グラフ理論　#8

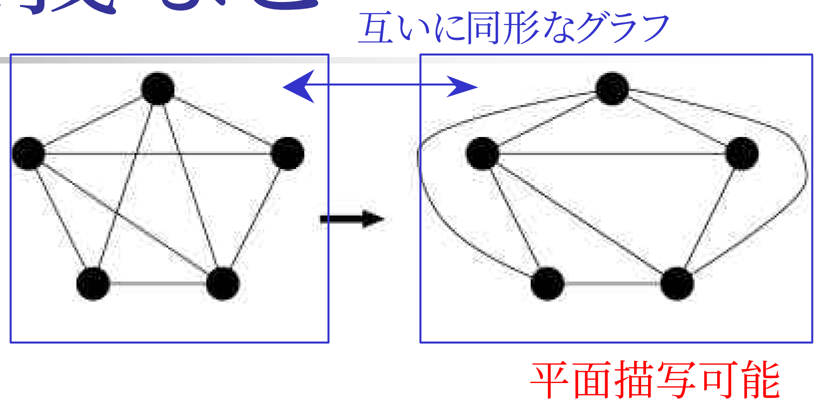
第8回講義　6月13日

情報科学研究科　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

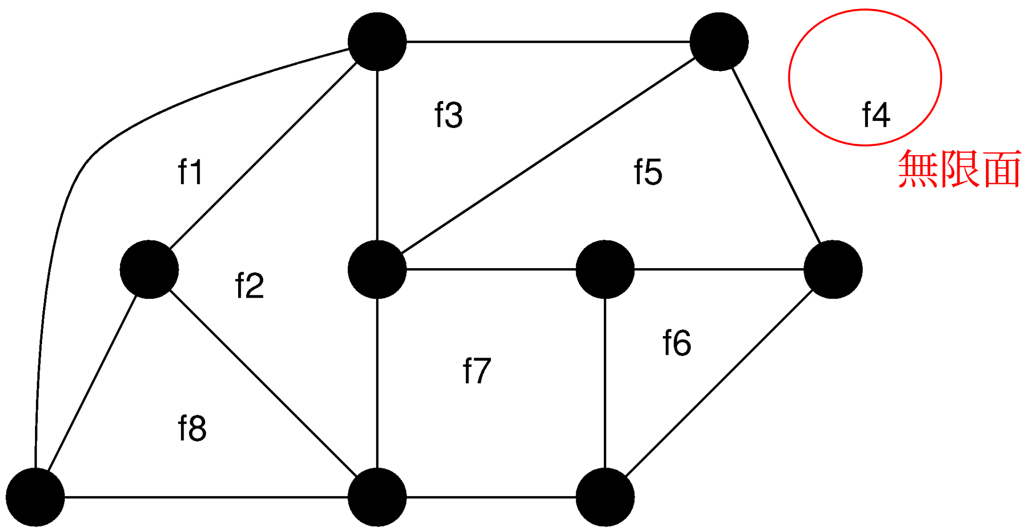
平面グラフ：定義など

平面グラフ : どの2つの辺も、それが隣接する
点以外では幾何学的に交差しない
ように描かれたグラフ



面 : 辺によって分割される領域

無限面 : 非有限な面



オイラーの公式

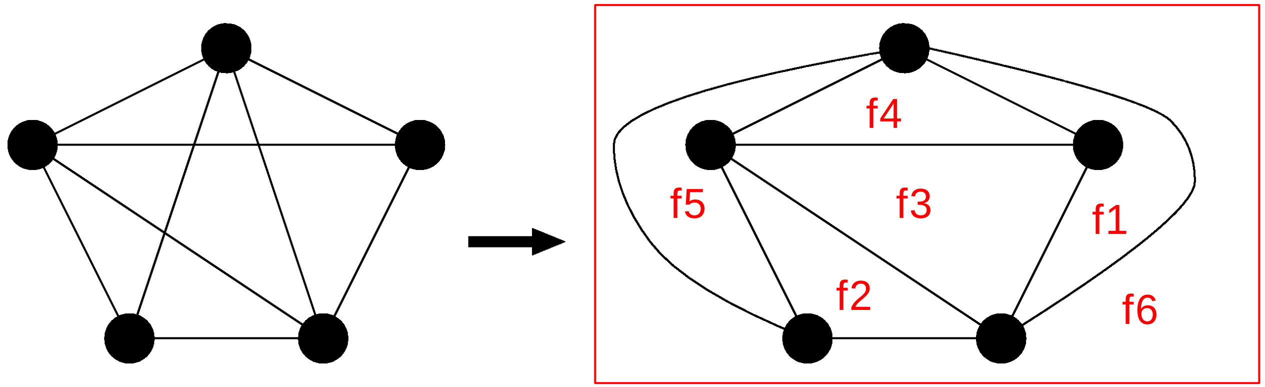
グラフGを連結な平面グラフとするとき、次の公式が成り立つ

$$n - m + f = 2$$

n:**点数**、m: **辺数**、f : **面数**

オイラーの公式

例)



$n = 5,\ f = 6, m = 9$**より**

$$n - m + f = 5 - 9 + 6 = 2$$

と成立するので平面描写可能である

オイラーの公式の証明 #1

