グラフ理論 配布資料 #10 (教科書 pp. 125 〜 142 の内容)

担当 : 井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

平成 17 年 6 月 27 日

目 次

演習問題 9 の解答例

(1) プラトングラフは教科書 p. 24 図 3.5 にあるように平面描写可能である. これらのグラフのうち最初の 3 つをそれぞれ彩色すると 図 142 より, それぞれの彩色数は

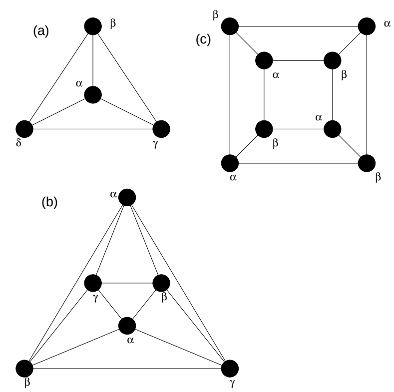

図 142: (A) 正四面体, (B) 正八面体, (C) 立方体の平面描画とその彩色.

$$\chi(\text{正四面体}) = 4 \quad (162)$$
$$\chi(\text{正八面体}) = 3 \quad (163)$$
$$\chi(\text{立方体}) = 2 \quad (164)$$

となる. 同様にして, 正 20 面体, 及び, 正 12 面体の平面描画はそれぞれ図 143 のようになり, 求める彩色数は

$$\chi(\text{正 20 面体}) = 4 \quad (165)$$
$$\chi(\text{正 12 面体}) = 4 \quad (166)$$

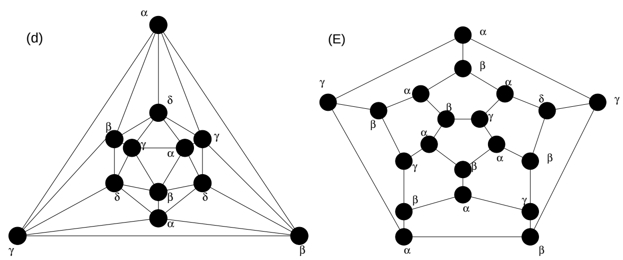

図 143: (D) 正 20 面体, 及び, (E) 正 12 面体の平面描画とその彩色.

となる.

(2) 完全三部グラフ $\mathrm{K}_{r,s,t}$ の彩色数はその定義から直ちに

$$\chi(\mathrm{K}_{r,s,t}) \quad = \quad 3 \tag{167}$$

である.

(3) k-立方体 Q_k は正則二部グラフであることを考えると, その彩色数は

$$\chi(Q_k) \quad = \quad 2 \tag{168}$$

である.

10.2　地図の彩色

この節では, ヨーロッパのように, 多くの国が屹立しているような地域の地図において, 隣り合う国を異なる色で区別するためには何色が必要か？ という素朴な質問から端を発した「地図の彩色」について, それにまつわる定理及び適用例を見てゆくことにする.

k-面彩色可能：地図の隣接する 2 つの面が同じ色にならないように k 色で彩色できる場合. 図 144 に 3-彩色可能なグラフの一例を載せる.

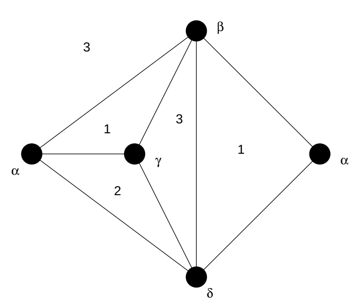

図 144: 3-面彩色可能なグラフの一例. 面に付された数字が色を表す.

定理 19.1
地図 G が 2 面彩色可能であるための必要十分条件は, G がオイラー・グラフであることである.

(証明)

必要性：
G の各点 v を含む面は偶数でなければならないので,v の次数は偶数である. 従って, **定理 6.2**「連結グラフがオイラー・グラフであるための必要十分条件は, G の点の次数が全て偶数である」ことから, G はオイラー・グラフである.

十分性：
任意の面 F を選び, それを赤で彩色する. F の中の任意の点 x から, 他の面 F' へ行く曲線を考える (図 145 参照).

