



# グラフ理論 #13 (最終回)

第13回講義 7月25日

---

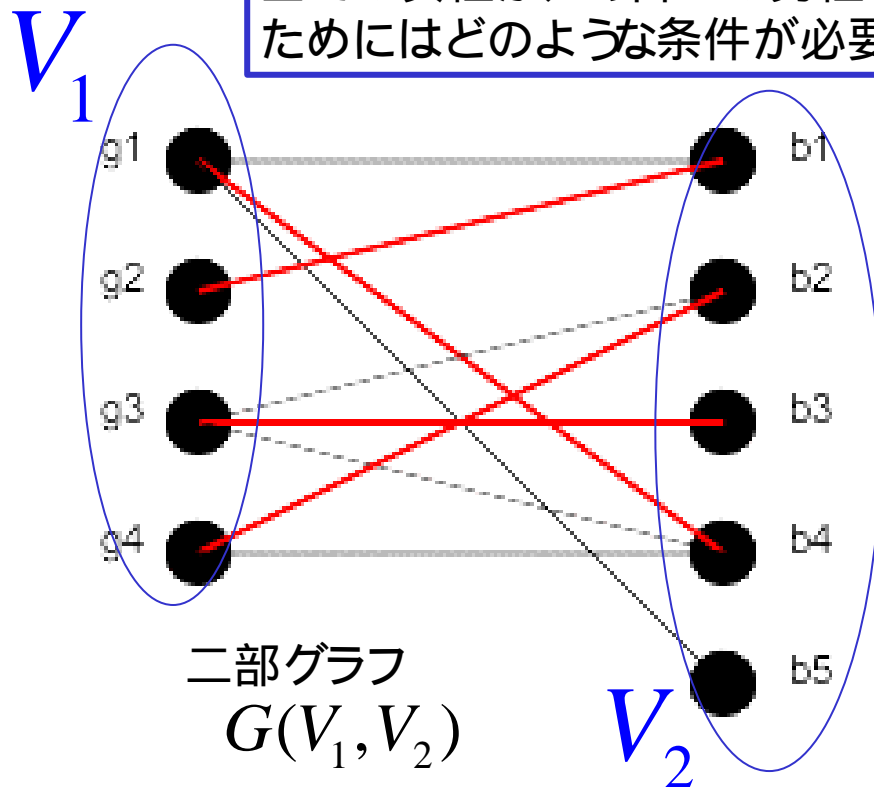
情報科学研究科 井上純一

[http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

# 結婚問題

## 結婚問題

女性の有限集合があり、各女性は何人かの男性と知り合いである。全ての女性が知り合いの男性と結婚できるようにカップルが組めるためにはどのような条件が必要であるか？



### 完全マッチング

$V_1, V_2$ の部分集合の一対一対応で、かつ、対応する点は辺で結ばれたもの

$G = G(V_1, V_2)$ が二部グラフのとき、 $G$ において $V_1$ から $V_2$ への完全マッチングがあるのはどのようなときか？

結婚問題の完全マッチングを用いた言い換え



# Hallの定理とその証明

Hallの結婚定理

結婚問題に解がるための必要十分条件は、どの $k$ 人の女性も合わせて $k$ 人以上の男性と知り合いであることである。

(証明)

必要性は明らか ( $k$ 人の女性の誰かと知り合いの男性が $k$ 人未満であれば、誰かが余る)

十分性を以下で証明する。

「女性が $m$ 人未満であれば成立する」と仮定。  $m = 1$ であれば、 $k = 1$ 人の女性は一人の男性と知り合いなので、その男性と結婚すればよい。  $m$ 人の女性がいる場合には以下の2つの場合に分ける。

(1)  $k < m$  なる、どの  $k$ 人の女性をとっても、合わせて  $k + 1$ 人の男性と知り合いのとき

女性1人を選び、知り合いの任意の男性と結婚させれば、残り $m - 1$ 人の女性は $k$ 人の男性と知り合いであるので、仮定より証明終わり。

(2)  $k (< m)$ 人の女性がちょうど  $k$ 人の男性と知り合いのとき

帰納法の仮定より  $k$ 人の女性は結婚可能。残りは $m - k$ 人である。  $(m - k)$ 人のどの $h$ 人 ( $h < m - k$ )も残りの $h$ 人以上の男性と知り合いである。従って $m - k$ 人の女性に対して成立。

