グラフ理論　#6

第6回講義　5月23日

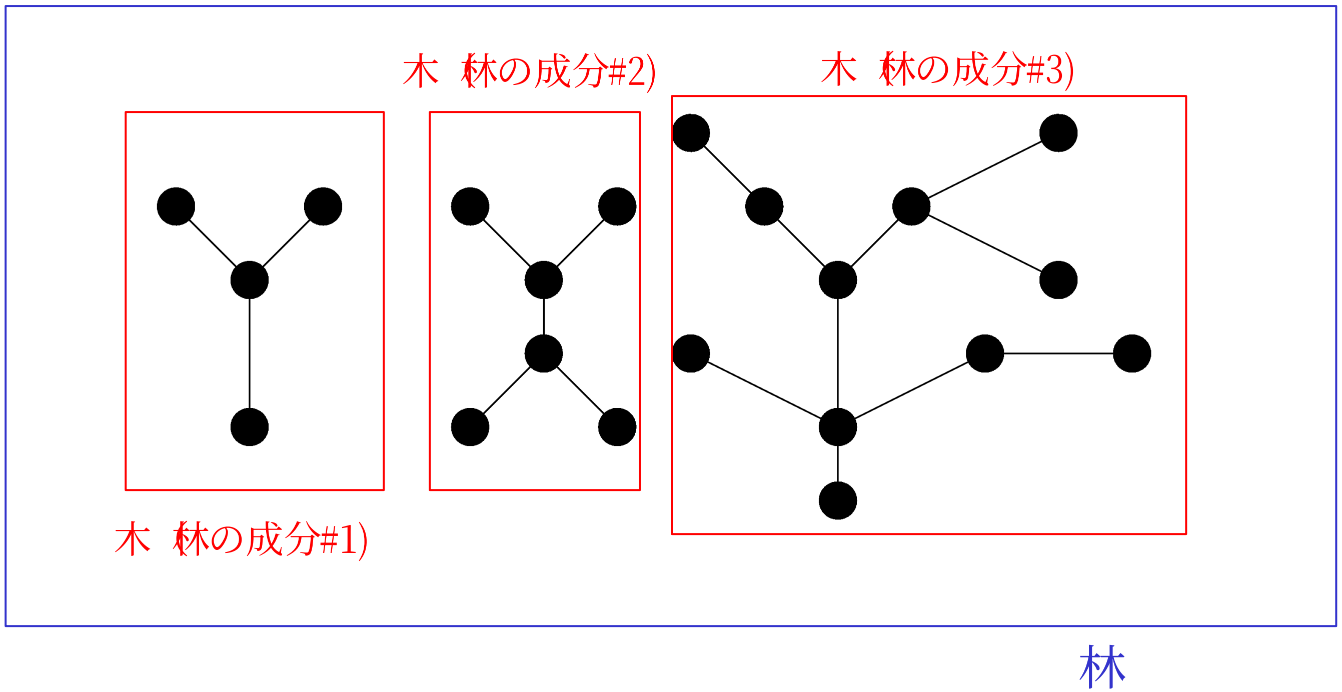
情報科学研究科　　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

