グラフ理論 #11

第11回講義 7月4日

情報科学研究科　　井上純一

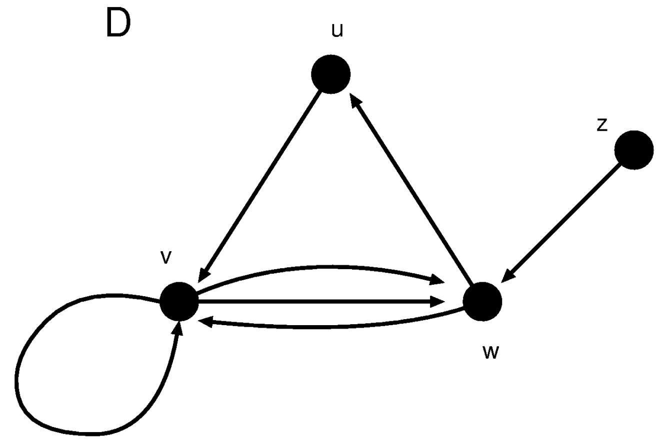
http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

有向グラフ: 定義 •性質 #1

弧集合：

$A(D)$: **点集合** $V(D)$ **の元の順序対からなる有限族**

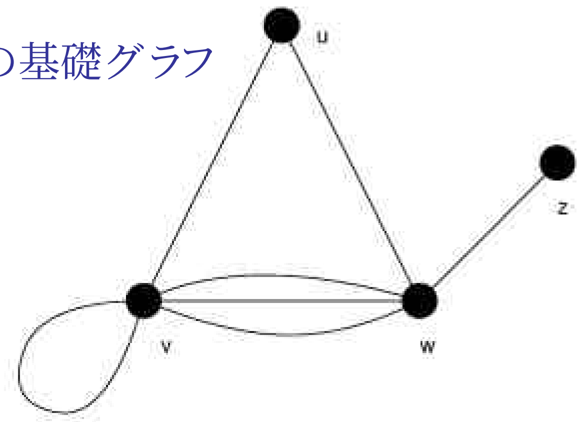
$$A(D)=\{\overline{uw},\overline{vv},\overline{vw},\overline{vw},\overline{wv},\overline{wu},\overline{zw}\}$$



