

グラフ理論 配布資料 #3

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成 18 年 4 月 21 日

目 次

3	様々なグラフの例	23
3.1	空グラフ	23
3.2	完全グラフ	23
3.3	正則グラフ	23
3.4	閉路グラフ	24
3.5	道グラフ	24
3.6	車輪	25
3.7	ピーターズン・グラフ	25
3.8	二部グラフ	25
3.9	完全二部グラフ	26
3.10	k -立方体	26
3.11	単純グラフの補グラフ	27
4	グラフにまつわるいくつかのパズル	27
4.1	8つの円の配置問題	28
4.2	4つの立方体パズル	28

演習問題 2 の解答例

(1) 問題の二部グラフの隣接行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

となる. また, 図 26 のように各辺に番号を振ると, このグラフの接続行列 M は

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

と書ける.

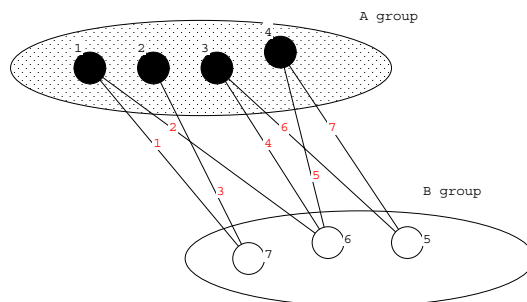


図 26: 図のように各辺に番号を振って接続行列を求める.

- (2) 図 27 に描いた完全二部グラフ $K_{3,3}$ の次数列は $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ であるから, この次数列 $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ は「グラフ的」である.

完全二部グラフ $K_{3,3}$ の描き方は解答例以外にも様々考えられる. この解答例と同形なグラフであれば正解.

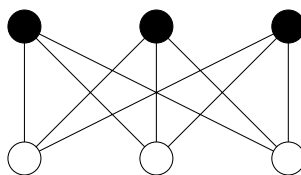


図 27: 図の完全二部グラフの次数列は $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ である.

- (3) 写像 θ, ϕ を

$$\theta(a) = 1, \theta(b) = 2, \theta(c) = 3, \theta(d) = 4 \quad (11)$$

$$\phi(\overline{ab}) = \overline{12}, \phi(\overline{ac}) = \overline{13}, \phi(\overline{ad}) = \overline{14}, \phi(\overline{bd}) = \overline{24}, \phi(\overline{cd}) = \overline{34}, \phi(\overline{bc}) = \overline{23} \quad (12)$$

とすれば, 接続関数 ψ_{G_1}, ψ_{G_2} に対して

$$\psi_{G_1}(\overline{ab}) = ab \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ab})) = \psi_{G_2}(\overline{12}) = 12 = \theta(a)\theta(b) \quad (13)$$

$$\psi_{G_1}(\overline{ac}) = ac \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ac})) = \psi_{G_2}(\overline{13}) = 13 = \theta(a)\theta(c) \quad (14)$$

$$\psi_{G_1}(\overline{ad}) = ad \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ad})) = \psi_{G_2}(\overline{14}) = 14 = \theta(a)\theta(d) \quad (15)$$

$$\psi_{G_1}(\overline{bd}) = bd \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{bd})) = \psi_{G_2}(\overline{24}) = 24 = \theta(b)\theta(d) \quad (16)$$

$$\psi_{G_1}(\overline{cd}) = cd \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{cd})) = \psi_{G_2}(\overline{34}) = 34 = \theta(c)\theta(d) \quad (17)$$

$$\psi_{G_1}(\overline{bc}) = bc \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{bc})) = \psi_{G_2}(\overline{23}) = 23 = \theta(b)\theta(c) \quad (18)$$

が成り立つ。従って、グラフ G_1, G_2 は同形である。

3 様々なグラフの例

この節では一般的にはグラフ G を論じるのではなく、様々な (特殊な) グラフを例をとって説明し、個々のグラフの特徴を見てゆくことにしよう。ここでは、後のこの講義で頻出するグラフとその性質を簡単に述べるが、具体的な応用例、及び、詳しい性質に関しては追々見て行くことになる。しかし、ここで出てくる各グラフの名前と大まかな性質を押さえておくと、後の学習がスムーズに進むであろう。

3.1 空グラフ

空グラフ (null graph) : 辺集合が空であるグラフ (「点のみからなるグラフ」あるいは「辺のないグラフ」), 数式で表現するならば, n 点からなる空グラフは N_n となる。図 28 に N_4 の例を載せる。

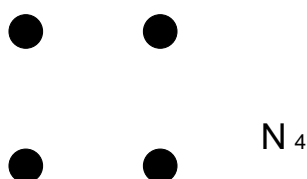


図 28: 空グラフ N_4 .