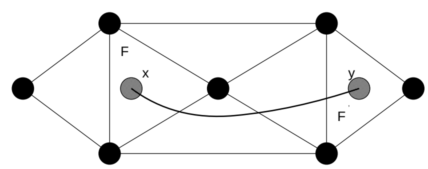

図 145: 2-色面彩色可能なグラフ G においては, x → y → x という任意の閉路は偶数回 G の辺と交差する.

F' → 赤 (曲線が偶数本の辺を交わる場合)
F' → 青 (曲線が奇数本の辺を交わる場合)

で色分けすると, x → y → x という任意の閉路は週数回だけ辺を交差する (G の各点に接続する辺は偶数) のでこの彩色で矛盾はない. **(証明終わり)**.

定理 19.2
G はループの無い平面グラフとし, G^* は G の幾何学的双対であるとする. このとき, G が k-点彩色可能であるための必要十分条件は, G^* が k-面彩色可能であることである.

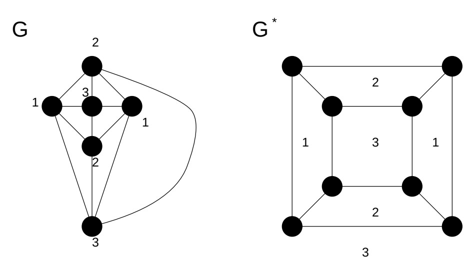

図 146: 3-点彩色可能なグラフ G (左) と, その幾何学的双対グラフ G^*. グラフ G^* は 3-面彩色可能である.

定理 19.3
地図の 4 色定理は平面グラフの 4 色定理と同値である.

証明略.

定理 19.4
G は各点が 3 次の地図であるとする. このとき, G が 3-面彩色可能であるための必要十分条件は, 各面が偶数本の辺で囲まれていることである.

(証明)
必要性 :
図 147 のように, G の任意の面 F に対し, F を取り囲む G の面は 2 色によって彩色可能である. 従って, そのような面は偶数個なければならないので, 全ての面は偶数本の辺で囲まれている.

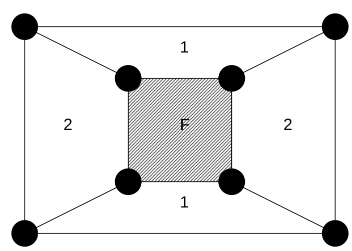

図 147: 面 F を取り囲むグラフ G の面は 2 色で彩色可能である.

十分性 :
「G が単純連結グラフであり, G の各面が三角形であり, G の各点の次数が偶数 (オイラー・グラフ) ならば, G は 3-点彩色可能である」という双対な結果を示せばよい.
グラフ G はオイラー・グラフであるから, **定理 19.1** より, 図のように, G の面は 2 色, 赤と青によって彩色できる.

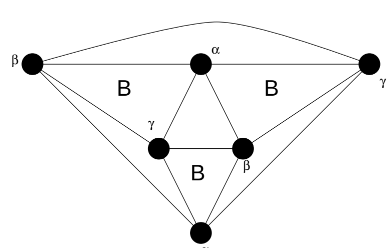

図 148: オイラー・グラフ G の面は赤と青 (B) で 2-面彩色可能である.

赤い面の 3 点を α, β, γ が時計回りにくるように彩色する.
青い面の 3 点を α, β, γ が反時計回りにくるように彩色する.

とすると, このような彩色はグラフ全体に拡張できる. (**証明終わり**).

定理 19.5
4 色定理を証明するためには, 3 次の地図は全て 4-面彩色可能であることを証明すれば十分である.

証明略.

定理 19.1
地図 G が 2 面彩色可能であるための必要十分条件は, G がオイラー・グラフであることである.

証明略.

10.3 辺彩色

点彩色, 地図の彩色 (面彩色) とくれば, 次は辺彩色である.