辺数 m に関する数学的帰納法により証明する

$m = 0 : n = 1, f = 1$ **(無限面)**

$\therefore \quad n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2$ **で成立**

m=0 の場合

n=1

f=1 (無限面)

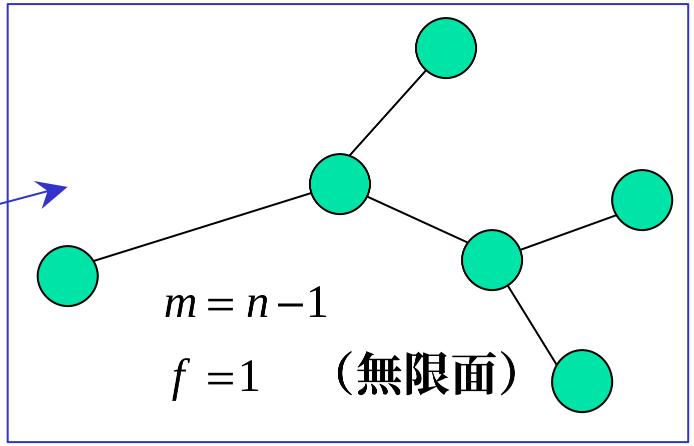
「m-1本以下の辺をもつ全てのグラフGに対して公式が成立する」と仮定する

注)

Gが木の場合には特別な事情がある

$n - (n-1) + 1 = 2$

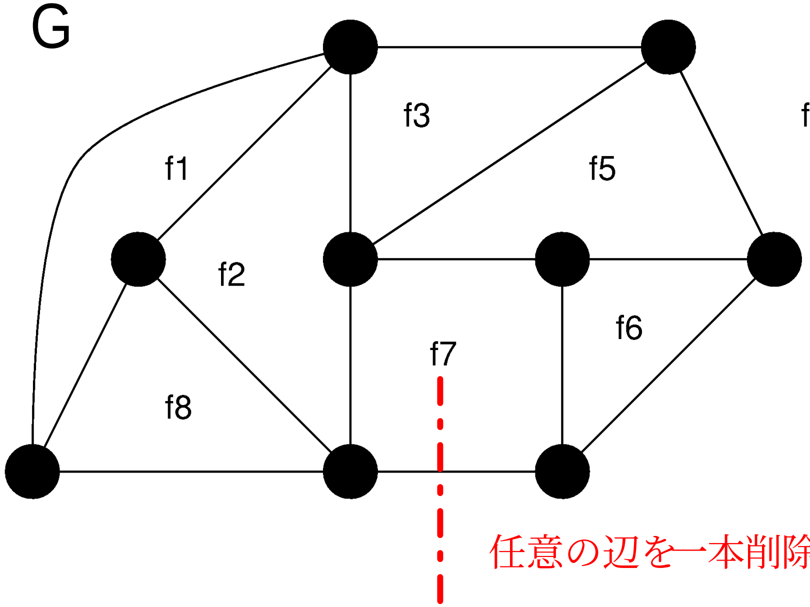
(任意のmに対して常に成立)



以下の議論では木を除く一般の連結グラフ G について考える

オイラーの公式の証明 #2

G



任意の辺を一本削除する

グラフ G の任意の辺を一本削除すると

$$\begin{aligned} n &\Rightarrow n \\ m &\Rightarrow m-1 \\ f &\Rightarrow f-1 \end{aligned}$$