# 横断

$E$ : 空でない有限集合

$F = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ :  $E$ の空でない部分集合の族

$F$ の横断: 各集合 $S_i$ から一つ選んだ $E$ の相異なる $m$ 個の元の集合

(例)

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S_1 = \{1, 2\}$$

$$S_2 = \{1, 2\}$$

$$S_3 = \{2, 3\}$$

$$S_4 = \{2, 3\}$$

$$S_5 = \{1, 4, 5, 6\}$$

$F = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$ に横断はない

$F' = (S_1, S_2, S_3, S_5)$ には横断  $\{1, 2, 3, 4\}$  がある

与えられた集合族 $F$ が横断を持つための必要十分条件がHallの定理である

Hallの定理と横断との関係

# ラテン方阵

ラテン長方形

$m \times n$  ( $m \leq n$ )ラテン方阵：次の性質をもつ $m \times n$ 行列 $\mathbf{M}$

- (1) 任意の行列要素は $1 \leq m_{ij} \leq n$ を満たす
- (2) どの行、どの列にも同じ要素は無い

(例)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

どの行、どの列にも同じ要素が無い

ラテン長方形からはラテン方阵 (正方形) へ拡張することができる

# ラテン長方形からラテン方阵へ

**M**は $m < n$ からなる $m \times n$ ラテン長方形であるとする  
**M**に $n - m$ 本の新しい行を加えてラテン方阵に拡張できる

(例)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ をラテン長方形**M**の要素

$F = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$

$S_1 = \{4, 5\}, S_2 = \{1, 3\}, S_3 = \{4, 5\}, S_4 = \{2, 3\}, S_5 = \{1, 2\}$

第1列に現れない要素

作成の指針 : Fから横断を見つけて、それを長方形へ加える

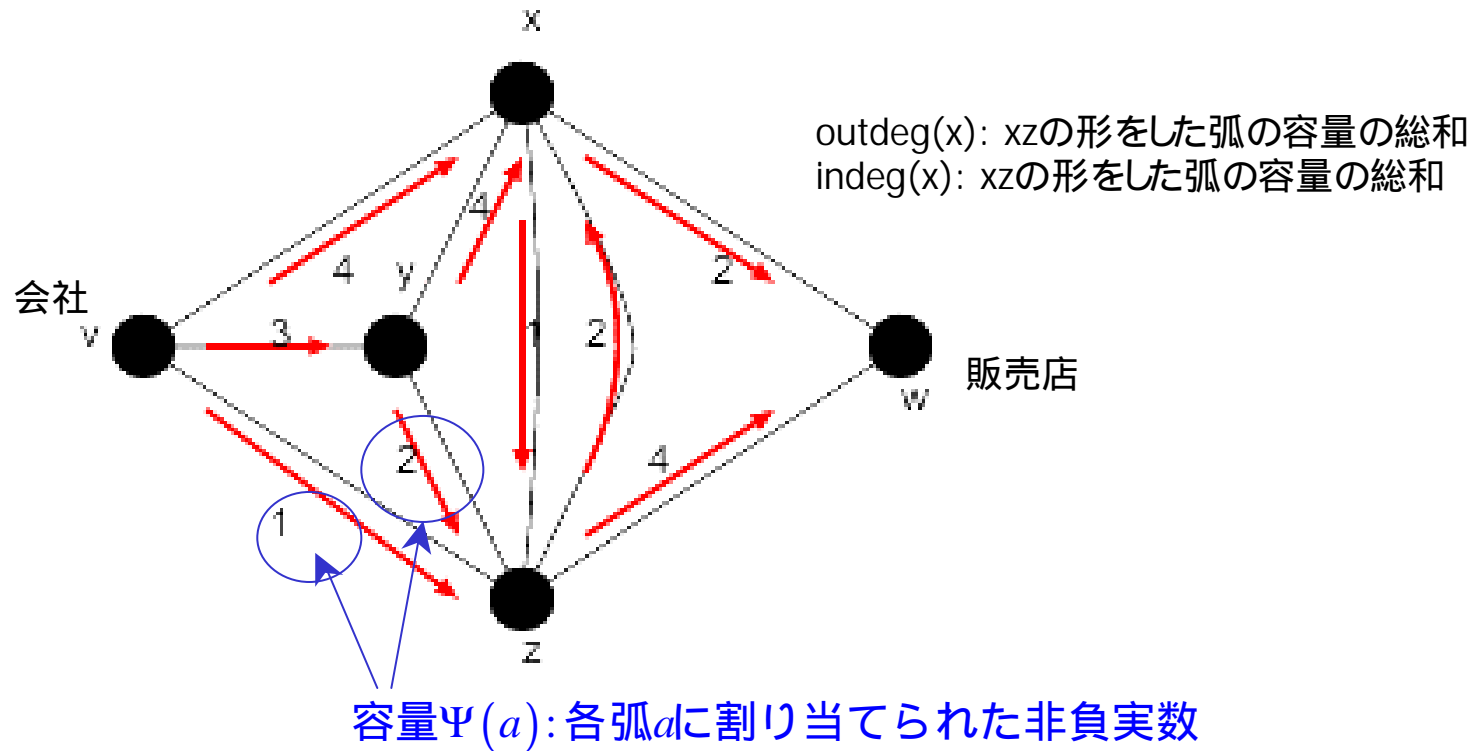
今の場合  $(4, 3, 5, 2, 1), (5, 1, 4, 3, 2)$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