***k*-辺彩色可能**：グラフ G の隣接する辺は同じ色にならないように, G の辺を k 色で彩色できるとき.
彩色指数：G が k-辺彩色可能, $k-1$-辺彩色不可能なとき, 彩色指数 $\chi^{'}(\mathrm{G})$ を

$$\chi^{'}(\mathrm{G}) \quad = \quad k$$

で定義する. 図 149 に 4 辺彩色可能なグラフの一例を載せる.

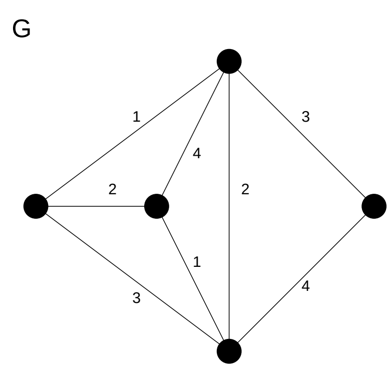

図 149: 4-辺彩色可能なグラフの一例. このグラフ G の彩色指数は $\chi^{'}(\mathrm{G}) = 4$ である.

定理 20.1
G は単純グラフであり, その最大次数が Δ ならば, $\Delta \leq \chi^{'}(\mathrm{G}) \leq \Delta + 1$ である.

ここでは具体的な証明を追うことはせず, いくつかの代表的なグラフに対して, 上記定理を確認することにとどめておく.

(例)：

$$\chi^{'}(\mathrm{C}_n) = \begin{cases} 2 & (n : 偶数) \\ 3 & (n : 奇数) \end{cases}$$

$$\chi^{'}(\mathrm{W}_n) = n-1 \ \ (n \geq 4)$$

定理 20.2
$n(\neq 1)$ が奇数ならば, $\chi^{'}(\mathrm{K}_n) = n$ であり, 偶数ならば, $\chi^{'}(\mathrm{K}_n) = n-1$ である.

(証明)
$n \geq 3$ とし, 以下では n が偶数の場合と奇数の場合に分けて考えることにする.

n が奇数のとき：
完全グラフ K_n の点を正 n 角形の形状に配置し, その外周の辺を各辺に異なる色を用いて彩色し, 次に残りの辺それぞれをそれと平行な外周の辺に用いられた色で彩色する (図 150 参照).

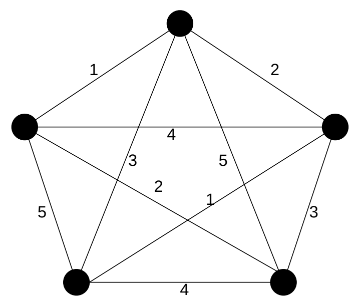

図 150: 完全グラフ K_5 の辺彩色. 外側の 5 つの辺にそれぞれ色を割り振ると, 各外辺に向かい合う辺に同色の色を割り当てれば, 5-辺彩色が完成する.

このとき, 同じ色で彩色できる辺の最大数は $(n-1)/2$ である. 従って, 彩色指数が $n-1$ とすると完全グラフ K_n の辺数は高々

$$\frac{1}{2}(n-1)\chi^{'}(\mathrm{K}_n) = \frac{1}{2}(n-1)^2 \neq {}_nC_2$$

となり, K_n の辺数 ${}_nC_2 = n(n-1)/2$ に反する. 従って, $\chi^{'}(\mathrm{K}_n) = n$ であり, このとき, 辺数は高々

$$\frac{1}{2}(n-1)\chi^{'}(\mathrm{K}_n) = \frac{1}{2}n(n-1) = {}_nC_2$$

となり, つじつまが合う. 従って, n が奇数のときは $\chi^{'}(\mathrm{K}_n) = n$ である.

n が偶数のとき：
K_n は完全グラフ K_{n-1} と 1 つの点の和とみなせる. K_{n-1} の辺は n が奇数の場合に述べた方法により, $n-1$ 色で彩色することができる. 従って, この方法で $(n-1)$-彩色すると, 完全グラフ K_{n-1} の各辺の次数は $n-2$ であるから, 各点には全 n 色のうち, 欠けている色が必ず 1 つ生じ, これらの欠色は全て異なる. よって, これらの欠色で残りの辺を彩色すれば, K_n の辺彩色が完成する (図 144 参照). 従って, n が奇数のとき, $\chi^{'}(\mathrm{K}_n) = n-1$ である. **(証明終わり)**.

