グラフ理論 #10

第10回講義　6月27日

情報科学研究科　　井上純一

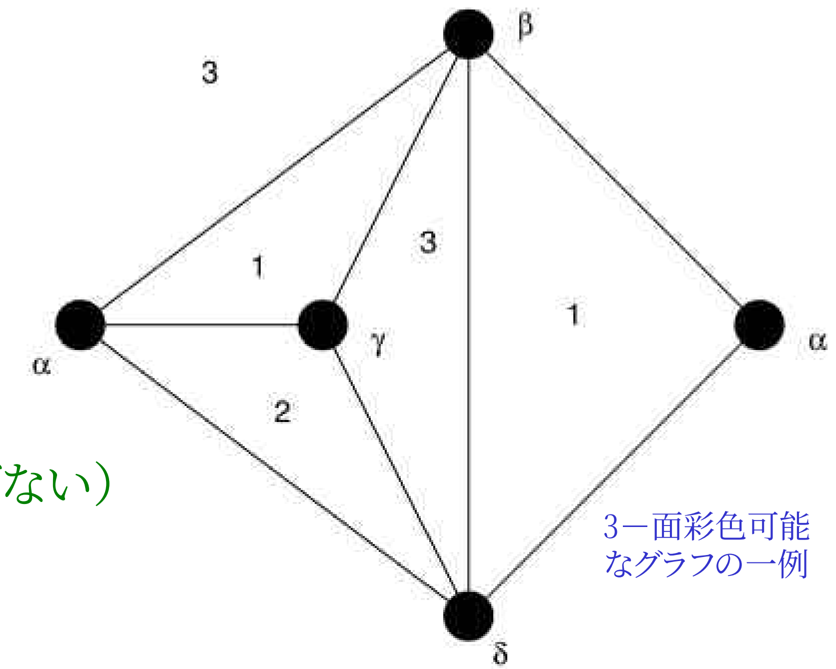
http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

地図の彩色（面彩色）

k-面彩色可能：地図の隣接する2つの面が
同じ色にならないようにｋ色で彩色できる場合

全ての平面グラフは4-彩色可能である
（4色定理、1976年計算機実験の助けを
借りて証明される）

※ この講義ではそれに至るまでに
得られた幾つかの知見・定理に
ついて見ていく(4色定理の証明は取り上げない）



3－面彩色可能
なグラフの一例

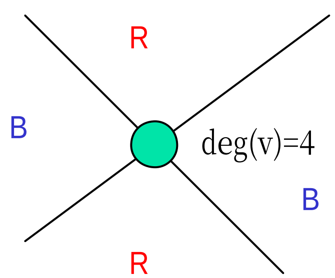
定理19・1とその証明

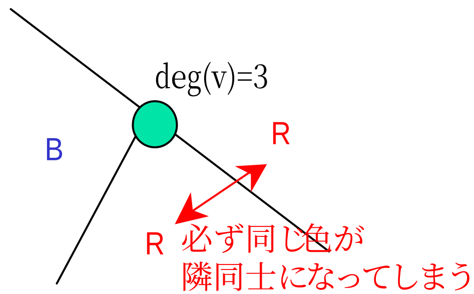
定理19・1

地図Gが2 面彩色可能であるための必要十分条件は、Gがオイラー・グラフであることである

(証明のアウトライン)

[必要性]

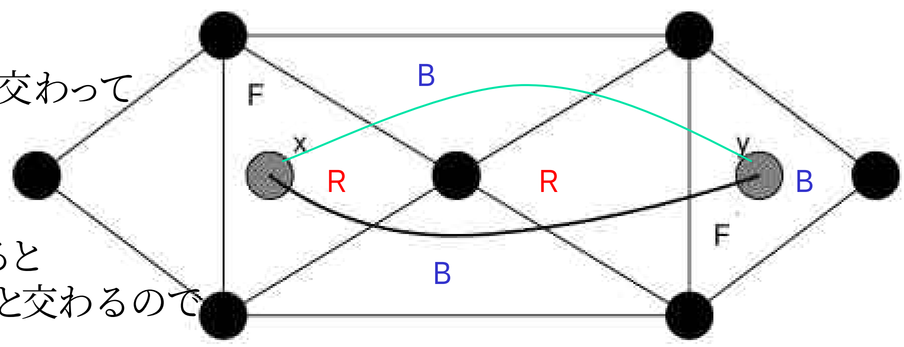




Gの各点を含む面は偶数でなければならいので、
各点の次数は偶数。
「連結グラフがオイラー・グラフであるための条件は
Gの点の次数が全て偶数」
であったことを思い出せば、Gはオイラー・グラフである