木と林

林（forest）：閉路を含まないグラフ

木（tree）：連結な林



定理9.1

点n個からなるグラフTに対し、次の各命題は同値である

(i) Tは木である

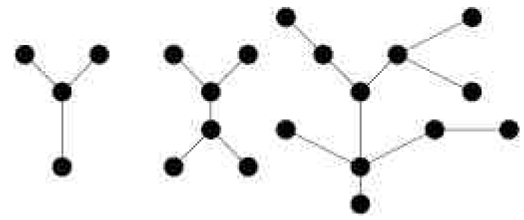
(ii) Tには閉路が無く、辺がn-1本ある

(iii) Tは連結であり、辺がn-1本ある

(iv) Tは連結であり、全ての辺は橋である

(v) Tの任意の2点を結ぶ道はちょうど1本である

(iv) Tに閉路は無いが、新しい辺をどのように加えても閉路ができ、しかも、1個の閉路である



各同値性の証明は教科書参照（以下、これらの事実のみを使う）

系9・2

林Gにはn個の点とk個の成分があるとする。このとき、林Gにはn-k本の辺がある

証明）

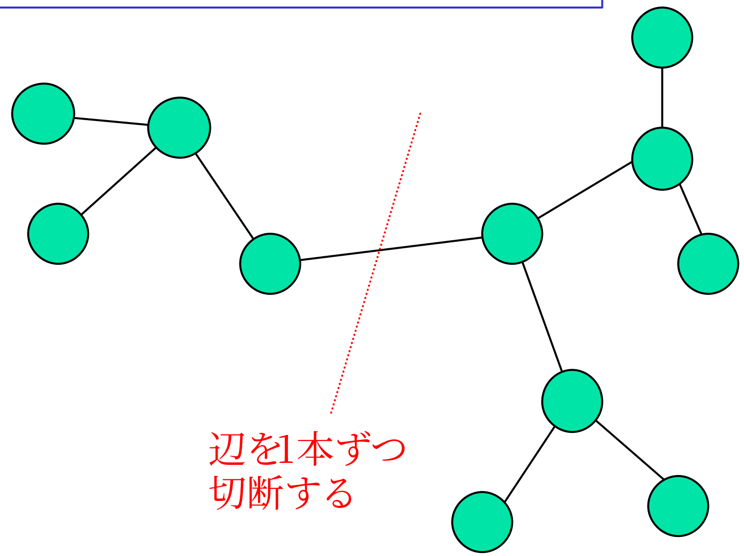
閉路が無く連結であるとすると、n-1本の辺がある。これから辺を1本ずつ切断する操作を進めると

1本辺を切断 ⇒ 成分 2、辺数 n-2

2本辺を切断 ⇒ 成分 3、辺数 n-3

…………

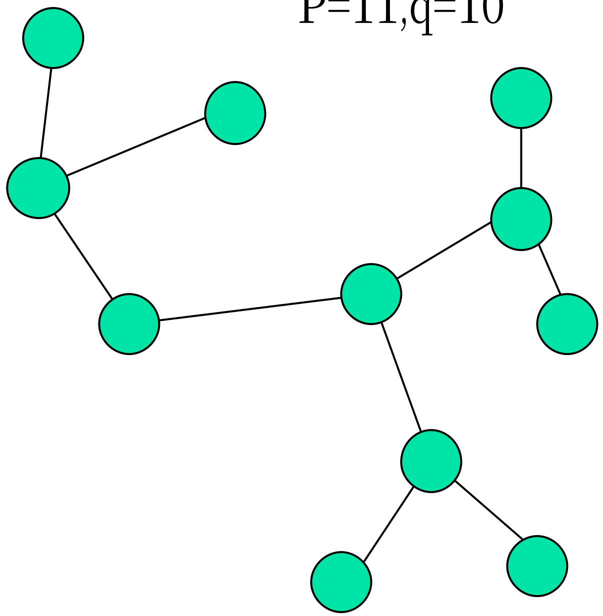
K-1 本辺を切断 ⇒ $\boxed{\text{成分 k、辺数 n-k}}$



系9・3

$\boxed{\text{端点でない木は、少なくとも2点の端点を含む}}$

P=11,q=10



証明）

木T ： $V(T)=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\},\ p\geq 2,\ E(T)=\{e_1,e_2,\ldots,e_q\}$

点数　辺数

木の辺の本数は　$\boxed{q=p-1}$

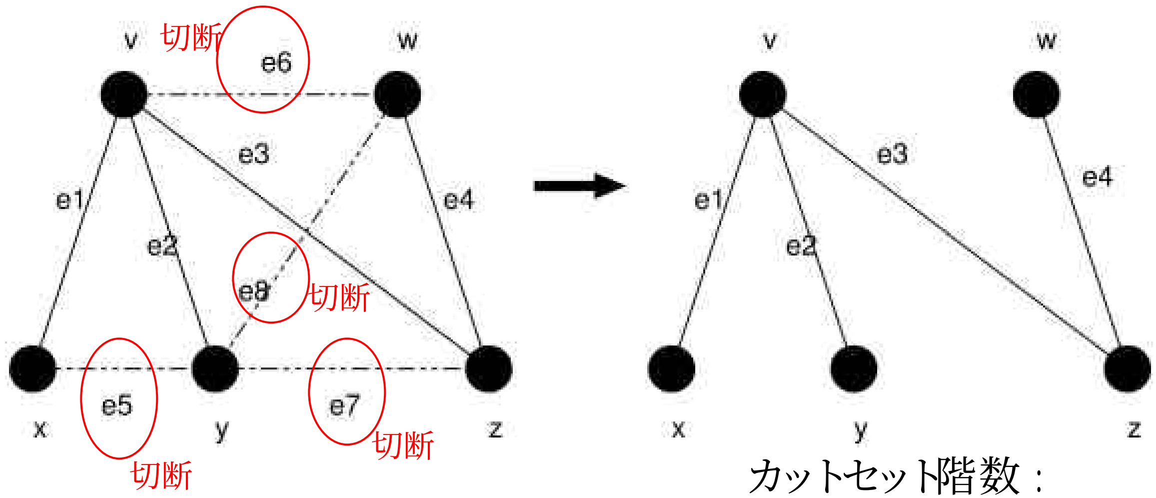
握手補題より、辺の総数の2倍はグラフの次数に等しいので

$$\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=2q=2(p-1)$$

木の端点が2つ、つまり、p=0,1であるとすると、点の数が2以上であるグラフの次数の定義に反する

全域木と全域林

全域木 (spanning tree)　：
連結グラフGに対し、閉路が無くなるまで辺を除去して残るグラフ



閉路階数　：

$$g(G) = m - n + k = 4$$

(全域林（木）を得るために切断すべき辺の本数)