3.2 完全グラフ

完全グラフ (complete graph) : 相異なる 2 つの点が全て隣接している単純グラフ (ループや多重辺を含まないグラフ).

(難しく言うと) $\Rightarrow \forall v, v' \in V(G), v \neq v'$ に対し, v, v' を両端とする辺が唯一 1 個存在するグラフ.

式では n 個の点からなる完全グラフは K_n と表現される.

n 個の点からなる完全グラフ K_n の辺の総数は, $1, 2, \dots, n$ 個の点の中から任意に 2 点選んで結ぶ場合の数, すなわち, ${}_nC_2 = n(n-1)/2$ 個である。図の例で言うと, $n=4$ の場合には 6 本, $n=5$ の場合には 10 本であり, これは図 29 より直ちに確認できる。

3.3 正則グラフ

r -正則グラフ (regular graph) : 全ての $v \in V(G)$ に対して, $\text{dev}(v) = r$ であるグラフ。平たく言うと, どの点の次数も全て共通に r であるグラフ。

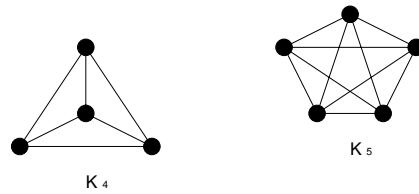


図 29: 完全グラフ K_4 及び K_5 .

(注)：正則グラフという観点からは, N_n は 0-正則グラフ, C_n は 2-正則グラフ, K_n は $(n-1)$ -正則グラフということになる.

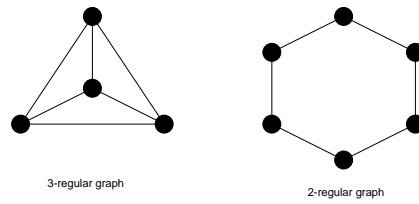


図 30: 次数 3 の正則グラフ (左), 及び, 次数 2 の正則グラフ (右) の例.

3.4 閉路グラフ

閉路グラフ (cycle graph)：次数 2 の正則連結グラフ. 式では C_n のように表記される.

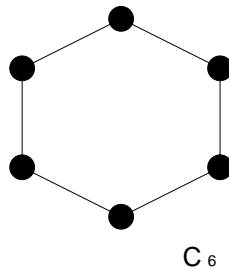


図 31: 閉路グラフ C_6 .

3.5 道グラフ

道グラフ (path graph)：閉路グラフ C_n から一つの辺を除いて得られるグラフ. 式で表現すると P_n となる.

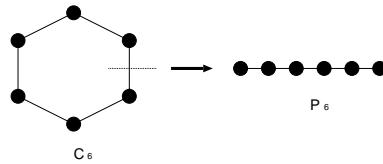


図 32: 閉路グラフ C_6 から次数 6 の道グラフ P_6 を作成する過程.

3.6 車輪

車輪 (wheel) : C_{n-1} に新しい点 v を一つ加え, v と他の全ての点とを辺 (「スポーク」と呼ばれる) で結んでできるグラフ. 式で表記すると W_n となる.

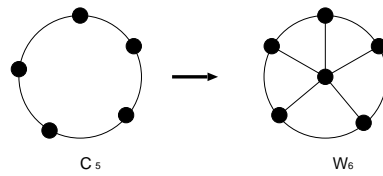


図 33: 閉路グラフ C_5 から次数 6 の車輪 W_6 を作成する過程.

3.7 ピーターソン・グラフ

ピーターソン・グラフ (Petersen graph) は図のような特殊な形状を持つグラフであるが, 今後の演習問題等でしばしば現れることになる¹.

