

平成 18 年度 グラフ理論 期末試験解答 (9/20 実施 解答作成：井上 純一)

各問題/小問の配点は問題用紙に記した通り。これ以外にも部分点を与える場合がある。

問題 1 (配点 10 点)

- (1) 完全グラフ K_n の任意の 1 点の次数は $n - 1$ であるから、オイラーの定理より $n - 1 =$ 偶数 の場合に限り、 K_n はオイラー・グラフとなる。よって、 $n = 2m + 1$ ($m = 1, 2, \dots$) が答え。
- (2) 点数 t, s が偶数であれば、黒、白で色分けされた 2 グループの点をそれぞれ交互に経由してもとに戻るオイラー小道を作るとは常に可能である。よって、 t, s ともに偶数 が答え。
- (3) 車輪は全ての n に対して、サイクル C_{n-1} と 1 点との結合部の次数は 3 (奇数) であるから、オイラーの定理より オイラー・グラフとはならない。

問題 2 (配点 10 点)

空グラフ $m = 0$ のときは自明であり、 $n = k$ より、 $0 \leq 0 - 0 = 0$ で成立する。辺数が $m_0 - 1$ のときに不等式の成立を仮定する。このとき、単純グラフ G から任意の辺を 1 本削除した場合、成分数、点数、辺数はどのように変化するかを考察すると

$$\text{成分数} : k \rightarrow k + 1$$

$$\text{点数} : n \rightarrow n$$

$$\text{辺数} : m_0 \rightarrow m_0 - 1$$

となるから、上の矢印の右側のそれぞれの量 $(k + 1, n, m_0 - 1)$ に関して不等式を作ると

$$m_0 - 1 \geq n - (k - 1)$$

が成立する。従って、この辺数 $m_0 - 1$ に関する不等式の成立を仮定し、これから辺数 m_0 についての不等式の成立を導けばよい。これは上不等式を書き直せば直ちに

$$m_0 \geq n - k$$

が得られ、 m_0 に関して成立。以上より、全ての m に対して $m \geq n - k$ の成立する。(証明終わり)

問題 3 (配点 10 点)

- (1) 隣接行列 A を持つグラフ G : 図 1 (左) とその全域木 (右) となる。

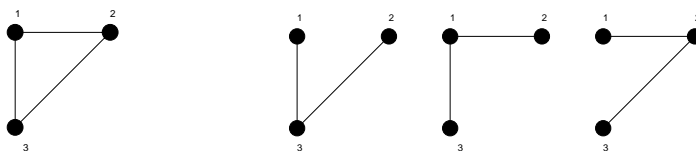


図 1: 隣接行列 A で与えられるグラフ G (左) とその 3 つの全域木 (右)。

(2) 完全グラフ K_4 の点行列 D は, その定義から

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

であり, その $i = j = 4$ での余因子が, 完全グラフ K_4 の全域木の総数 $\tau(K_4)$ を与えるので, 計算すると

$$\tau(K_4) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 24 - 4 - 4 = 16 \quad (\text{個})$$

問題 4 (配点 20 点)

(1) 4 角形に関して $G-e$, $G \setminus e$ を描くと, それぞれ図 2 のようになる.

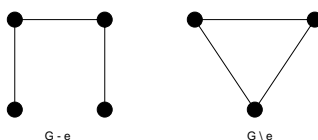


図 2: 4 角形 G に関する $G-e$ と $G \setminus e$.

(2) 問題文に与えられた関係式, 及び, (1) の結果を用いると, 次の彩色多項式が得られる.

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k$$

(3) 点数が 4 の完全グラフ K_4 から辺を 1 本ずつ削減していった場合, 彩色多項式はどのように振舞うのかを 図 3 に載せる. 辺を 1 本ずつ削除していくことにより, 彩色多項式は $k(k-1)(k-2)(k-3) \rightarrow$

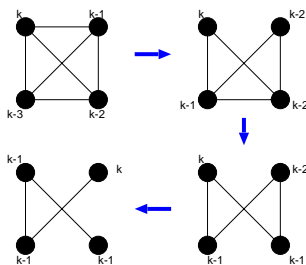


図 3: 完全グラフから辺を 1 本ずつ削除していくと最後には木が得られる.

$k(k-1)(k-2)^2 \rightarrow k(k-1)^2(k-2) \rightarrow k(k-3)^3$ のように単調に増加し, 最終的に得られるグラフは点数 4 からなる木 T_4 である. また, 完全グラフは全ての点が互いにつながっているので, 点彩色においては全ての点の色を他のどの全ての点の色とも異なる色で彩色しなければならず, 従って, 明らかに与えられた色の数 k に対し, 完全グラフの点彩色の仕方の数は連結グラフ中で最も少ない. 点数が 4 の一般の連結グラフはこの完全グラフと木の間にいるので, これらの彩色多項式の間には

$$P_{K_4}(k) \leq P_G(k) \leq P_{T_4}(k)$$

が成り立つ.