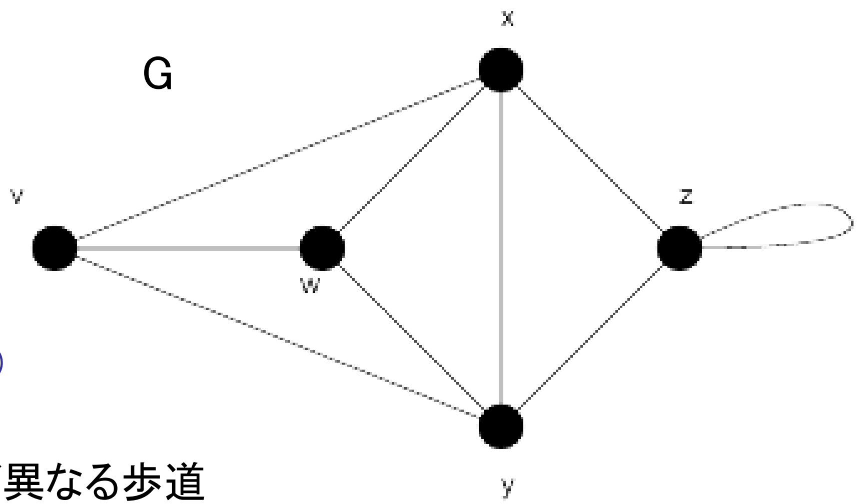
グラフ理論　#4

第4回講義　5月9日

情報科学研究科　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

歩道・小道・道・閉路



歩道： $v_i (i = 1,..,m) \in G$　に対し、

$v_0 v_1, v_1 v_2, \ldots, v_{m-1} v_m$ を歩道という

始点　終点

（※重複する辺があってもよい）

小道：　全ての辺　$v_0 v_1, v_1 v_2, \ldots, v_{m-1} v_m$　が異なる歩道

道：　点　$v_0, v_1, \ldots, v_m$　が全て異なる歩道

閉路：　少なくとも1本辺を持つ閉じた道

例題7　#1　（復習である内容を含む）

連結単純グラフ$G:\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, m本の辺, t個の三角形

(1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

と置くと、この2乗は

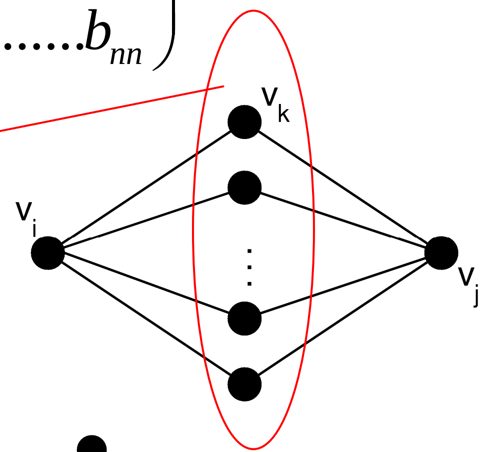
$$A^2 = \begin{pmatrix} b_{11} \ldots\ldots b_{1n} \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ b_{n1} \ldots\ldots b_{nn} \end{pmatrix} = B$$

第 ij 要素：

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$$

点vi から点vkを経由してvjに至る長さ2の歩道の数

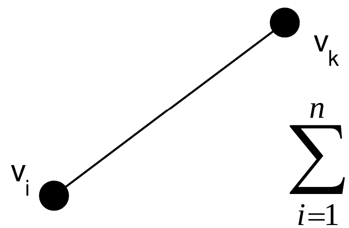
経由点vkに関する全ての可能性について足しあげたものはvi とvj間の歩道の総数に等しい



(2)

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ki}$$

Viからvkを経由してviに戻る歩道数
Viとvkを結ぶ辺の2倍



$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ はGの総辺数の2倍

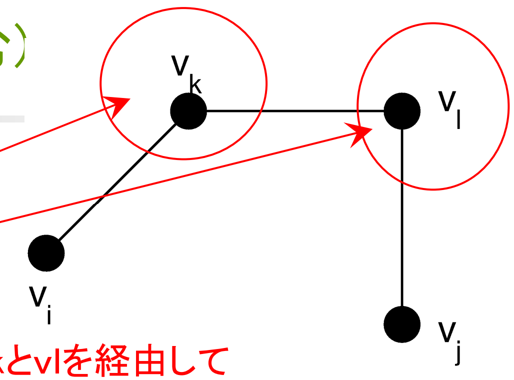
例題7 #2 （復習である内容を含む）

(3)

$$A^3 = \begin{pmatrix} c_{11}\cdots\cdots c_{1n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ c_{n1}\cdots\cdots c_{nn} \end{pmatrix} = C \qquad \underline{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}a_{kl}a_{lj}}$$