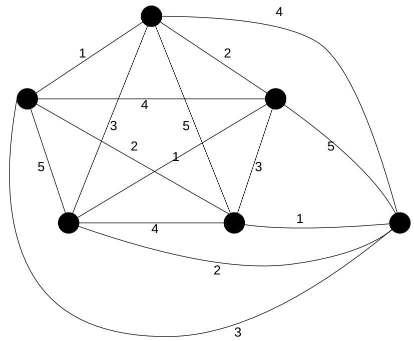

図 151: 完全グラフ K_5 の外部に点 v を配置し，この点と K_5 の各点での欠色で点 v を結べば，n が偶数 (この例では $n = 6$) の場合の n-辺彩色が完成する．

定理 20.3
4 色定理と次の命題は同じである：あらゆる 3 次の地図 G に対して $\chi^{'}(G) = 3$ である．

証明略．

定理 20.4
二部グラフ G の最大次数が Δ ならば，$\chi^{'}(G) = \Delta$ である．

証明略．

例題 27
グラフの辺彩色に関して以下の問い (1)〜(3) に答えよ．

(1) 図 152 のグラフ (a)(b) の彩色指数をそれぞれ求めよ．

(2) ピータースン・グラフの外側の 5-閉路の可能な 3-彩色を全て考えて，ピータースン・グラフの彩色指数は 4 であることを示せ．

(3) 「グラフ G が 3 次ハミルトングラフならばその彩色指数は 3 である」ことが知られている．この事実と (2) の結果を用いて，ピータースン・グラフはハミルトングラフでないことを示せ．

(解答例)

(1) 図 153 より，(a)(b) のそれぞれの彩色指数は

$$\chi^{'}((\mathrm{a})) = 5 \quad (169)$$
$$\chi^{'}((\mathrm{b})) = 3 \quad (170)$$

である．

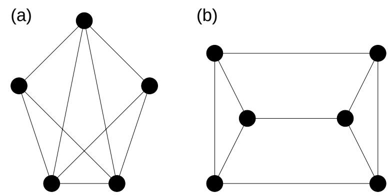

図 152: 彩色指数を求めるべきグラフ (a)(b).

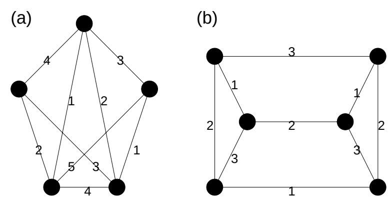

図 153: 辺に付された数字が各色を表す.

(2) ピータースン・グラフは図 154 のように彩色できるので, その彩色指数は 4 である.

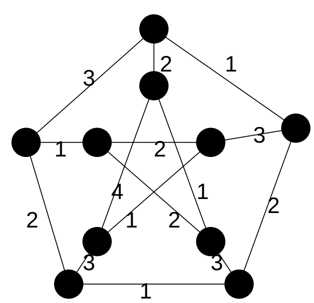

図 154: ピータースン・グラフの彩色. 辺に付された数字が各色を表す.

(3) ピータースン・グラフは 3 次グラフ, つまり, 各点の次数が 3 であるが, この 3 次のグラフ G がハミルトングラフであるならば $\chi'(\mathrm{G}) = 3$ であるはずなので, (1) の結果より, ピータースン・グラフはハミルトングラフではないことがわかる.

10.4　彩色多項式

彩色多項式 $P_{\mathrm{G}}(k)$：G は単純グラフであるとし, k 色での点彩色の仕方が $P_{\mathrm{G}}(k)$ 通りあるとする. このとき, $P_{\mathrm{G}}(k)$ を彩色多項式と呼ぶ.