[十分性]

任意の面(赤)内の点Xからスタートし、偶数回の辺と交わって
到達する面を赤で、奇数回の辺と交わって到達する
面を青で彩色する

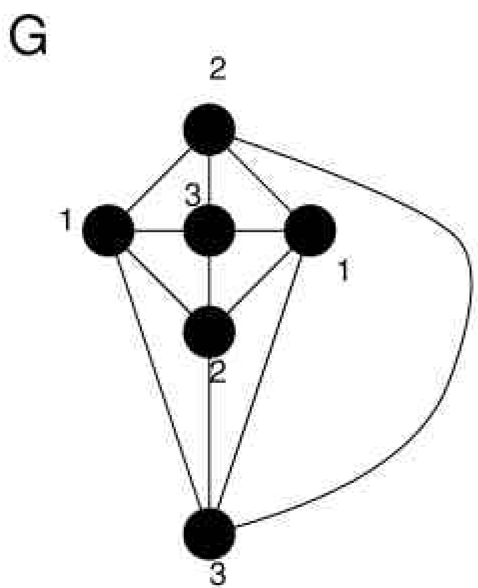


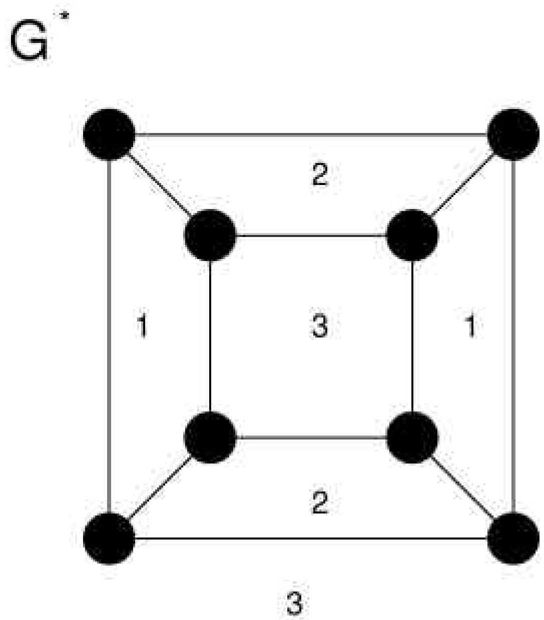
この方法で任意の点から任意の点へ戻る閉路を考えると
グラフがオイラー・グラフであれば、必ず偶数回だけ辺と交わるので
2色彩色で矛盾なく、全ての面が特定される

定理19 ·2

Gはループの無い平面グラフとし、G^*はGの幾何学的双対であるとする。このとき、Gがk彩色可能であるための必要十分条件は、G^*がk面彩色可能であることである。

例）





定理19‐4とその証明

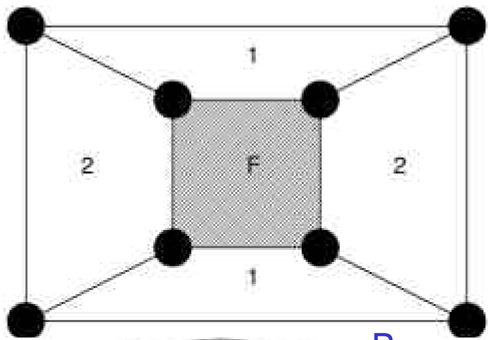
定理 19‐4

> Gは各点が3次の地図であるとする。このとき、Gが 3‐面彩色可能であるための必要十分条件は各面が偶数本の辺で囲まれていることである。

(証明)

[必要性]

