよいので, これらの値を代入すれば直ちに

$$\tau(K_n) = b_{n-1} = n^{n-2} \quad (75)$$

が求める全域木の総数であることがわかる. 完全グラフ  $K_n$  の全域木と  $n$  点からなるラベル付き木は 1 対 1 に対応するので, 以上により, ケイリーの定理を行列木定理を用いて証明することができた.

## 9 平面性

ここではグラフの平面性, つまり, 一般のグラフが平面内にどの辺も交差することなく描くことのできる条件について学ぶ. また, そのようにして描けるグラフ — 平面グラフ — の性質, 及び, 与えられたグラフの「平面への描きやすさ」を測る指標である「交差数」「厚さ」についても詳しく見て行くことにする. なお, 講義では教科書での説明順番を換え, まずオイラーの公式とその使い方 (pp. 90 ~ 97) を説明する. 平面描画可能性の構成論的証明法, 及び, Kuratowski (クラトウスキー) の定理とその系 (pp. 83 ~ 88) に関しては, トポロジー (位相幾何学) に関するかなりの素養と長い議論が必要となるため, 本講義では省略する. また, 「§ 14 他の種類の曲面上のグラフ」も講義では解説を省略するので, この部分に関しては各自が教科書を読んでおくように.

### 9.1 平面グラフとオイラーの公式

平面グラフ (planar graph): どの 2 つの辺も, それが接続する点以外では幾何学的に交差しないように描かれたグラフ (図 110 参照).

面 (face): 辺によって分割される領域

図 111 において, 非有界な面  $f_4$  は無限面 (infinite face) と呼ばれる.

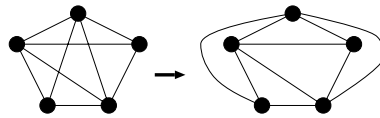


図 110: 平面グラフの例. 両者は位相同形であるが, 右のような描画において平面グラフとわかる.

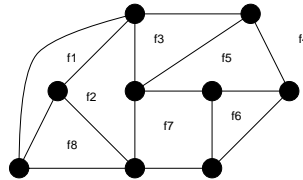


図 111: 8 つの領域に分割された平面グラフ. これら領域の中で,  $f_4$  は無限面である.

与えられたグラフ  $G$  を点数  $n$ , 辺数  $m$ , 面数  $f$  で特徴付けることにすると, これらの量の間にいかなる関係があるとき, グラフ  $G$  は平面へ埋め込み可能であり, 平面グラフとなりうるであろうか? この答えはオイラーによって次の定理 (公式) としてまとめられている.

**定理 13.1 (オイラーの公式)**

グラフ  $G$  を連結な平面グラフとすると, 次の公式が成り立つ.

$$n - m + f = 2 \quad (76)$$

(証明)

辺数  $m$  に関する数学的帰納法で証明する.

$m = 0$  のとき, 点数が 1 つだけの素グラフであるから  $n = 1$  であり, 面は無限面が 1 つ, つまり,  $f = 1$  である. 従って

$$n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2$$

となり, 関係式が成立する.

従って, 以下では  $m \neq 0$  のときを考える. このとき帰納法の仮定として

「 $m - 1$  本以下の辺を持つ全てのグラフ  $G$  について (76) が成り立つ」

としてみよう. この仮定のもとで, 辺数  $m$  のグラフに対しても関係式 (76) の成立が示せれば証明は終了である.

グラフ  $G$  が木の場合には,  $m$  本の辺を持つとすると, 当然のことながら  $m = n - 1$ ,  $f = 1$  (無限面) であるから, 関係式 (76) は

$$n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$$

となり, 辺数  $m$  に対して成立する.