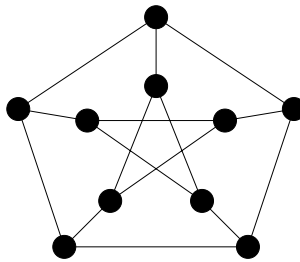


図 34: ピーターソン・グラフ.

3.8 二部グラフ

二部グラフ (bipartite graph) : グラフ G の点集合を 2 つの素な集合 A, B に分割し, G の全ての辺は A の点と B の点を結ぶようにできたとする. このとき, グラフ G は二部グラフであるという.

¹ Petersen graph は教科書では「ピーターソン・グラフ」と発音, 日本語表記されているが, 他の専門書では「ペテルセン・グラフ」と発音, 日本語表記されているものが多い (むしろ, こちらの方が多数派である)

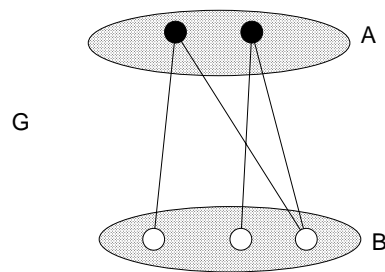


図 35: 二部グラフ G の例. 全ての辺の端点は黒丸と白丸のペアでなくてはならない.

3.9 完全二部グラフ

完全二部グラフ (complete bipartite graph) : A の各点が B の各点とちょうど 1 本の辺で結ばれている二部グラフ.

図のように点を黒丸と白丸で 2 つの集合に分けたとき, 黒の点 r 個, 白の点 s 個からなる完全二部グラフは $K_{r,s}$ と表記される.

当然であるが, $K_{r,s}$ には $(r + s)$ 個の点と rs 本の辺がある.

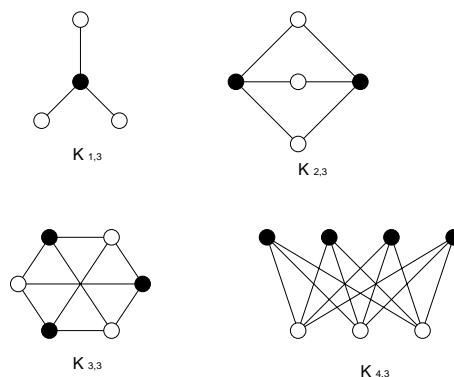


図 36: 完全二部グラフ $K_{1,3}, K_{2,3}, K_{3,3}, K_{4,3}$.

3.10 k -立方体

k -立方体 (k -cube) : $a_i = 0$ or 1 であるような 1 つの列 (ベクトル) (a_1, a_2, \dots, a_k) に一つの点を対応させ, 一つだけ異なる成分 a_i を持つ二つのベクトルに対応する二つの点が辺で結ばれるような正則二部グラフ. 式で表記すると Q_k となる.

$\Rightarrow Q_k$ は 2^k 個の点と, $k2^{k-1}$ 本の辺² を持つ.

² $(0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots$ の各ベクトルの k 成分のうちのどの成分が食い違うかという場合 k 通り, 残りの $k - 1$ 成分の並び替え 2^{k-1} 通りの積で $k2^{k-1}$ 本の辺の数となる.

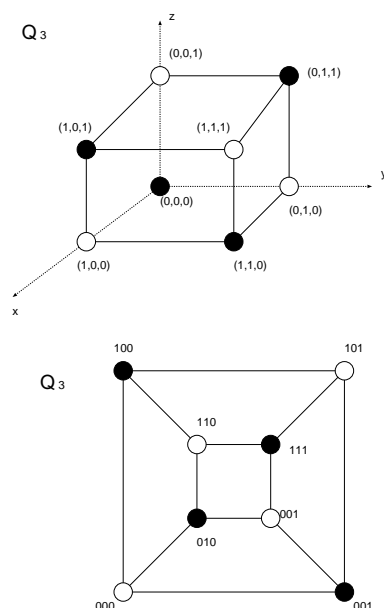


図 37: 3-立方体. 図の G_1 及び G_2 は同形である.

3.11 単純グラフの補グラフ

単純グラフの補グラフ (complement) : 単純グラフ G の補グラフ \overline{G} とは, 点集合 $V(G)$ を持ち, \overline{G} の 2 点が隣接するのは G におけるそれらの 2 点が隣接していないとき, かつ, そのときに限るような単純グラフを言う.