(例)：

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{G}}(k) &= k(k-1)^2 \quad (\text{図 155(左上) のような 3 点からなる木 G}) \\
P_{\mathrm{G}}(k) &= k(k-1)(k-2) \quad (\text{図 155(左下) のような三角形 G}) \\
P_{\mathrm{G}}(k) &= k(k-1)^{n-1} \quad (\text{図 155(右) のような } n \text{ 点からなる木 G}) \\
P_{\mathrm{G}}(k) &= k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) \quad (\text{完全グラフ } \mathrm{K}_n)
\end{aligned}
$$

明らかに

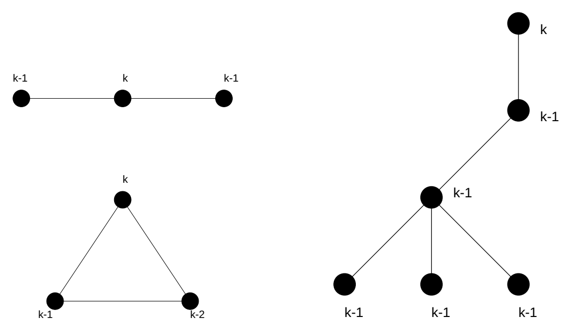

図 155: 左上から右へ $P_{\mathrm{G}}(k)=k(k-1)^2, k(k-1)(k-2), k(k-1)^n$ を彩色多項式として持つグラフ.

$$
\begin{aligned}
k < \chi(\mathrm{G}) \quad &\Rightarrow \quad P_{\mathrm{G}}(k) = 0 \\
k \geq \chi(\mathrm{G}) \quad &\Rightarrow \quad P_{\mathrm{G}}(k) > 0
\end{aligned}
$$

である.

次の定理は具体的にグラフ G の彩色多項式を導出する際に極めて重要である.

定理 21.1
単純グラフ G から辺 e を削除して得られるグラフを $\mathrm{G}-e$ とし, 縮約[a] して得られるグラフを G/e とする. このとき

$$
P_{\mathrm{G}}(k) = P_{\mathrm{G}-e}(k) - P_{\mathrm{G}/e}(k) \tag{171}
$$

が成立する.

[a] 再度確認するが, 「縮約」とは任意の 2 点 u, v を結ぶ辺 e を除去し, 点 u, v を同一視する操作である.

証明の前に, この定理の「使い方」を具体的に次の例を見てみよう.

(例)：図 156 の例で考えると, 関係式 (171) は

$$
k(k-1)(k-2)(k-3) = [k(k-1)(k-2)^2] - [k(k-1)(k-2)]
$$

となる.

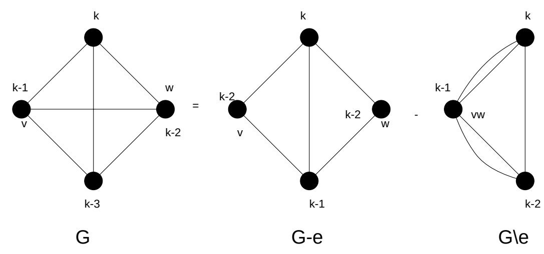

図 156: 関係式 (171) を示すグラフの一例.

(証明)：
$e = vw$ とする. v と w が異なる色になるような $\mathrm{G}-e$ の k-彩色の個数は v と w を結ぶ辺 e を描いても変化しない (図 156 のグラフ G, 及び, G-e を参照). 従って, $P_{\mathrm{G}}(k)$ に等しい. 一方, v と w が同じ色になるような $\mathrm{G}-e$ の k-彩色の個数は v と w を同一視しても変わらない (図 156 のグラフ G-e と G/e を参照). 従って, $P_{\mathrm{G}/e}(k)$ に等しい. 以上より

$$P_{\mathrm{G}-e}(k) = P_{\mathrm{G}}(k) + P_{\mathrm{G}/e}(k)$$

が成り立つ. **(証明終わり)**.

彩色多項式を求める際のポイントは, グラフ G の辺数を関係式 (171) を用いて段階的に削減して行き,「木」まで到達した時点で, n 点からなる木の彩色多項式が $P_{\mathrm{G}}(k) = k(k-1)^{n-1}$ である事実を用いて求める, あるいは, 簡単に彩色多項式が求まるグラフまで辺数を落として,　その簡単なグラフに対して彩色多項式を求めることにある.