カットセット階数 :

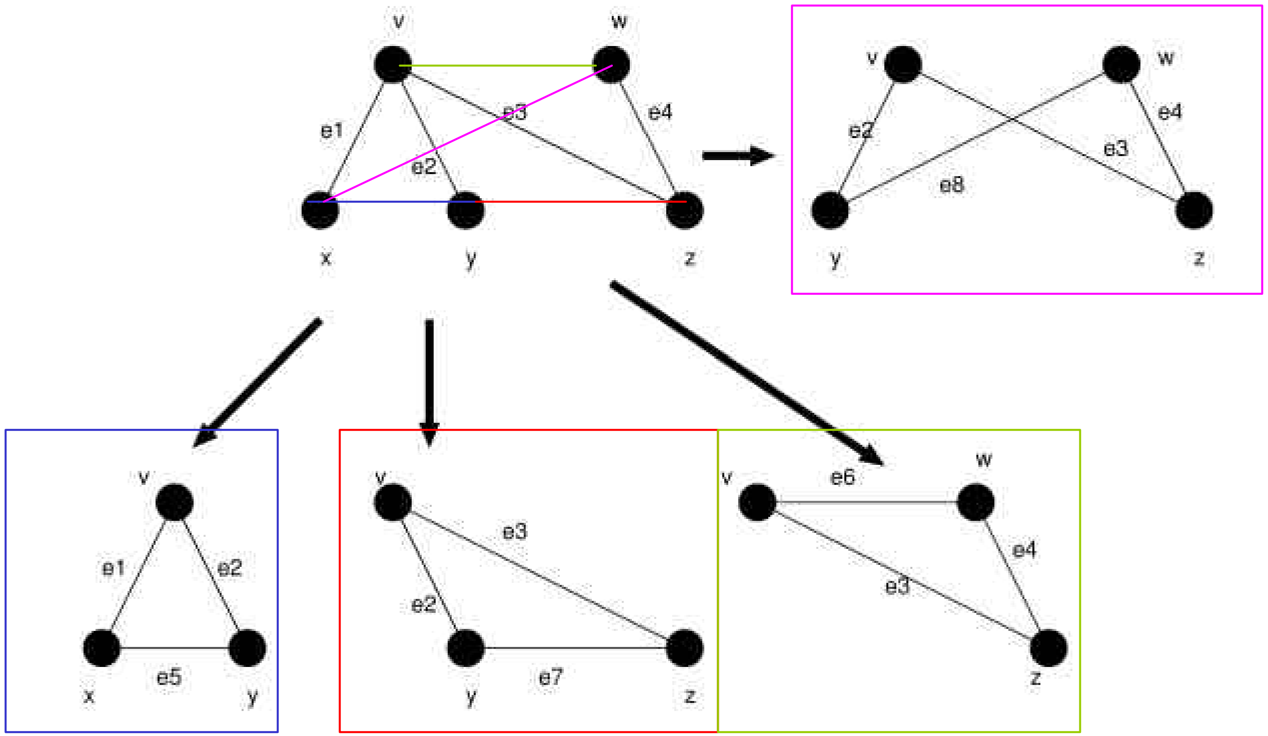
$$x(G) = n - k = 4$$

(全域木の辺数)

全域林 (spanning forest) : n個の点とm本の辺、k個の成分があるとし、Gの各成分に対し、閉路が無くなるまで辺を除去する操作を繰り返して得られるグラフ

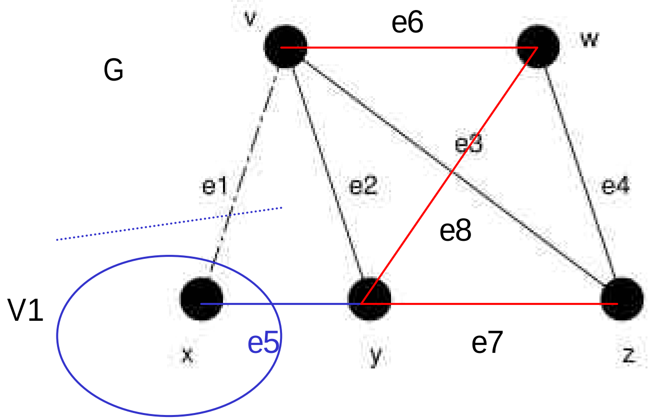
基本閉路集合

基本閉路集合 : Tに含まれないGの任意の辺を一つTに付加すると、一つずつできる閉路の集合



基本カットセット集合

基本カットセット集合
：Tの各辺を除去して得られる
　カットセット集合



e1で木を切断するとV1とV2に分離する。

このe1とGでV1に接続していた辺e5を
組んだものはGのカットセットとなっている