任意の面Fに関し、各点の次数が3であるから、Fを取り囲む面は2色で彩色可能である。そのような面は偶数個なければならないので、全ての面は偶数本の辺で囲まれている。



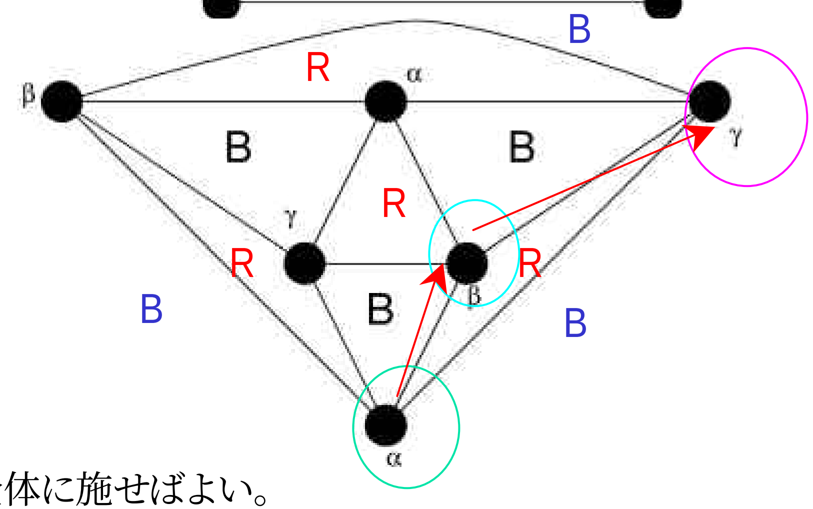
[十分性]

「Gが単純グラフであり、Gの各面が三角形で、各辺の次数が偶数（オイラー‐グラフ）であれば、Gは3点彩色可能である」という双対な結果を示す。

定理19‐1より、Gの面はR、Bの2色で彩色可能

このとき $\text{面}R: a \to b \to g$ **(時計回り)**

$\text{面}B: a \to b \to g$ **(反時計回り)**



のような点彩色をグラフ全体に施せばよい。

辺彩色

k-辺彩色可能 : グラフGの隣接する辺は同じ色にならないように、Gの各辺をk職で彩色できるとき

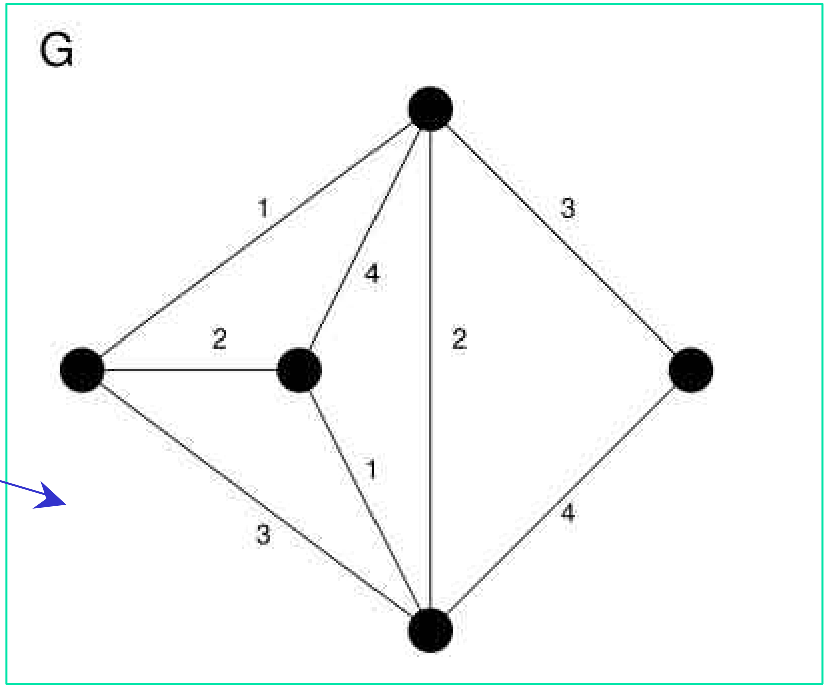
彩色指数 : Gがk-辺彩色可能、k-1辺彩色不可能なとき、彩色指数を

$$\boxed{c'(G) = k}$$

彩色指数

で定義する。

$c'(G) = 4$であるグラフの一例



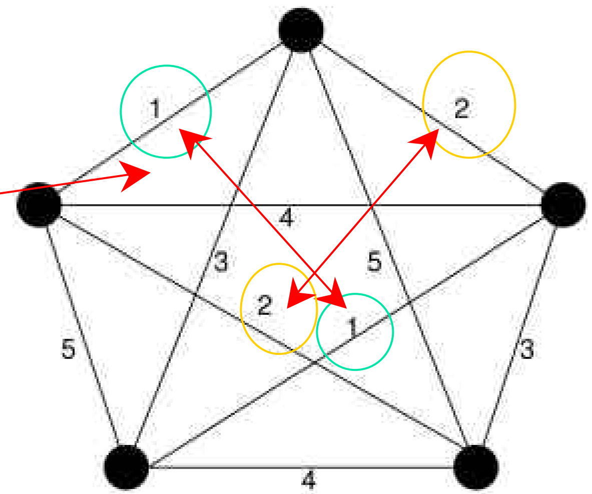
定理20 ·2とその証明 #1

$n(\neq 1)$**が奇数であれば、**$c'(K_n) = n,$ **偶数ならば、**$c'(K_n) = n-1$

(証明)