この方法に慣れるためにいくつかの例題を見ておこう.

例題 28
4 つの点からなる単純連結グラフを全て挙げ, それら全てに対して彩色多項式を見つけ, これらの多項式は全て

$$k^4 - mk^3 + ak^2 - bk$$

なる形で書けることを示せ. ただし, m は辺数, a, b はともに正の定数である.

(解答例)
まず, 4 つの点からなる単純連結グラフを全て描いてみると, 図 157 の A〜F の 6 つのグラフが得られる.
まず, $n = 4$ の「木」である A,B の彩色多項式は図 158 より直ちにわかり

$$\begin{aligned} P_{\mathsf{A}}(k) = P_{\mathsf{B}}(k) &= k(k-1)^3 \\ &= k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \end{aligned} \tag{172}$$

である.
次に, C は公式：

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G\backslash e}(k) \tag{173}$$

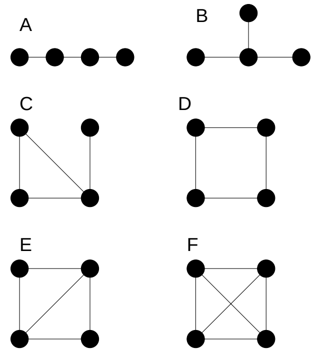

図 157: 4 つの点からなる単純連結グラフ A〜F.

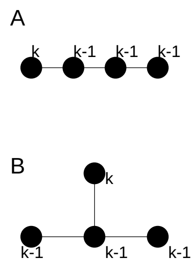

図 158: A,B は $n=4$ 点からなる「木」であるから, その彩色多項式はどちらも $k(k-1)^3$.

をグラフ C に適用すると, 図 159 より

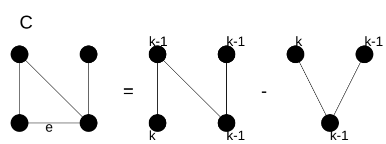

図 159: グラフ C は辺 e に関して図のように分解できる.

$$
\begin{aligned}
P_{\mathsf{C}}(k) &= k(k-1)^3 - k(k-1)^2 \\
&= k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 2k
\end{aligned} \tag{174}
$$

となる.

次にグラフ D は辺 e に関して図 160 のように分解できるので

$$
\begin{aligned}
P_{\mathsf{D}}(k) &= k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) \\
&= k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k
\end{aligned} \tag{175}
$$

が得られる.

次いで E であるが, これは図 161 のようにグラフ D と $n=3$ の木に分解でき, グラフ D の彩色多項式 $P_{\mathsf{D}}(k)$ は (175) で既に求めているので, これを用いて

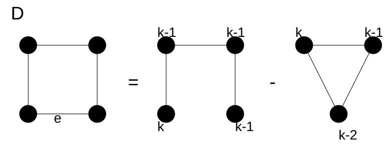

図 160: グラフ D は辺 e に関して図のように分解できる.

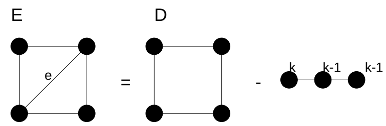

図 161: グラフ E は辺 e に関して図のように分解できる.

$$
\begin{aligned}
P_{\mathsf{E}}(k) &= P_{\mathsf{D}}(k) - k(k-1)^2 \\
&= k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k - (k^3 - 2k^2 + k) \\
&= k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k \qquad (176)
\end{aligned}
$$

が得られる.

最後にグラフ F であるが, これは図 162 のようにグラフ E と三角形に分解でき, グラフ E の彩色多項式は (176) で既に求めたので, これを用いて

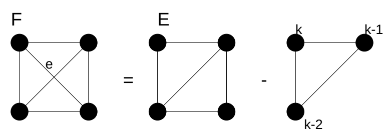

図 162: グラフ F は辺 e に関して図のように分解できる.

$$
\begin{aligned}
P_{\mathsf{F}}(k) &= P_{\mathsf{E}} - k(k-1)(k-2) \\
&= k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k - (k^3 - 3k^2 + 2k) \\
&= k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k \qquad (177)
\end{aligned}
$$

が得られる.