仮定により、このセットに対してオイラーの公式が成立すべきである

$$n-(m-1)+f-1=2$$

$$\therefore\ n-m+f=2$$

⇒ 任意の変数に対してオイラーの公式は成立

証明終わり

内周を用いたオイラー公式の書き換え

オイラーの公式を面数を含まない形に書き換える

内周 k **：グラフ**G**の最短の閉路長**

$d(F)$**：グラフ**G**の面**F**の次数の和**

$$\Rightarrow \quad k \le d(F)$$

握手補題より

$$\therefore \; kf \le \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m$$

グラフ G の面集合

オイラーの公式：$f = 2 + m - n$ **を代入して**m **に関してまとめると**

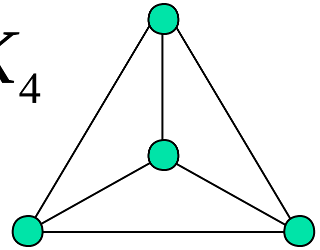
$$\boxed{m \le \frac{k(n-2)}{k-2}}$$

グラフの平面性の判別式
（成立すれば平面描写可能）

判別式の適用例：例題18

(1)　4次の完全グラフ

K_4



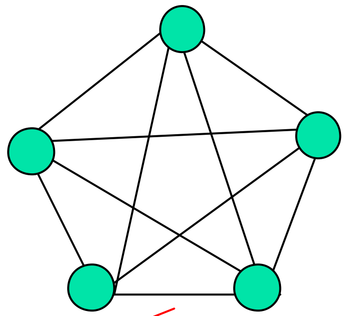
$$n = 4, m = {}_4C_2 = 6, k = 3$$

$$\therefore\ 6 \leq \frac{3\cdot(4-2)}{3-2} = 6$$

不等式成立。平面描写可能

(2) 5次の完全グラフ

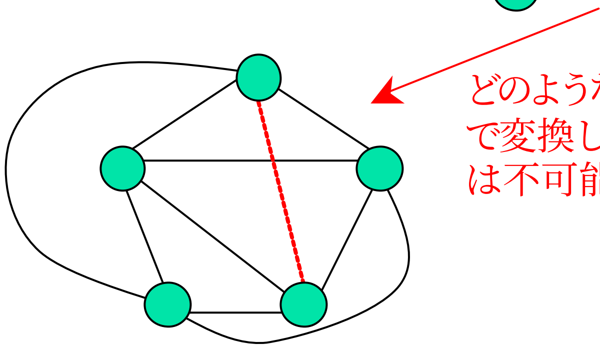
K_5



$$n = 5, m = {}_5C_2 = 10, k = 3$$

$$\therefore\ 10 \leq \frac{3\cdot(5-2)}{3-2} = 9$$

不等式不成立。平面描写不可能



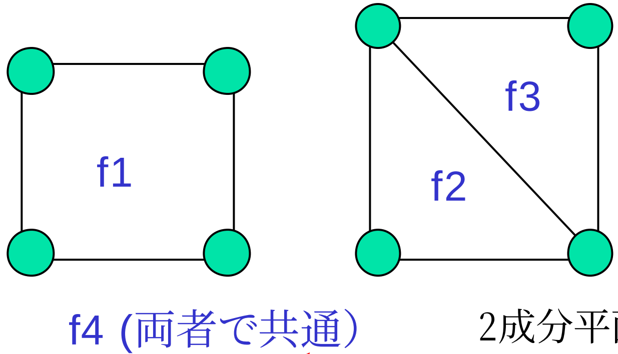
複数成分があるグラフに対するオイラー公式とその証明

複数成分をもつグラフに対するオイラーの公式

平面グラフGの成分がkの場合には

$$n-m+f=k+1$$

が成り立つ



2成分平面グラフの例

証明)