点viから点vkとvlを経由して
点vjへ至る辺の本数

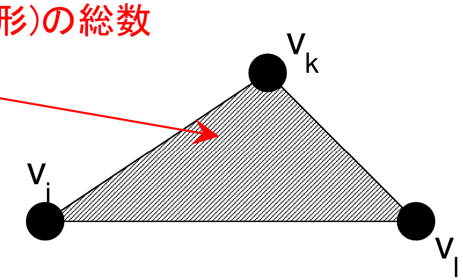
点viから点vjへ至る歩道の総数



対角要素：

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}a_{kl}a_{li}$$

このような閉路（三角形）の総数



従って

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \underline{6t}$$

点 i, k, l の並べ方の3!=6通りからくる

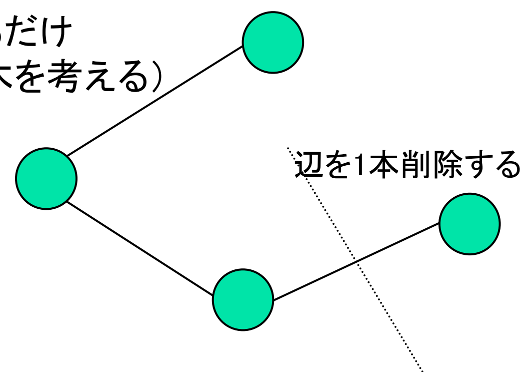
定理5・2 #1

グラフGはn個の点をもつ単純グラフであり、k個の成分がある場合、Gの辺数mは

$$n-k \le m \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$ を満たす

(証明)

$m \ge n-k$ について　辺数の下限に関してであるから、グラフGはできるだけ少ない辺数を持つものとする(極端な場合として木を考える)



Gから辺を1本削除すると

$$k \to k+1,\ n \to n,\ m_0 \to m_0-1$$

$$m_0-1 \ge n-(k-1)$$

m_0-1 本の辺に関して不等式の成立を仮定

(帰納法の仮定。m0=0の場合は自明)