一方、グラフ  $G$  が木ではない場合、グラフ  $G$  の任意の辺を削除した場合、辺数、点数、面数はそれぞれ

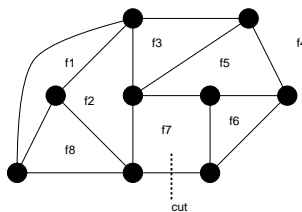


図 112: グラフの任意の辺を削除した場合の辺、点、面の数の変化量を考える。このグラフに関して言えば、削除前： $n = 9, m = 15, f = 8$  であり、 $9 - 15 + 8 = 2$  としてオイラーの公式を満たし、削除後： $n = 9, m = 14, f = 7$  であり、 $9 - 14 + 7 = 2$  としてオイラーの公式は満たされる。

のように変わるか、調べると (例えば、図 112 を参照)

$$\begin{cases} n & \Rightarrow & n \\ m & \Rightarrow & m - 1 \\ f & \Rightarrow & f - 1 \end{cases}$$

のように変化するから、 $m - 1$  本の辺に対して (76) が成立、すなわち、上の矢印の右側の量に対して (76) が成り立つわけであるから

$$n - (m - 1) + f - 1 = 2$$

が成立すべきであり、この式を変形すると

$$n - m + f = 2$$

となり、変数  $m$  のときの関係式が導かれ、この成立が言えたことになる。(証明終わり)。

まずはこの公式に慣れるため、次に挙げる例題を考えてみよう。

#### 例題 18

オイラーの公式を用いて、次のグラフが平面的であるかどうか判別せよ。

- (1) 完全グラフ  $K_4$
- (2) 完全グラフ  $K_5$
- (3) 完全二部グラフ  $K_{3,3}$

(解答例)

このオイラーの公式をダイレクトに用いずに、使いやすいように書き換えることから始めよう。

オイラーの公式の中には面数  $f$  が入ってくるが、この  $f$  は考えるグラフ  $G$  に同形であるグラフの中で、どのグラフを採用するかによって曖昧性がある。つまり、面の数は同形写像により変化する。一方、点、辺の数は不変である。従って、できることならば、この面数を他の量で置き換えて評価したい。この目的のために、まず、グラフ  $G$  に関していくつかの定義をしておく。

内周  $\kappa$  : グラフ  $G$  の最短の閉路長。

$d(F)$  : グラフ  $G$  における面  $F$  に含まれる点の次数和。

これらの定義のもとで、グラフ  $G$  の任意面  $F$  に対して、次の不等式が成り立つ。

$$\kappa \leq d(F) \quad (77)$$

例えば、完全グラフ  $K_4$  の描画としては図 113 に載せた 2 通りのどちらも正しいが (もちろん、平面的なのは右側)、内周  $\kappa$  はどちらも  $\kappa = 3$  である。従って、直ちに

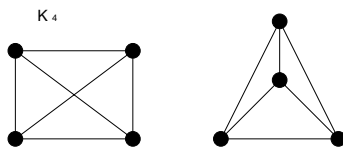


図 113: 完全グラフ  $K_4$  の二つの描画法.

$$\kappa f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \quad (78)$$

が成立する。ここで、 $\mathbf{F}(G)$  はグラフ  $G$  に含まれる面の集合であり、上の関係式の最後の等式では前出の握手補題を用いた。この式とオイラーの公式から面数  $f$  を消去すると

$$\kappa(2 - n + m) \leq 2m \quad (79)$$

つまり、グラフ  $G$  が平面的となるためには、辺数  $m$  が上から押さえられて (辺数が多くなると、辺と辺が交差する可能性も大きくなるので、平面グラフの辺数に上限があるのは自然である)

$$m \leq \frac{\kappa(n-2)}{\kappa-2} \quad (80)$$

なる不等式を満たさなければならない。以下ではこの不等式をもって、与えられたグラフに関する平面性の判別式としよう。

(1) 完全グラフ  $K_4$  :

このグラフにおいて、 $n = 4$ ,  $m = {}_4C_2 = 6$ ,  $\kappa = 3$  であるから、判別式 (79) は

$$6 \leq \frac{3 \cdot (4-2)}{3-2} = 6 \quad (81)$$

となり成立する。従って、完全グラフ  $K_4$  は平面的である。

(2) 完全グラフ  $K_5$  :

このグラフにおいては、 $n = 5$ ,  $m = {}_5C_2 = 10$ ,  $\kappa = 3$  であるから、判別式 (79) は

$$10 \leq \frac{3 \cdot (5-2)}{3-2} = 9 \quad (82)$$

となり、不成立。従って、完全グラフ  $K_5$  は平面的ではない。

(3) 完全二部グラフ  $K_{3,3}$  :

このグラフに関しては,  $n = 6$ ,  $m = 3^2 = 9$ ,  $\kappa = 4$  であるから, 判別式 (79) は

$$9 \leq \frac{4 \cdot (6 - 2)}{4 - 2} = 8 \quad (83)$$

となり, 不成立. 従って, 完全二部グラフ  $K_{3,3}$  は平面的ではない.