以上をまとめると

$$
\begin{aligned}
P_{\mathsf{A}}(k) &= k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \qquad (178) \\
P_{\mathsf{B}}(k) &= k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \qquad (179) \\
P_{\mathsf{C}}(k) &= k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 2k \qquad (180) \\
P_{\mathsf{D}}(k) &= k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k \qquad (181) \\
P_{\mathsf{E}}(k) &= k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k \qquad (182)
\end{aligned}
$$

$$P_{\mathsf{F}}(k) = k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k \qquad (183)$$

となり, いずれの場合も

$$P_G(k) = k^4 - mk^3 + ak^2 - bk \qquad (184)$$

となり, m は辺数, a, b は正の定数となっていることがわかる.

例題 29

完全二部グラフ, 及び, 閉路グラフの彩色多項式に関して以下の問いに答えよ.

(1) 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{2,3}$ の彩色多項式 $P_{\mathrm{K}_{2,3}}(k)$ を求めよ.
(2) 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{2,s}$ (s：任意の自然数) の彩色多項式 $P_{\mathrm{K}_{2,s}}(k)$ を求めよ.
(3) 閉路グラフ C_4, 及び, C_5 の彩色多項式 $P_{\mathrm{C}_4}(k), P_{\mathrm{C}_5}(k)$ を求めよ.
(4) 数学的帰納法を用いて, 閉路グラフ C_n に対する彩色多項式 $P_{\mathrm{C}_n}(k)$ が

$$P_{\mathrm{C}_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

で与えられることを証明せよ.

(解答例)

(1) 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{2,3}$ は図 163 のとおりである. 以下, 点 a と点 b が同色の場合と異色の場合に分けて

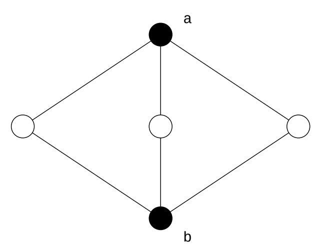

図 163: 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{2,3}$.

考える.

(i) 点 a と点 b が同色の場合, 彩色の方法は $k(k-1)^3$ 通りある.
(ii) 点 a と点 b が異色の場合, 彩色の方法は $k(k-1)(k-2)^3$ 通りがある (図 164 参照).

従って, 求める彩色多項式はこの両者の和として

$$P_{\mathrm{K}_{2,3}}(k) = k(k-1)^3 + k(k-1)(k-2)^2$$

で与えられる.

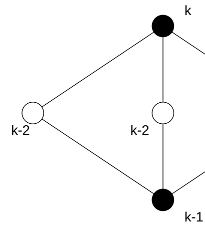

図 164: 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{2,3}$ の彩色の仕方.

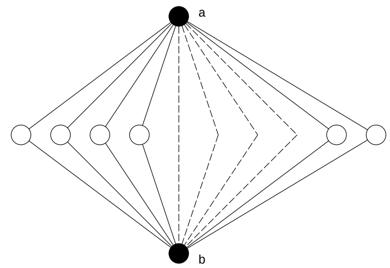

図 165: 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{2,s}$.「中間層」は s 個の白丸からなる.

(2) 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{2,s}$ は図 165 のようなグラフである. この図 165 では「中間層」の点の個数が s であることに注意しよう. このとき, やはり, 点 a と点 b が同色/異色の場合に分けて考える.

(i) 点 a と点 b が同色の場合：$k(k-1)^s$ 通り.
(ii) 点 a と点 b が異色の場合：$k(k-1)(k-2)^s$ 通り.

従って, 求める彩色多項式はこれら 2 つの場合の和として

$$P_{\mathrm{K}_{2,s}}(k) = k(k-1)^s + k(k-1)(k-2)^s$$

で与えられる.