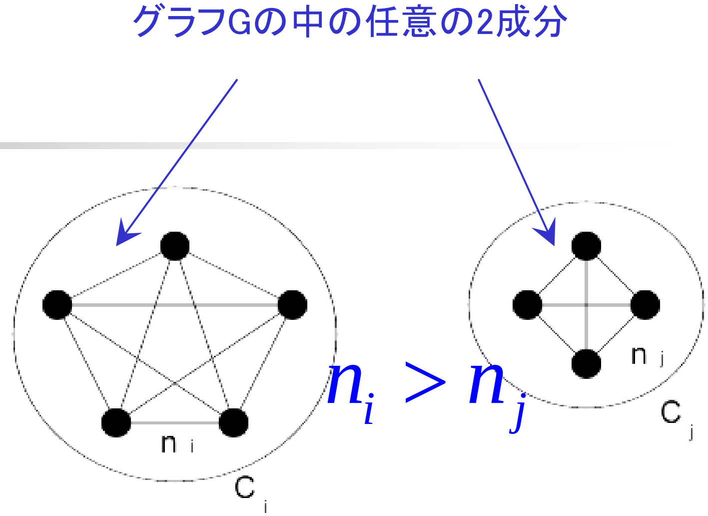
$$\boxed{m_0 \ge n-k}$$

m_0 本の辺について成立⇒全ての辺数について成立

定理5・2　#2

$m \le (n-k)(n-k+1)/2$ の成立について示す

辺数の上界を示すので、グラフGは辺数の最も多い
完全グラフとして考える



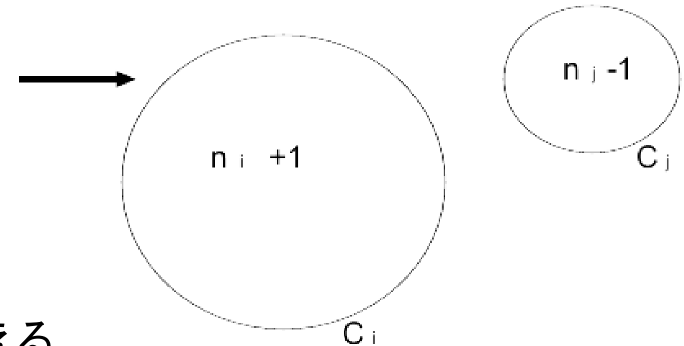
$C_i + C_j$ 　の辺の総数

$$N_{ij} = \frac{1}{2} n_i (n_i - 1) + \frac{1}{2} n_j (n_j - 1)$$

次の操作を行う

$C_i \Rightarrow n_i + 1$　個の点をもつ完全グラフ

$C_j \Rightarrow n_j - 1$　個の点をもつ完全グラフ



$\Delta N_{ij} = n_i - n_j + 1 > 0$ だけ点の総数は増える

$\longrightarrow$ この操作を繰り返すとn−k+1個の完全グラフとk−1個の孤立点が得られる

$$\boxed{m \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)}$$ が成立する

例題8 #1

$d(v,w)$はvからwへの最短路の長さ

$d(v,w) \geq 2$ならば, $d(v,z)+d(z,w)=d(v,w)$なる点zが存在する

(証明のアウトライン)