無限面が $k-1$ 個だけ余分にカウントされるので

$f \to f-(k-1)$**とすると**

$$n-m+\{f-(k-1)\}=2$$

$$\therefore \quad n-m+f=k+1$$

証明終わり

平面グラフの辺数の上限

単純連結平面グラフG が$n(\geq 3)$個の点とm本の辺をもつとき

$$m \leq 3n-6$$

が成立し、三角形が無ければ

$$m \leq 2n-9$$

が成り立つ

証明）

Gに含まれる最小面は3点からなる三角形なので

$$3 \leq d(F)$$

オイラー公式 : f ＝ 2-n+m を代入

つまり、$3f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m, \quad \therefore \; m \leq 3n-6$

また、Gに三角形がなければ、最小面は四角形なので

$$4 \leq d(F)$$

つまり、$4f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m, \quad \therefore \; m \leq 2n-4$

証明終わり

交差数と厚さ

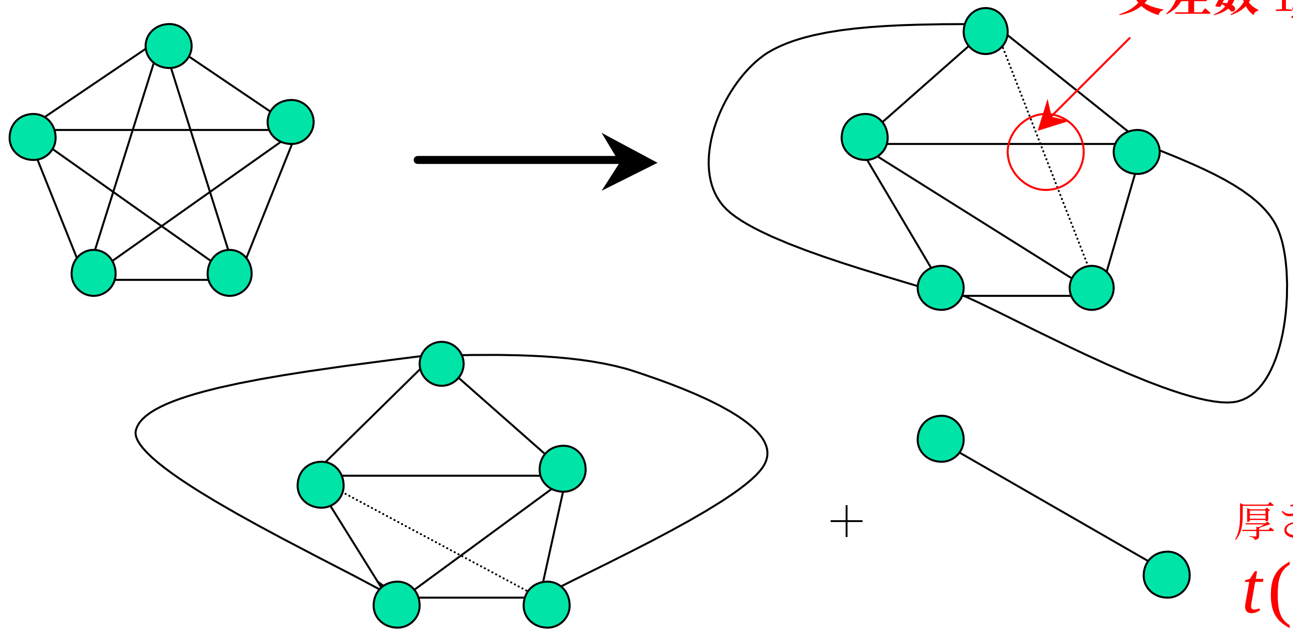
具体例は講義ノート
例題19を参照

交差数 ： グラフ G を平面描写した際に生じる辺の最小交差の数 $cr(G)$

厚さ：いくつかの平面グラフを重ね合わせてグラフGを作る際に必要な
平面グラフの数 $t(G)$

例）

K_5



交差数 1, $cr(K_5)=1$

厚さ
$t(K_5)=2$

単純グラフの厚さの下限

単純グラフG に$n(\geq 3)$個の点、m本の辺があるとき、Gの厚さは

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil, \quad t(G) \geq \left\lfloor \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rfloor$$

を満たす

証明）

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{\text{辺の総数}}{\text{平面グラフとなるための辺の上限}} \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil$$

この関係式の証明は講義ノートを参照のこと

さらに恒等式 : $\boxed{\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor}$ で$a = m, b = 3n-6$とすると

$$t(G) = \left\lfloor \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rfloor$$

証明終わり）