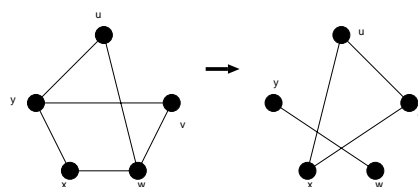


図 38: 単純グラフから, その補グラフを作成する過程.

- 完全グラフの補グラフは空グラフである. (ただし, 逆は言えない).
- 完全二部グラフの補グラフは 2 つの完全グラフの和である.

4 グラフにまつわるいくつかのパズル

ここでは, グラフを用いて効率的に解くことができる 2 つのパズルを紹介しよう.

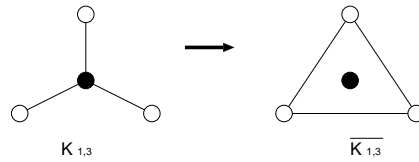


図 39: 完全二部グラフ $K_{1,3}$ とその補グラフ.

4.1 8 つの円の配置問題

図 40 のような 8 つの円の中に A, B, C, D, E, F, G, H の 8 つの文字を入れることを考える. ただし, アルファベット順で隣にくる文字は互いに隣接しないように置く. このとき, このとき, 適切な配置の仕方を答えよ. ちなみに, 可能な配置の総数は $8! = 46320$ 通りであるから, 全ての場合をしらみつぶしに試してみる戦略は適切ではないことに注意しよう. (着眼点):

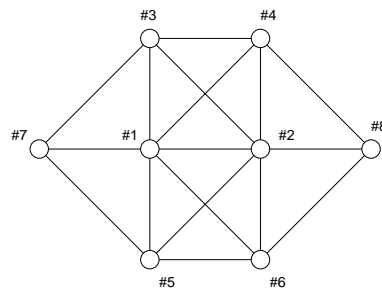


図 40: 8 つの円の配置問題の図.

- A と H の配置の仕方は易しい (片側にしか相手がいないから).
- 図の #1, #2 の円への配置が最も難しい (次数が最大だから).

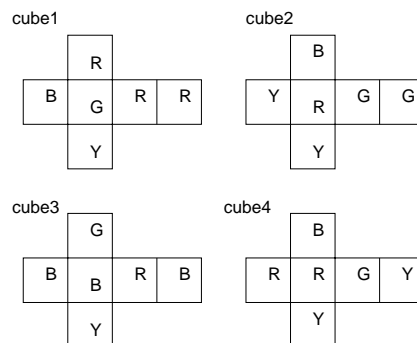
(解答):

1. 最も次数が多く難しい, #1, #2 にそれぞれ A, B を配置する.
2. アルファベットで A, H の隣にくる B 及び G をそれぞれ #8, #7 にそれぞれ配置する.
3. 残りの文字をそれぞれがアルファベットで隣り合わないよう配置する. 例えば, #3 = C, #4 = E, #5 = D, #6 = F のように配置すればよい.

4.2 4 つの立方体パズル

(問題)

図のような立方体の展開図: cube1, cube2, cube3, cube4



から立方体を作り、それらを積み上げて、四角柱を作り、四角柱の4つの側面それぞれに4色全てが表れるような四角柱の積み上げ方を見つけたい。

以下の問い(1)～(3)に答え、このような配置を求めよ。

- (1) 各立方体を4点からなるグラフで表し、R, B, G, Yの各点は各色に対応させ、平行な面に塗られた色に対応する点は辺で結ぶ。このようにして出来上がるグラフを cube1, cube2, cube3, cube4 に対して描け。
- (2) (1) で求めたグラフを重ね合わせたグラフ G を描け。
- (3) G の部分グラフ H_1, H_2 を見つけ出し、立方体：cube1, cube2, cube3, cube4 を積み上げて、四角柱を作り、四角柱を作ったとき、その四角柱の4つの長方形の側面にそれぞれ4色全部が現れるような積み上げ方を示せ。

(解答)