以上はグラフ  $G$  が連結グラフである場合の議論であった. しかし, グラフ  $G$  が非連結であり,  $k$  個の成分を持つ場合, オイラーの公式がどのように修正されるのかを見ることは実用的にも意義深い.

**系 13.3**

平面グラフ  $G$  には,  $n$  個の点,  $m$  本の辺,  $f$  個の面,  $k$  個の成分があるとする. このとき

$$n - m + f = k + 1 \quad (84)$$

である.

(証明)

グラフ  $G$  に  $k$  個の成分がある場合には, 無限面を  $k - 1$  回だけ余分に勘定するので, 面数は  $f - (k - 1)$  であり, これについてオイラーの公式を書き出してみると

$$n - m + \{f - (k - 1)\} = 2 \quad (85)$$

となり, これを整理すると

$$n - m + f = k + 1 \quad (86)$$

となり, 所望の関係式が得られる. (証明終わり).

**系 13.4**

(1) 連結単純平面グラフ  $G$  が,  $n(\geq 3)$  個の点と  $m$  本の辺を持つとき

$$m \leq 3n - 6 \quad (87)$$

が成り立つ.

(2) さらに,  $G$  に三角形が無ければ

$$m \leq 2n - 4 \quad (88)$$

が成立する.

(証明)

(1) グラフ  $G$  に含まれる最小な面は, 3 点からなる閉路, すなわち, 三角形であるから

$$3 \leq d(F) \quad (89)$$

が成り立つ。従って、握手補題により直ちに

$$3f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \quad (90)$$

となり、これとオイラーの公式：  $f = 2 - n + m$  より、面数  $f$  を消去すると所望の不等式：

$$m \leq 3n - 6 \quad (91)$$

が得られる。

(2) 明らかに三角形が無い場合には、 $G$  に含まれる最小の面は 4 点からなる閉路であり、不等式

$$4 \leq d(F) \quad (92)$$

が成り立つ。従って、握手補題から直ちに

$$4f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \quad (93)$$

が得られ、これとオイラーの公式から面数  $f$  を消去することにより、所望の不等式

$$m \leq 2n - 4 \quad (94)$$

が得られる。

(証明終わり)。

### 系 13.6

全ての単純平面グラフには次数 5 以下の点がある。

(証明)

グラフ  $G$  の任意の頂点  $v$  に対して

$$\delta \leq \deg(v) \quad (95)$$

とすると、握手補題と系 13.4(1) より

$$\delta n \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \leq 2(3n - 6) = 6n - 12 \quad (96)$$

すなわち

$$\delta \leq 6 - \frac{12}{n} \quad (97)$$

が成り立ち、従って、次数  $\delta$  に対して

$$\delta \leq 5 \quad (98)$$

が成立する。(証明終わり)<sup>1</sup>。

<sup>1</sup> この系での結論は後に学ぶ「グラフの彩色」の節の定理 17.2 の証明で用いることになります。

## 9.2 交差数と厚さ

グラフを 2 次元平面内に埋め込む場合, そのグラフがオイラーの公式より埋め込み不可能であるとわかったとしても, どの程度, 埋め込むことが困難であるのか, を定量的に測る指標が必要となる. そこで, ここでは交差数と厚さという 2 つの指標について説明する.

交差数 (crossing number)  $cr(G)$ : グラフ  $G$  を平面描写した際に生じる, 辺の最小交差の数.

厚さ (thickness)  $t(G)$ : いくつかの平面グラフを重ね合わせてグラフ  $G$  を作る時に必要な平面グラフの数.

### 例題 19

$r$  と  $s$  が偶数のとき

$$cr(K_{r,s}) \leq \frac{1}{16} rs(r-2)(s-2)$$

を示せ.