[nが偶数の場合]

完全グラフの点を正n角形の形状に配置する。その外周の点を異なる色を用いて彩色し、次に残りの辺のそれぞれをそれと平行な外周の辺に用いられた色で彩色する。



このとき、同じ色で彩色できる辺の最大数は (n-1)/2

従って、彩色指数が n-1 であれば

$$m(K_n) \leq \frac{1}{2}(n-1)c'(K_n) = \frac{1}{2}(n-1)^2 \neq {}_nC_2$$

矛盾。

彩色指数が n であれば

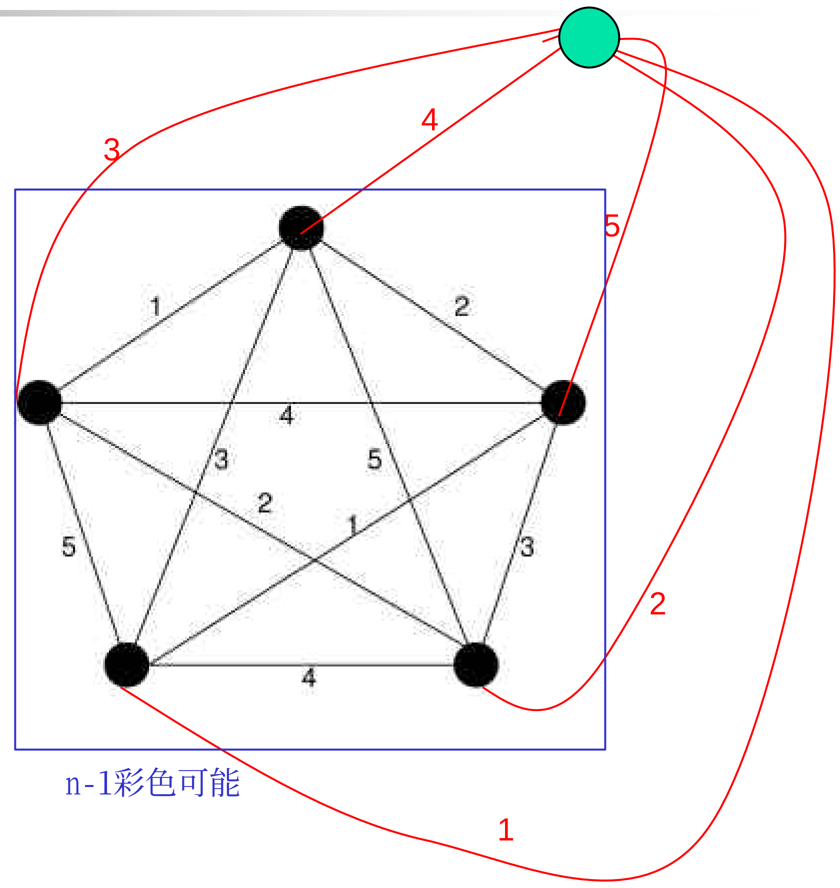
$$m(K_n) \leq \frac{1}{2}(n-1)c'(K_n) = \frac{1}{2}n(n-1) = {}_nC_2$$

OK。従って彩色指数はnである

定理20 ·2とその証明#2

[nが偶数のとき]

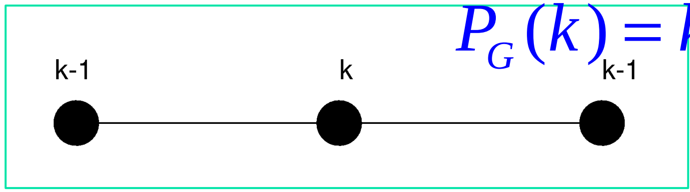
K_nはK_{n-1}と1つの点の和とみなせる。
K_nは$n-1$色で彩色可能。
K_{n-1}の次数は$n-2$であるから、
各点には全n色のうち
欠けてる色が1色ずつあるので、
これでそれぞれの辺を
彩色すればK_nの$n-1$彩色ができあがる