# ネットワークフロー

ここで考える問題

各ルートの許容量を超えないようにして会社から販売店に送ることのできる箱の個数はいくつか？



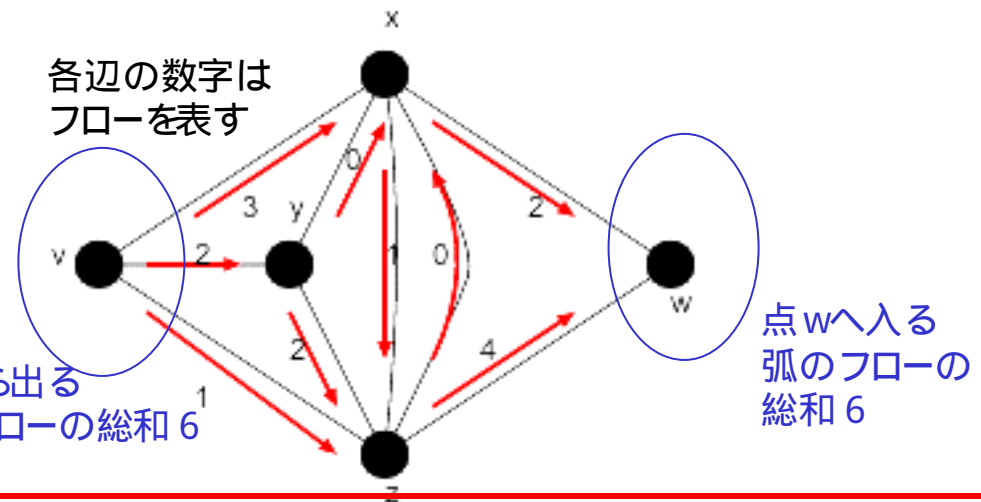
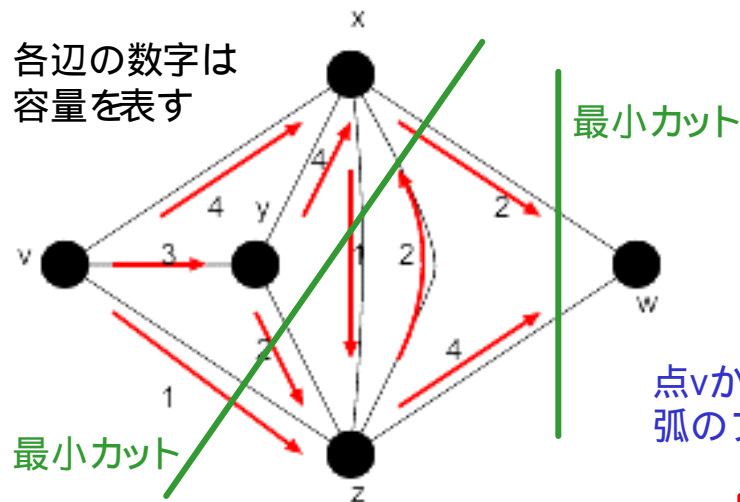
# フローとカット