(解答例)

図 114 のように黒, 白丸を配置し, 黒丸と白丸を結んでできる線分の交差点を勘定すればよい. このよう

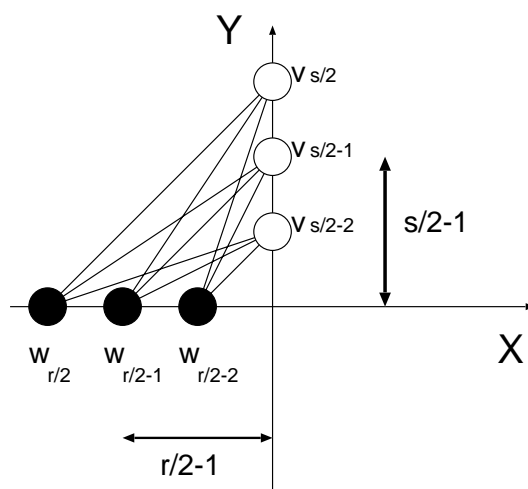


図 114: 線分の交点の個数を数える.

配置の仕方による交差数は明らかに図 115 のような場合よりも少ない. さて, 対称性より, 図 114 の第 3 象限だけを考えればよい.  $Y$  軸上の点を原点から近い順に  $v_1, v_2, \dots, v_{s/2}$  とし,  $X$  軸上の点を原点から近い順に  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  と名前を付けることにする. すると,  $v_{s/2}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  を結ぶ線分と,  $v_{s/2-1}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  を結ぶ線分の交点の数  $q_1$  は

$$q_1 = \left(\frac{r}{2} - 1\right) + \left(\frac{r}{2} - 2\right) + \dots + \left(\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2} - 2\right)\right) + 1 \quad (99)$$



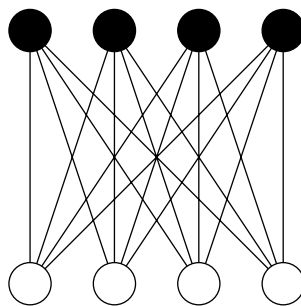


図 115:  $r = s = 4$  の場合の配置の一例.

である. 同様にして  $v_{s/2}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  を結ぶ線分及び  $v_{s/2-1}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  を結ぶ線分と  $v_{s/2-2}$  と  $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$  とを結ぶ線分の交点の数  $q_2$  は

$$q_2 = 2 \left( \frac{r}{2} - 1 \right) + 2 \left( \frac{r}{2} - 2 \right) + \dots + 2 \left( \frac{r}{2} - \left( \frac{r}{2} - 2 \right) \right) + 2 \quad (100)$$

となる. 同様の定義で  $q_3$  は

$$q_3 = 3 \left( \frac{r}{2} - 1 \right) + 3 \left( \frac{r}{2} - 2 \right) + \dots + 3 \left( \frac{r}{2} - \left( \frac{r}{2} - 2 \right) \right) + 3 \quad (101)$$

となり,  $v_1$  と全ての線分の交点の個数  $q_{s/2-1}$  は

$$q_{s/2-1} = \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \left( \frac{r}{2} - 1 \right) + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \left( \frac{r}{2} - 2 \right) + \dots + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \left( \frac{r}{2} - \left( \frac{r}{2} - 2 \right) \right) + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \quad (102)$$

である.

従って, 第 3 象限内に現れる交点の個数  $Q$  は

$$\begin{aligned} Q &= q_1 + q_2 + \dots + q_{s/2-1} \\ &= \left( \frac{r}{2} - 1 \right) + \left( \frac{r}{2} - 2 \right) + \dots + \left( \frac{r}{2} - \left( \frac{r}{2} - 2 \right) \right) + 1 \\ &\quad + 2 \left( \frac{r}{2} - 1 \right) + 2 \left( \frac{r}{2} - 2 \right) + \dots + 2 \left( \frac{r}{2} - \left( \frac{r}{2} - 2 \right) \right) + 2 \\ &\quad + 3 \left( \frac{r}{2} - 1 \right) + 3 \left( \frac{r}{2} - 2 \right) + \dots + 3 \left( \frac{r}{2} - \left( \frac{r}{2} - 2 \right) \right) + 3 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \left( \frac{r}{2} - 1 \right) + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \left( \frac{r}{2} - 2 \right) + \dots + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \left( \frac{r}{2} - \left( \frac{r}{2} - 2 \right) \right) + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \\ &\equiv p_1 + p_2 + \dots + p_{s/2-1} \end{aligned} \quad (103)$$

となる.