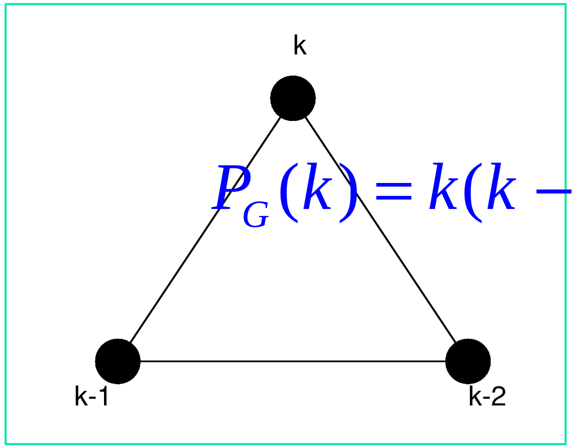
彩色多項式

彩色多項式： Gを単純グラフとし、k色での点彩色の仕方が$P_G(k)$通りあるとき、$P_G(k)$を彩色多項式と呼ぶ

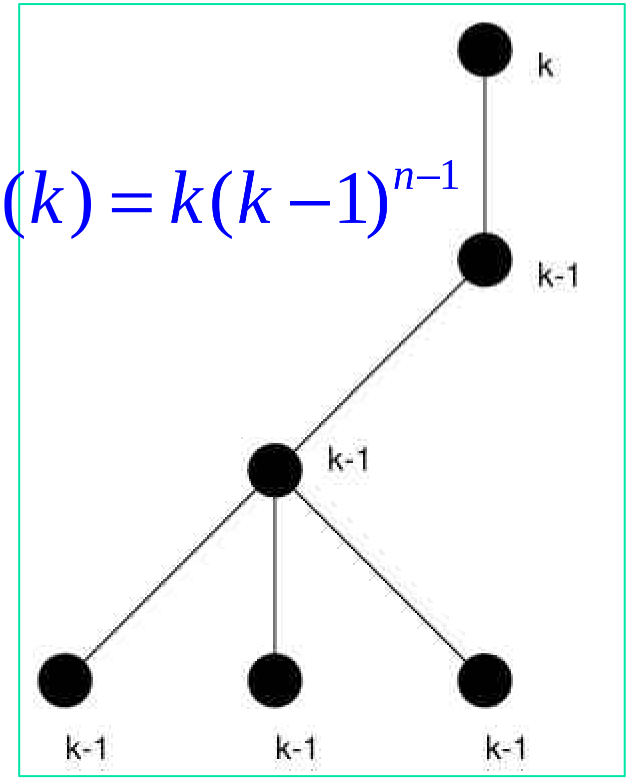
(例)