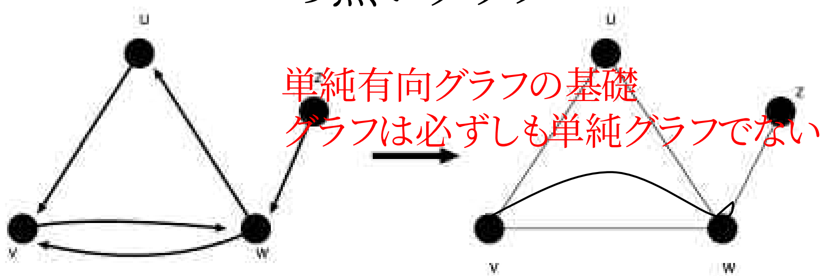
有向グラフ:　$D:V(D)$**と**$A(D)$**からなるグラフ**

Dの基礎グラフ: 有向グラフDの矢印を取り除いたグラ

Dの基礎グラフ



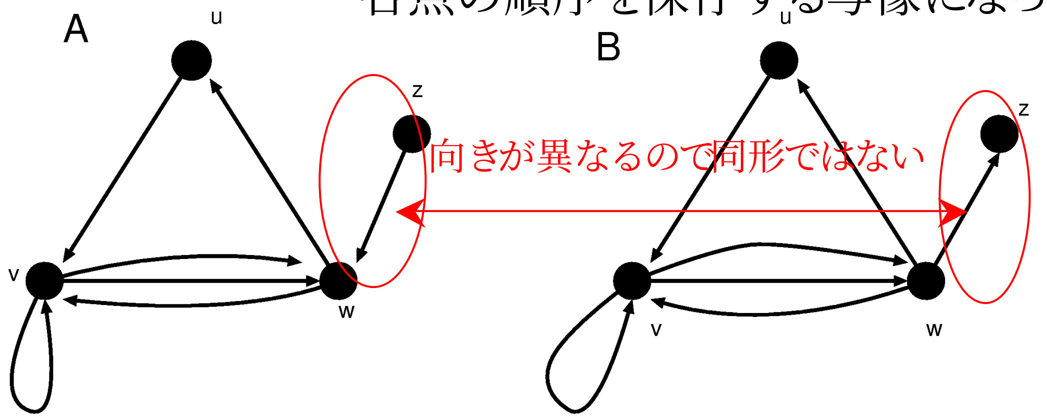
単純有向グラフ:　Dの弧が全て異なり、ループの無いグラフ



単純有向グラフの基礎グラフは必ずしも単純グラフでない

有向グラフ: 定義・性質 #2

有向グラフの同形：基本グラフの間に同形写像があり、
各点の順序を保存する写像になっているとき



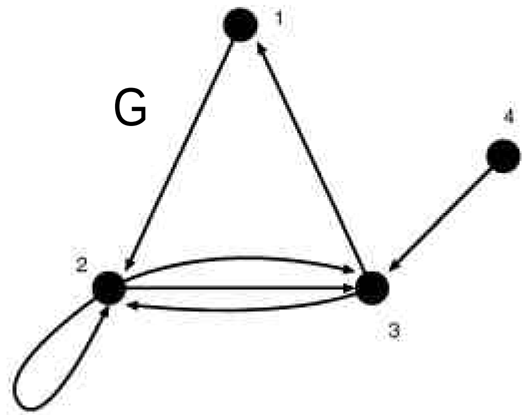
有向グラフの隣接行列：

$\mathbf{A}=(a_{ij})$：要素a_{ij}がv_iからv_jへの「弧」の本数を表す。

点数nのグラフに対して$n\times n$の行列

グラフGの隣接行列
対称ではない

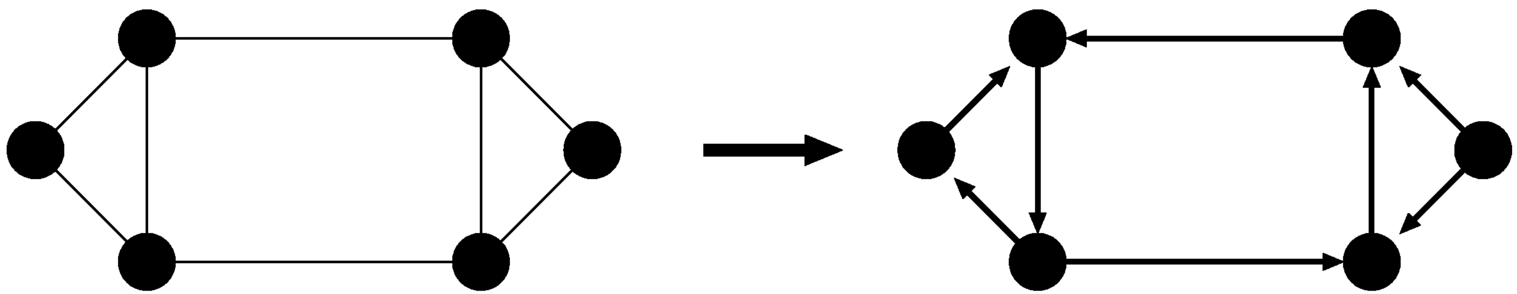
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0100 \\ 0120 \\ 1100 \\ 0010 \end{pmatrix}$$



強連結と向き付け可能性

強連結　：任意の2点 v,w の間に点 vから点 w への道がある

向き付け可能　：グラフGの全ての辺を方向付けて強連結有向グラフが得られるとき



向き付け可能なグラフの一例

定理22 ·1とその証明

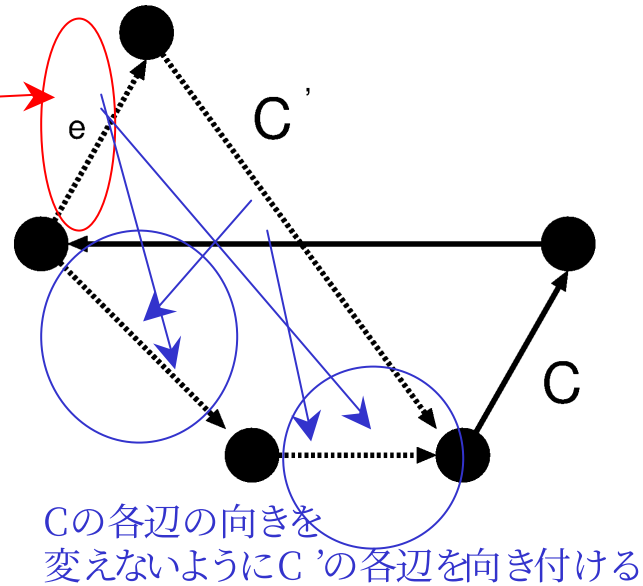
定理22 ·1

連結グラフGが向き付け可能であるための必要十分条件は、グラフGの各辺が少なくとも一つの閉路に含まれていることである

(証明)

必要性はあきらかなので、十分性を示す。

閉路Cには含まれないが、Cの書く辺に隣接している辺eを選ぶ



「グラフGの各辺は少なくとも一つの閉路に含まれる」ので、
辺eはC以外の閉路C’に含まれる

Cの各辺の向きを変えないように、C’の各辺を向き付ける

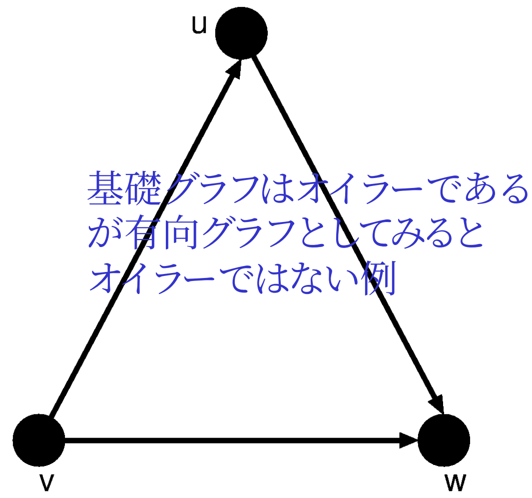
この操作を続けて、各ステップで少なくとも1つの辺を
向き付けると、各ステップで有向グラフは強連結なので、
グラフ全体を向き付けたのちにできるグラフは強連結である。