ここで

$$\begin{aligned} p_1 &\equiv \left( \frac{r}{2} - 1 \right) + 2 \left( \frac{r}{2} - 1 \right) + \dots + \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \left( \frac{r}{2} - 1 \right) \\ &= \left( \frac{r}{2} - 1 \right) \sum_{k=1}^{s/2-1} k \\ &= \left( \frac{r}{2} - 1 \right) \frac{1}{2} \frac{s}{2} \left( \frac{s}{2} - 1 \right) = \frac{s}{4} \left( \frac{r}{2} - 1 \right) \left( \frac{s}{2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned}
 p_2 &\equiv \left(\frac{r}{2} - 2\right) + 2\left(\frac{r}{2} - 2\right) + \cdots + \left(\frac{s}{2} - 1\right)\left(\frac{r}{2} - 2\right) \\
 &= \left(\frac{r}{2} - 2\right) \sum_{k=1}^{s/2-1} k = \frac{s}{4} \left(\frac{r}{2} - 2\right) \left(\frac{s}{2} - 1\right)
 \end{aligned} \tag{105}$$

そして

$$p_{s/2-1} = \sum_{k=1}^{s/2-1} k = \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \tag{106}$$

である. 従って  $Q$  は

$$\begin{aligned}
 Q &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{s/2-1} \\
 &= \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \left(\frac{r}{2} - 1\right) + \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \left(\frac{r}{2} - 2\right) + \cdots \\
 &\quad + \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \left\{ \frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2} - 2\right) \right\} + \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \\
 &= \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \sum_{k=1}^{r/2-1} \left(\frac{r}{2} - k\right) \\
 &= \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \frac{r}{2} \sum_{k=1}^{r/2-1} 1 - \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \sum_{k=1}^{r/2-1} k \\
 &= \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \frac{r}{2} \left(\frac{r}{2} - 1\right) - \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \frac{r}{2} \left(\frac{r}{2} - 1\right) \frac{1}{2} \\
 &= \frac{sr}{8} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \left(\frac{r}{2} - 1\right) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \right\} \\
 &= \frac{sr}{16} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \left(\frac{r}{2} - 1\right) = \frac{sr}{16 \cdot 4} (s-2)(r-2)
 \end{aligned} \tag{107}$$

よって, 結局, 第 1 ~ 第 4 象限に現れる交点の総数  $Q_{\text{total}}$  は

$$Q_{\text{total}} = 4 \times Q = \frac{sr}{16} (s-2)(r-2) \tag{108}$$

となる. これから交差数  $K_{r,s}$  の上限が

$$\text{cr}(K_{r,s}) \leq \frac{1}{16} rs(r-2)(s-2) \tag{109}$$

で与えられる. つまり,  $K_{r,s}$  を平面に描いたときの交差数の最小値は  $rs(r-2)(s-2)/16$  を超えることはない (この値を下回る配置が存在するかもしれないが, 現段階では示せていない).

#### 例題 20

単純グラフ  $G$  に  $n(\geq 3)$  個の点, 及び,  $m$  本の辺があるとき,  $G$  の厚さ  $t(G)$  は不等式:

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil \tag{110}$$

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rceil \tag{111}$$

を満たすことを示せ<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>  $\lceil x \rceil$  は  $x$  以上の最小の整数.  $\lfloor x \rfloor$  は  $x$  以下の最大の整数を表す.

(解答例)

厚さは整数でなければならないことと, 系 13.4 (1) より

$$\begin{aligned} t(G) &\geq \left\lceil \frac{\text{辺の総数}}{\text{平面グラフとなるための辺の上限}} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil \end{aligned} \quad (112)$$

が成り立つ.

