平成18年度 グラフ理論 期末試験問題 (9/20 実施　出題者：井上 純一)

※ **注意事項**：問題用紙はこの表紙を入れて 2 ページあり, **問題 1** 〜 **問題 4** の大問計 4 題である (50 点満点). 解答用紙, 計算 (下書き) 用紙は各 1 枚配布する. **解答用紙には氏名, 学科学生番号を記入し, 裏面を使う際には「裏に続く」と記入すること**. 試験開始後 30 分間は退室できない. また, 一度退室した場合には再入室できないので注意するように. どの問題から解いてもよいが, 必ず該当する問題番号を明記してから答案を作成すること. 制限時間 90 分.

『解答始め』の合図があるまで問題冊子を開かないこと

※ 解答を終え, 退室する際には必ず解答用紙を提出し, 解答例を 1 部持ち帰ること.
※ 成績分布・採点基準などは明日以降, できるだけ早い時期に講義 HP 上にて公開する. 自分自身の成績の知りたい者は 10/2 以降に情報科学研究科棟 8-13 まで来るように.

$\boxed{\textbf{問題 1}\ (\text{配点 10 点})}$ (キーワード：完全グラフ, 完全二部グラフ, 車輪, オイラー・グラフの判別)

オイラー・グラフに関して以下の問いに答えよ. 問い (1)〜(3) に答えよ.

(1) 完全グラフ K_n がオイラー・グラフとなるために点数 n が満たすべき条件を求めよ.
(2) 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{s,t}$ がオイラー・グラフとなるために, s, t が満たすべき条件を求めよ.
(3) どのような n に対して車輪 W_n はオイラー・グラフとなるか？ 理由と併せて答えよ.

$\boxed{\textbf{問題 2}\ (\text{配点 10 点})}$ (キーワード：k-成分からなる単純グラフの辺数の下限, 数学的帰納法)

グラフ G は n 個の点からなるグラフであるとする. G には成分が k 個あるとすると, G の辺数 m の下限は $n - k$ であること, すなわち, 次の不等式：

$$m \geq n - k$$

が成り立つことを辺数 m に関する数学的帰納法により示せ.

$\boxed{\textbf{問題 3}\ (\text{配点 10 点})}$ (キーワード：隣接行列, 全域木とその総数, 行列木定理)

(1) 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるグラフ G を図示し, このグラフ G の全域木を全て描け **(3 点)**.
(2) 完全グラフ K_4 の点行列を書け. また, 行列木定理より完全グラフ K_4 の全域木の総数を求めよ **(7 点)**.

$\boxed{\textbf{問題 4}\ (\text{配点 20 点})}$ (キーワード：点彩色, 彩色多項式, 辺の除去と縮約)

G を単純グラフとし, G から任意の 1 辺 e を除去して得られるグラフを G-e, 縮約して得られるグラフを G\e とすると, G の彩色多項式 $P_{\mathrm{G}}(k)$ は

$$P_{\mathrm{G}}(k) = P_{\mathrm{G-e}}(k) - P_{\mathrm{G\backslash e}}(k)$$

のように分解することができる.

(1) 4 角形 G に対して, G-e, G\e をそれぞれ図示せよ **(5 点)**.
(2) 4 角形 G の彩色多項式を k の関数として求めよ **(5 点)**.
(3) 点数 4 の一般連結グラフ G, 木 T_4, 完全グラフ K_4 の彩色多項式の間には次の不等式が成り立つことを示せ **(10 点)**.

$$P_{\mathrm{K}_4}(k) \leq P_{\mathrm{G}}(k) \leq P_{\mathrm{T}_4}(k)$$