フロー (flow)

各弧  $a$  に対し、非負実数  $f(a)$  を割り当てる関数  $f$  で、次の条件を満たす

(1) 各弧  $a$  に対し、 $f(a) \leq \Psi(a)$

(2)  $v$  と  $w$  以外の各点において、入次数と出次数が等しい



有向グラフのvw-非連結化集合

カット(cut)

任意のネットワークにおいて、最大フローの値は最小カットの値に等しい

最大フロー-最小カット定理



# 最大フローの逐次構成法

具体的な適用例は例題35を通じて見ていく

各辺の余裕を次で定義する

$$g(e_i) = \begin{cases} \Psi(e_i) - f(e_i) & (e_i \text{が正順}) \\ f(e_i) & (e_i \text{が逆順}) \end{cases}$$

$e_i = (v_{i-1}, v_i)$ : 正順

$e_i = (v_i, v_{i-1})$ : 逆順

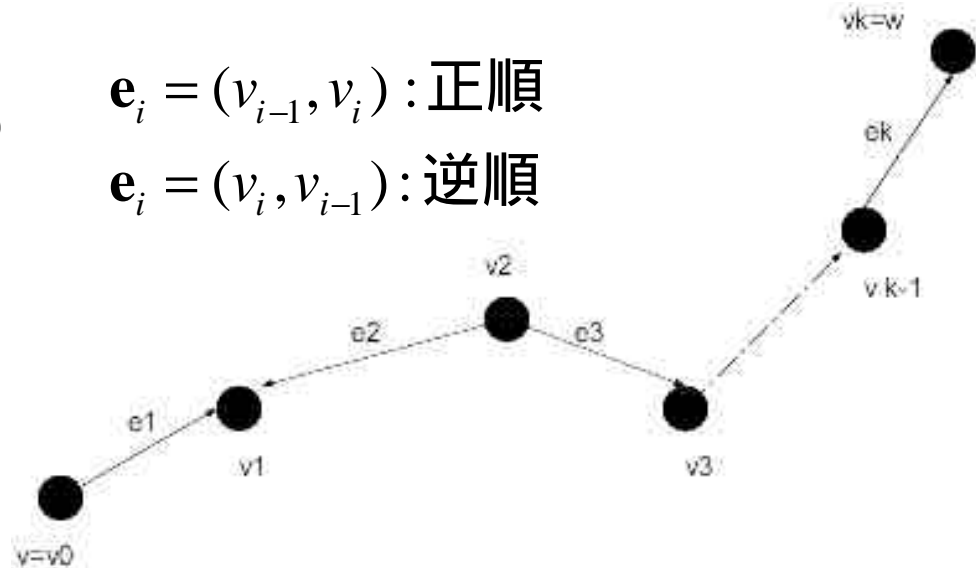
これを用いて各道 $p$ の余裕を次で求める

$$g(p) = \min_{1 \leq i \leq k} g(e_i)$$

各辺のフローを次の規則で修正する

$$f(e_i) \leftarrow f(e_i) + g(p) \quad (e_i \text{が正順})$$

$$f(e_i) \leftarrow f(e_i) - g(p) \quad (e_i \text{が逆順})$$



最大フローの逐次構成アルゴリズム

- (1) 全ての辺 $e$ に対して $f(e)=0$ とおく
- (2)  $v$ から $w$ への道 $p$ で正の余裕 $g(p)$ を持つものを探し、無ければ終了。あれば(3)へ
- (3) **修正規則**に従って現在のフロー $f$ を更新し、(2)へ