一方, この結果と正の整数  $a, b$  に対して成り立つ関係式:

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor \quad (113)$$

を用いることにより,  $a = m, b = 3n - 6$  として直ちに (111) の成立が言える.

注:  $\lceil a/b \rceil = \lfloor (a+b-1)/b \rfloor$  の証明に関して

正の定数  $a, b$  に関する等式:

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor \quad (114)$$

の証明.

$(a/b)$  が整数の場合とそうでない場合に分けて証明する.

(i)  $(a/b)$  が整数のとき

$a/b = M$  であるとき

$$(\text{与式の左辺}) = \frac{a}{b} = M \quad (115)$$

である. また,

$$(\text{与式の右辺}) = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} + 1 - \frac{1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor M - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = M \quad (116)$$

であるから, (i) のとき関係式は成立.

(ii)  $(a/b)$  が整数でないとき

$a/b$  の整数部分を  $C$ , 少数部分を  $D$  とすれば

$$(\text{与式の左辺}) = \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = C + 1 \quad (117)$$

である. また

$$(\text{与式の右辺}) = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} + 1 - \frac{1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor C + D - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 \quad (118)$$

であるが,  $D$  は  $a/b$  の少数部分であるから

$$D = \frac{a - bC}{b} \quad (119)$$

であり,  $a, b, C$  は整数なので,  $a - bC$  も整数であり,  $a > bC$  より

$$a - bC \leq 1 \quad (120)$$

である. 従って

$$D > \frac{1}{b} \quad (121)$$

なので,  $D - (1/b) = \varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon < 1$ ) とおくと

$$(\text{与式の右边}) = \lfloor C + \varepsilon \rfloor + 1 = C + 1 \quad (122)$$

となり, (ii) の場合も関係式が成り立つ. 従って

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor \quad (123)$$

が示せた. (証明終わり)

### 例題 21

(1) 完全グラフ  $K_n$  の厚さ  $t(K_n)$  は次不等式を満たすことを示せ.

$$t(K_n) \geq \left\lfloor \frac{1}{6}(n+7) \right\rfloor \quad (124)$$

(2) 完全二部グラフ  $K_{r,s}$  の厚さ  $t(K_{r,s})$  が次不等式を満たすことを示せ.

$$t(K_{r,s}) \geq \left\lfloor \frac{rs}{2(r+s)-4} \right\rfloor \quad (125)$$

(解答例)

(1) 完全グラフ  $K_n$  の辺の数は  $n(n-1)/2$  であるから, 不等式:

$$t(G) \geq \left\lfloor \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rfloor \quad (126)$$

に代入して

$$\begin{aligned} t(K_n) &\geq \left\lfloor \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 3n - 7}{3n - 6} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n^2 + 5n - 14}{2(3n - 6)} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor \end{aligned} \quad (127)$$

となり, 題意の不等式は満たされることがわかる.

(2)  $K_{r,s}$  においては, A グループの点が  $r$  個, B グループの点が  $s$  個で, A グループのそれぞれの点が B グループのそれぞれの点と結ばれるので, 辺の数  $m$  及び点の数  $n$  は

$$m = rs \quad (128)$$

$$n = r + s \quad (129)$$

で与えられる. また,  $K_{r,s}$  には三角形が含まれないので,  $K_{r,s}$  の辺の数の上限は

$$m \leq 2n - 4 \equiv m_0 \quad (130)$$

で与えられる. 従って, 完全二部グラフ  $K_{r,s}$  の厚さ  $t(K_{r,s})$  は

$$\begin{aligned} t(K_{r,s}) &\geq \left\lceil \frac{m}{m_0} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{m}{2n - 4} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{rs}{2(r + s) - 4} \right\rceil \end{aligned} \quad (131)$$

となり, 確かに題意の不等式を満たしている.