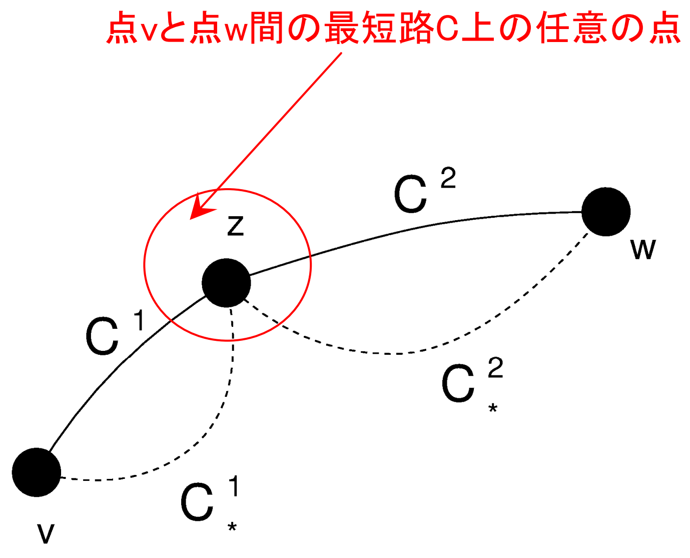
図において

C^1 は点vと点zを結ぶ最短路である

もし、これ以外に最短路 C^1_* があるとすれば経路

$C^1_* + C^2$ がvとwを結ぶ最短路となり仮定に反する

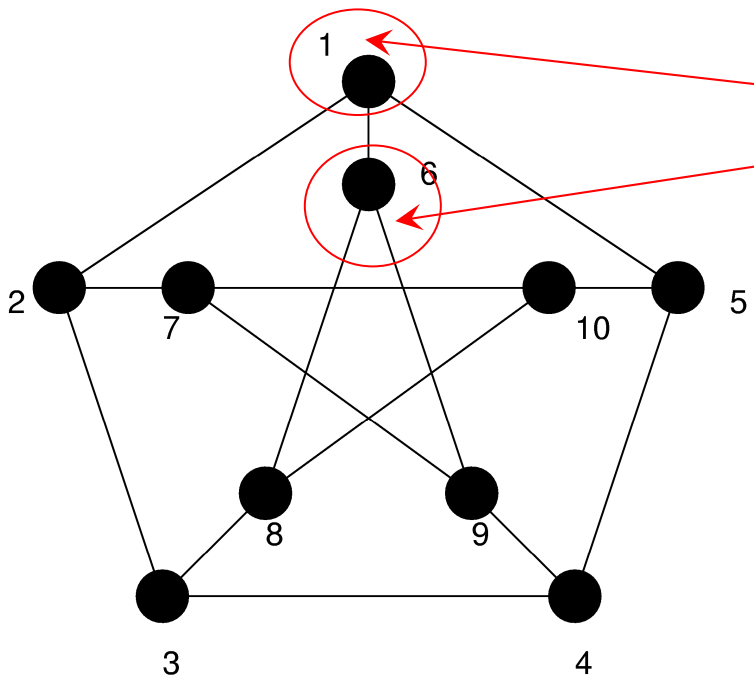
C^2 に関しても同様の議論ができる



考えるグラフは連結であるから、いつでもC上にzをとることができる

例題8　#2

ピータースン・グラフにおいて、任意の2点v, wに対し
$d(v,w)=1$ または $d(v,w)=2$ である



ピータースン・グラフの対称性から

$\boxed{v=1, v=6}$

をスタート点を選んだときの可能な経路の長さを調べればよい。実際に調べてみると

$$d(1,2)=1, d(1,3)=2, \ldots, d(1,10)=2,$$
$$d(6,1)=1, \ldots., d(6,10)=2$$

となり、満たす。

詳細は講義ノート

非連結化集合とカットセット

要素数最小のカットセット

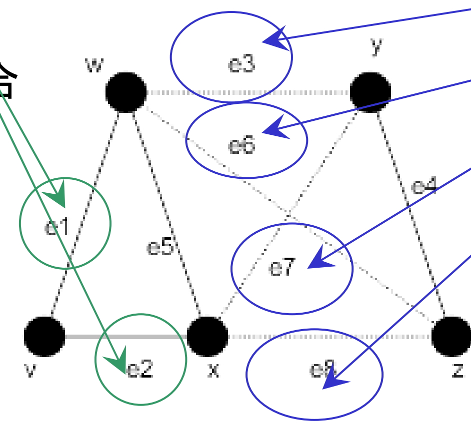
非連結化集合：

それを除去するとグラフが非連結となる辺の集合

カットセット：