(3) 公式：

$$P_{\mathrm{G}}(k) = P_{\mathrm{G}-e}(k) - P_{\mathrm{G}/e}(k) \tag{185}$$

を用いると, C_4 は図 166 のように「分解」することができるので, 求める彩色多項式は

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{C}_4}(k) &= k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) \\ &= k(k-1)(k^2-3k+3) \end{aligned}$$

となる. 一方, C_5 は, 図 167 のように分解できるので, 求める彩色多項式 $P_{\mathrm{C}_5}(k)$ は $P_{\mathrm{C}_4}(k)$ の結果を用いて

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{C}_5}(k) &= k(k-1)^4 - P_{\mathrm{C}_4}(k) \\ &= k(k-1)^4 - k(k-1)(k^2-3k+3) \\ &= k(k-1)(k^3-4k+6k-4) \end{aligned}$$

と求まる.

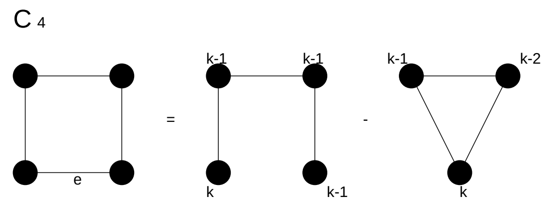

図 166: 閉路 C_4 はこの図のように木と三角形 (C_3) へと分解できる.

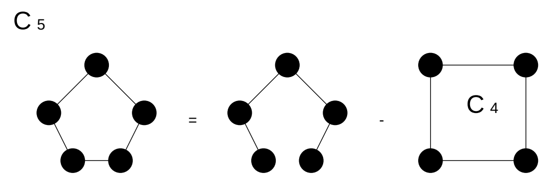

図 167: 閉路 C_5 はこの図のように木と C_4 へと分解できる.

(4) 閉路であるから, $n \geq 2$ として考える. $n=2$ のときには, 図 168 より, $P_{\mathrm{C}_2}(k)=k(k-1)$ となるが, これは証明すべき関係式で $n=2$ と置いたものに等しい. そこで, 点の数が $n-1$ のとき, 関係式 :

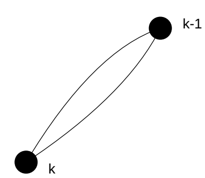

図 168: 閉路 C_2 とその彩色方法.

$$P_{\mathrm{C}_{n-1}}(k) \quad = \quad (k-1)^{n-1}+(-1)^{n-1}(k-1) \tag{186}$$

が成立すると仮定する.
このとき, 図 169 の辺 e で, 公式 (185) を用いると

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{C}_n}(k) &= k(k-1)^{n-1}-P_{\mathrm{C}_{n-1}}(k) \\ &= k(k-1)^{n-1}-\{(k-1)^{n-1}+(-1)^{n-1}(k-1)\} \\ &= k(k-1)^{n-1}-(k-1)^{n-1}+(-1)^{n}(k-1) \\ &= (k-1)^{n}+(-1)^{n}(k-1) \end{aligned}$$

となる. 従って, 数学的帰納法により, 全ての n に対して

$$P_{\mathrm{C}_n}(k) \quad = \quad (k-1)^{n}+(-1)^{n}(k-1)$$

が成り立つ. (**証明終わり**).

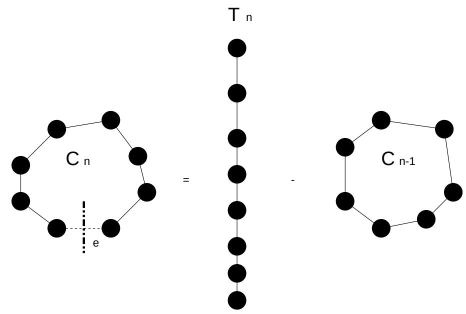

図 169: 閉路 C_n を辺 e において分解すると, n 点からなる木 T_n と閉路 C_{n-1} へと分解される.

演習問題 10

グラフ G が非連結な単純グラフならば, 彩色多項式 $P_{\mathrm{G}}(k)$ はその成分の彩色多項式の積で与えられることを示せ.

※ 連絡事項

次回 7/4 は講義の前半を情報工学演習 II(B)(グラフ理論) の時間にあて, 後半で通常の講義を行います.