### 例題 22

1. 閉路行列式法を用いて完全グラフ  $K_4$  の全域木の総数  $\tau(K_4)$  を求めよ.
2. オイラーの公式を用いてピーターソン・グラフは平面描写可能かどうかを判定せよ.
3. 講義中に見た系 13.4 を参考にして以下の問いに答えよ.
  - (1) 連結グラフ  $G$  に三角形, 四角形, 及び, 五角形が無い場合, グラフ  $G$  が平面的となるために辺数  $m$  が満たすべき不等式を求めよ.
  - (2) (1) の議論を一般化し, グラフ  $G$  に  $K$  角形まで無い場合, グラフ  $G$  が平面的となるために辺数  $m$  が満たすべき不等式を求めよ.
  - (3) (2) の結果で  $K \rightarrow \infty$  の極限をとった場合に辺数  $m$  の満たすべき不等式を求め, この結果が何を意味するのかを簡単に説明せよ.

(解答例)

1. 図 116 のように 3 つの閉路を  $c_1 = 1231, c_2 = 1241, c_3 = 1341$  と定める. すると, 閉路行列  $R$  は

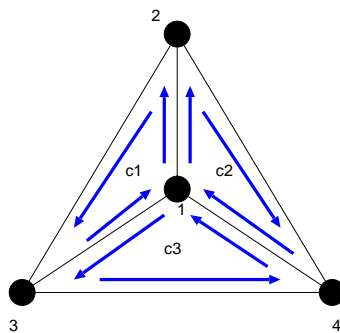


図 116: 完全グラフ  $K_4$  とその基本閉路  $c_1, c_2, c_3$ .

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (132)$$

として与えられる.

ところで, 図のように閉路を選んだとき, 一番外側の 234 なる三角形を 4 番目の閉路として選んではいけないのか, あるいは, 閉路の選び方に任意性がある場合にはどうするのか, が問題になるのだが, その際は基本閉路を選ぶことにする. 基本閉路とは例えば図 117 のような完全グラフ  $K_4$  の全域木に対し, これに 1 つずつ辺を付加してできる閉路のことである. 図 117 の全域木に辺 23 を付加すると閉路が一

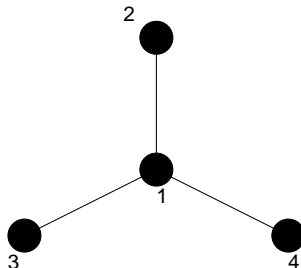


図 117: 完全グラフ  $K_4$  の全域木.

つでき, それが  $c_1$  である. また, 辺 24 を付加すれば閉路  $c_2$  が, 辺 34 を付加すれば閉路  $c_3$  ができることになり, これらは全て基本閉路である. 閉路行列法を用いるときには基本閉路を選べば十分である. その際, 上述のように一番外側の三角形を 4 番目の閉路としてカウントしてもよいが, 結果として得られる全域木の総数は同じになる (各自が実際に余因子展開を用いて確かめてみること).

さて, このようにして定義される基本閉路に対し, 閉路行列 (132) を作れば, 完全グラフ  $K_4$  の全域木の総数  $\tau(K_4)$  は

$$\begin{aligned} \tau(K_4) &= |R| \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 16 \end{aligned} \quad (133)$$

となり, 計 16 個の全域木が存在することがわかる.

2. ピーターソン・グラフの場合には, 点数  $n$ , 辺数  $m$ , 及び内周の長さ  $\kappa$  はそれぞれ  $n = 10, m = 15, \kappa = 5$  であるから, これらを判別式:

$$m \leq \frac{\kappa(n-2)}{\kappa-2} \quad (134)$$

に代入し,

$$15 \leq \frac{5 \cdot (10-2)}{5-2} = \frac{40}{3} = 13.3... \quad (135)$$

となるので不成立. 従って, ピーターソン・グラフは平面的ではないと結論づけられる.

3.

(1) 三角形, 四角形, 及び五角形が無いならば  $d(F)$  は

$$6 \leq d(F) \quad (136)$$

を満たす. 従って, この不等式は握手補題により

$$6f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \quad (137)$$

と書き直すことができるから, これとオイラーの公式:  $f = 2 - n + m$  より, 面数  $f$  を消去し, 辺数  $m$  についての不等式:

$$m \leq \frac{3}{2}(n-2) \quad (138)$$

が成り立つ.