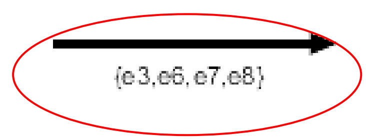
そのどのような部分集合も非連結化集合
ではない、非連結化集合

非連結化集合
の各要素

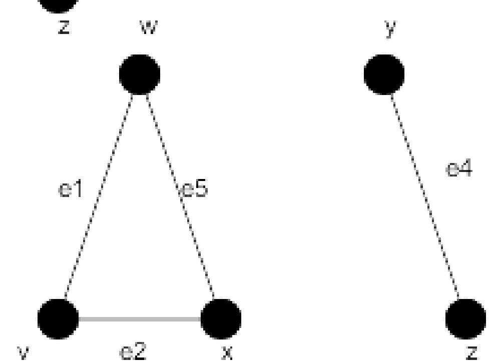


辺連結度（edge−connectivity） $\lambda(G)$

連結グラフの最小なカットセットの大きさ



この中のどれが抜けても
非連結化集合にはならない



例に挙げた右図では

$$\lambda(G) = 2$$

分離集合とカット点

分離集合：

それを除去するとグラフが非連結となる点の集合

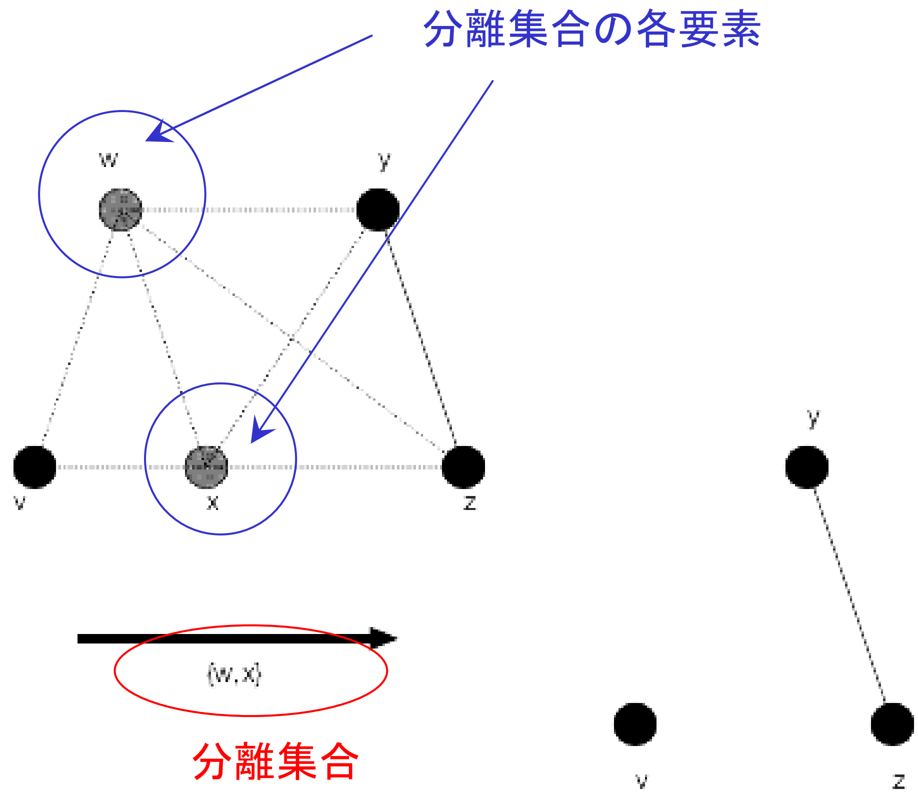
（辺を除去する際にはその接続辺も除去する）

カット点：

1個の点からなる分離集合

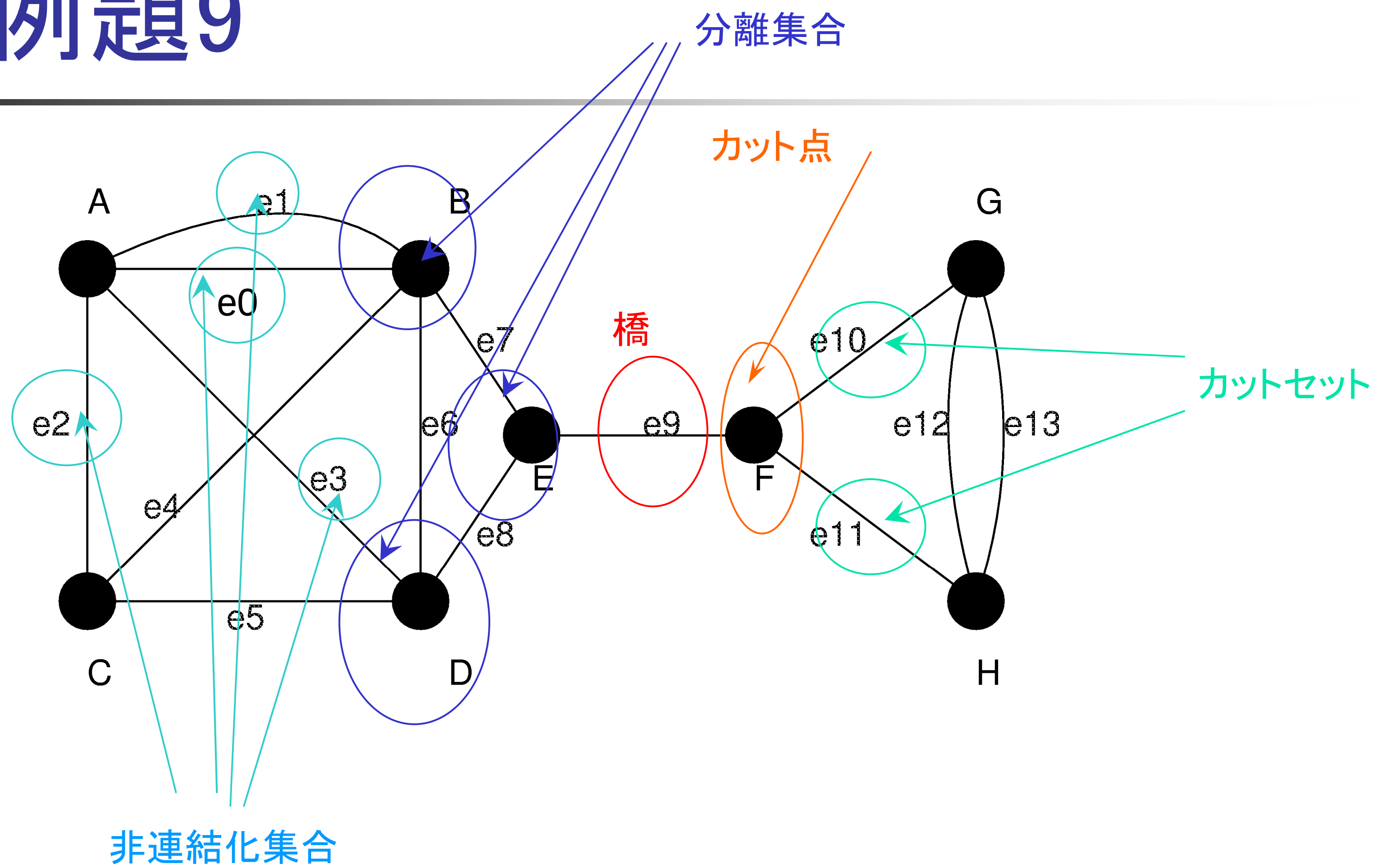
連結度： グラフの最小な分離集合の大きさ

図の例では $\kappa(G) = 2$



$\kappa(G) \geq k$ のときグラフGはk連結であるという

例題9


分離集合
カット点
橋
カットセット
非連結化集合
A
B
C
D
E
F
G
H
e0
e1
e2
e3
e4
e5
e6
e7
e8
e9
e10
e11
e12
e13