オイラー有向グラフ

オイラー有向グラフ : 全ての弧を含む閉じた小道が存在する連結有向グラフ

入次数 indeg(v):vw**の形をした有向グラフ**D**の弧数**

出次数 outdeg(v):wv**の形をした有向グラフ**D**の弧数**



握手有向補題
有向きグラフDの全点について入次数の合計と出次数の合計は等しい

定理23・1

連結有向グラフDがオイラーであるための必要十分条件は、Dの各点で outdeg(v)=indeg(v)が成立することである。

ハミルトン有向グラフ

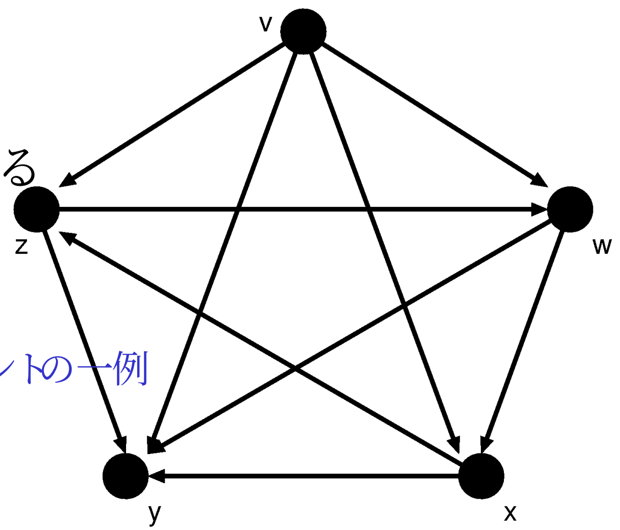
ハミルトン有向グラフ : 全ての点を含む閉路がある有向グラフ

半ハミルトン有向グラフ : 全ての点を通る道がある有向グラフ

定理23・2

Dは強連結有向グラフであり、点が n 個あるとする。各点 v に対し $\mathrm{out\,deg}(v) \geq n/2$かつ$\mathrm{indeg}(v) \geq n/2$ならば$D$はハミルトン有向グラフである。

トーナメント: 任意の2点がちょうど1本の弧で結ばれている有向グラフ



トーナメントの一例

定理23 ·3

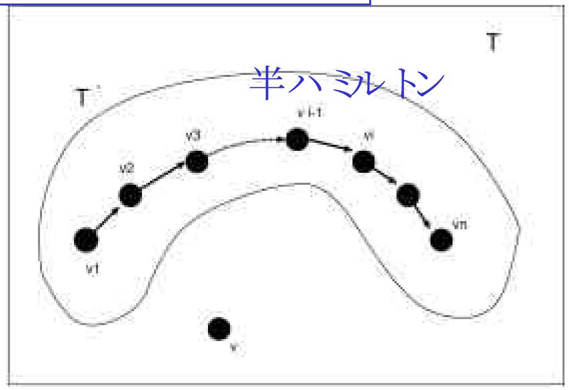
定理23 ·3

(i) ハミルトンでないトーナメントは全て半ハミルトンである。
(ii) 強連結なトーナメントは全てハミルトンである。

((i)の証明)

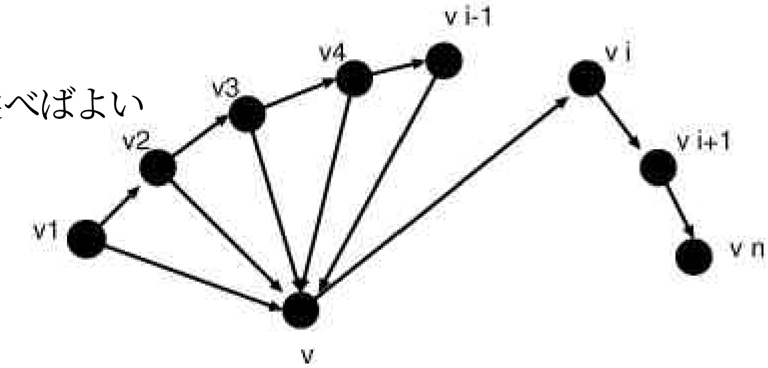
点n個のトーナメントは全て半ハミルトンであると仮定する。
図のT'にはn個の点があるので半ハミルトンである。

これに点vを加える状況(T)を考える



(1) vv1がTの弧ならば $v \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$ が所望の道である。

(2) vv1がTの弧でなく、v1vがTの弧ならば、図のように点viを選べばよい



(3) vviの形をした弧がTに無ければ

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n \to v$$ が所望の道である。