(2) 一般に  $K$  角形まで無い場合,  $d(F)$  は

$$K+1 \leq d(F) \quad (139)$$

を満たす. 従って, 握手補題から

$$(K+1)f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \quad (140)$$

と書き直せるので, これとオイラーの公式  $f = 2 - n + m$  から  $f$  を消去し,  $m$  に関する不等式:

$$m \leq \left( \frac{K+1}{K-1} \right) (n-2) \quad (141)$$

が成り立つ.

(3) (2) の結果で,  $K \rightarrow \infty$  の極限をとる. しかし, 必ず  $K \leq n$  であるから, この場合には  $K = n$  という条件下で  $n, K \rightarrow \infty$  の極限を考えなければならない点に注意する. すると次の不等式が得られる.

$$m \leq \left( \frac{n+1}{n-1} \right) (n-2) = n-2 + 2 \left\{ 1 + \frac{1}{n-1} \right\} = n \quad (n \rightarrow \infty) \quad (142)$$

つまり,  $K(\infty)$  角形まで無いということは, グラフ  $G$  は  $n$  角形 (ただし  $n$  も無限大なので, いわば「無限角形」) 1 個からなるグラフである.

ちなみに,  $n$  が有限のまま (141) の右辺で  $K \rightarrow \infty$  の極限をとってしまうと  $m \leq n-2$  なる不等式が得られるが, 閉路が全く無い「木」の場合の辺数が  $n-1$  であることを考えると (ある意味で「無限角形」まで無い状況だと言える),  $n-1 \leq n-2$  となり (もちろん矛盾), この場合, 「一つだけ成分を持つ  $n$  点からなるグラフ」としては描きようがなくなってしまう. 従って, 極限をとる際には  $K = n$  の条件の下で  $n$  を無限大に飛ばす必要があるわけである.

注:  $K = n$  において  $n \rightarrow \infty$  の極限をとらずに,  $n$  が有限のまま  $K \rightarrow \infty$  を考えてもうまくい

きません. もちろん, これは必ず満たさしていなければならない条件  $K \leq n$  を満たしていないのですが, この場合に得られる  $m \leq n - 2$  とオイラーの公式を組んで面数  $f$  に関する不等式を作れば  $f \leq 0$  が得られます. 面数の最小値はグラフが木である場合の  $f = 1$  ですからこれは不適切です. 正しい不等式  $m \leq n$  とオイラーの公式を組んで  $f$  に関する不等式を作れば  $f \leq 2$  が得られます. これは  $f = 2$  ( $K(\infty)$  角形の内部の面と外部の無限面),  $f = 1$  (木) の場合にそれぞれが対応していることになります (図 118 参照).

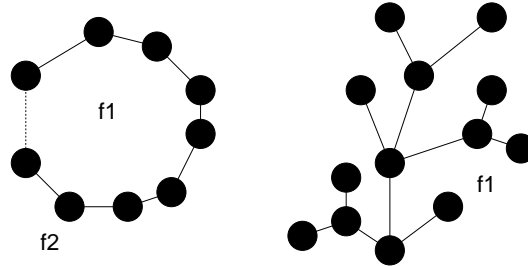


図 118:  $f \leq 2$  が意味する内容は,  $K(\infty)$  角形の内部 (f1) と外部 (f2) の計  $f = 2$  面 (左図), 木の無限面 (f1) の計  $f = 1$  面 (右図).

### 演習問題 8

「平面グラフ (地図) においては隣り合う 5 つ以下の隣接面 (隣接国) しかもたない面 (国) が存在する (\*)」  
という命題を証明することを考えよう.

(1) 考えるグラフの点数を  $n$ , 辺数を  $m$  とすると

$$n \leq \frac{2}{3}m$$

が成り立つことを示せ.

(2) (\*) の逆: 「どの面 (国) も少なくとも 6 つの隣接面 (国) に囲まれている (\*\*)」という仮定の下では,  
考えるグラフの面数を  $f$  とすると

$$f \leq \frac{1}{3}m$$

でなければならないことを示せ.

(3) (1)(2) とオイラーの公式より, 仮定 (\*\*) の矛盾を引き出し, 命題 (\*) の成立を示せ.