$$P_G(k) = k(k-1)^2$$



$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)$$



$$P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$$

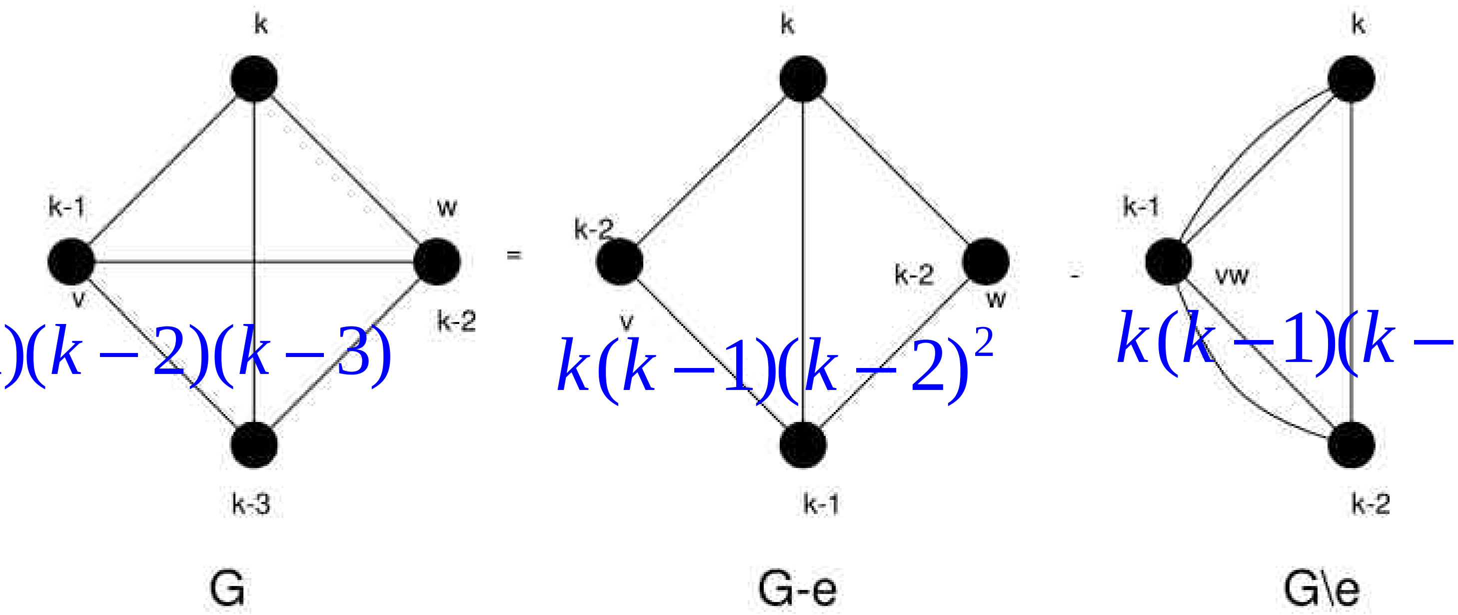
定理21･1 とその適用例

単純グラフGから辺を削除して得られるグラフを$G-e$とし、縮約してできるグラフをG/eとすると

$$P_G(k)=P_{G-e}(k)-P_{G/e}(k)$$

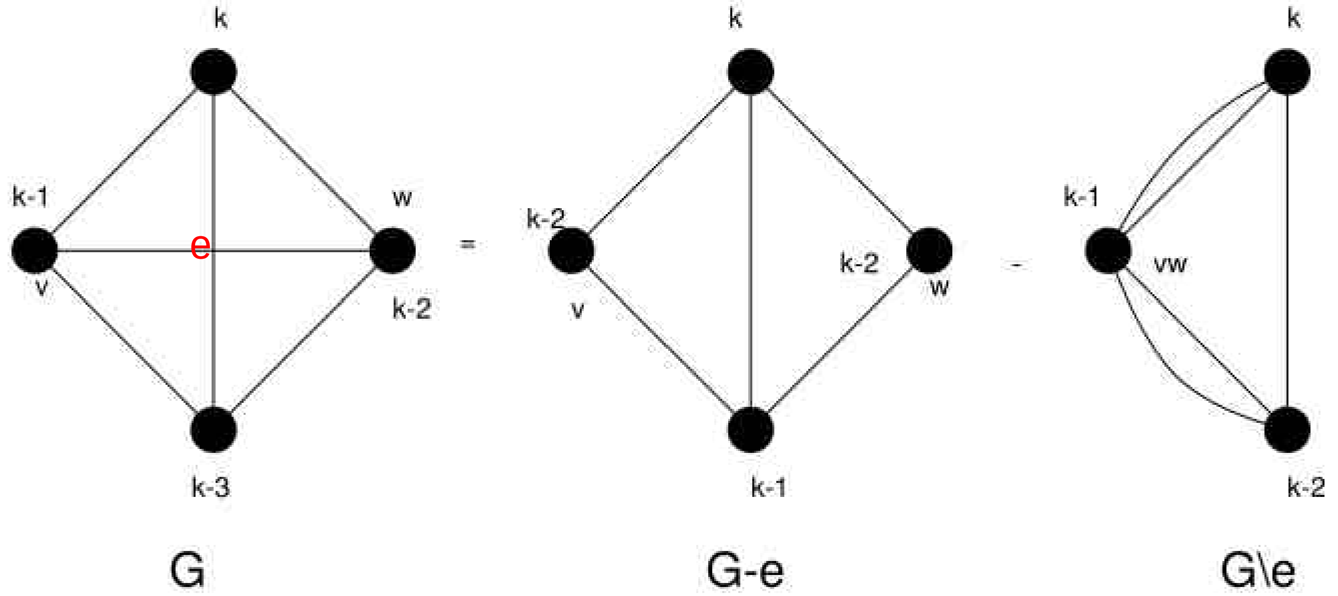
が成立する。

例）



$k(k-1)(k-2)(k-3)$ $\quad$ $k(k-1)(k-2)^2$ $\quad$ $k(k-1)(k-2)$

定理21・1の証明



e=vwとする。点vと点wが異なる色になるような、G-eのk彩色の個数はvとwを結ぶ辺を描いても変わらない。

$\therefore\ P_G(k)$**に等しい。**

点vと点wが同色になるような、G/eのk彩色の個数はvとwを同一視しても変わらない。$\therefore\ P_{G/e}(k)$**に等しい。**

従って

$$\boxed{P_{G-e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k)}$$

成立

具体的な適用例は
例題28、29を通じて見ていくことにする