- (1) まず、cube1, cube2, cube3, cube4 に相当するグラフはそれぞれ図 41 のようになる。

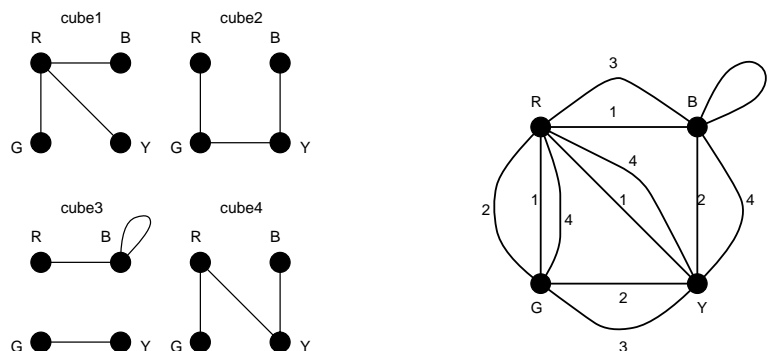


図 41: cube1, cube2, cube3, cube4 にそれぞれ相当するグラフ (左), 及び、それぞれのグラフを重ね合わせることで得られるグラフ G (右)。

- (2) (1) で得られたグラフを重ね合わせると、図 41(右) の G が得られる。
- (3) 各 cube の辺をちょうど1本ずつ含み、共通な辺が無く、次数2の正則グラフとしてのグラフ G の部分グラフ H_1, H_2 を選ぶと、図 42 のようになる。これらの部分グラフ $H_1 (FB), H_2 (LR)$ を用いて、cube1, cube2, cube3, cube4 を積み上げると図 42(右) のようになる。これが答えである。

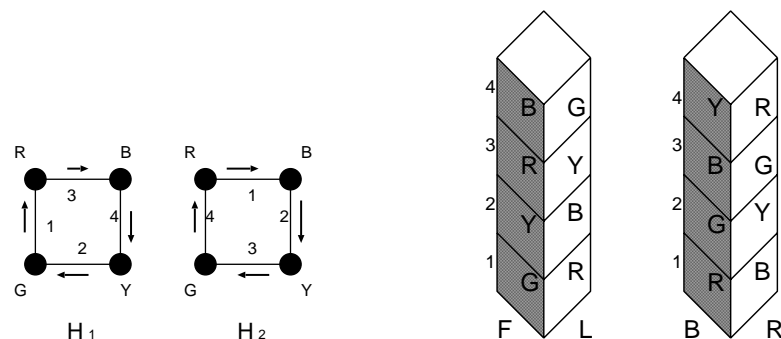
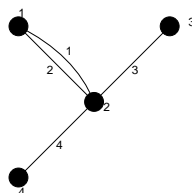


図 42: 求める G の部分グラフ H_1, H_2 (左), 及び, 求める立方体の積み上げ方 (右).

例題 3.1

図に載せるグラフ G に関して以下の問いに答えよ.



- (1) グラフ G の接続行列を求めよ.
- (2) 接続行列の各列の要素の和は何を意味しているか?
- (3) 接続行列の各行の要素の和は何を意味しているか?
- (4) $\epsilon(G)$ をグラフ G の辺数とすると

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2\epsilon(G)$$

が成り立つことを示せ.

(解答例)

- (1) 定義に従って, 問題に与えられたグラフの接続行列 M を書き下すと

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のようになる.

- (2) 例えば, 上記の接続行列の第 1 行目を見てみると, 第 1, 2 列に 1 が立っている. これは点 1, 2 が辺 1 で結ばれていることを表している. 接続行列の定義から, 各列は辺の番号を表し, 各列に 1 が立っている行が該当する辺に接続する点を表しており, 1 つの辺に接続できる点の数は常に 2 つであるから, 接続行列の各列の成分の和は常に 2 であるといえることができる.
- (3) 接続行列の定義から, 各行の成分の和は各点の次数の和を表す.

- (4) (2)(3) の考察より, 次数の和 $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ 接続行列の各行の成分和を全ての行に対して計算したものに等しく, これは接続行列の全ての成分を足したものである. 一方, 接続行列の各列の要素の和は常に 2 であり, 従って, 接続行列の全ての成分の総和は, 辺の数の 2 倍すなわち $2\epsilon(G)$ であり, 結局

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2\epsilon(G)$$

が成り立つ.

例題 3.2

図 29 に載せた完全グラフ K_5 について以下の問いに答えよ.

- (1) 図 29 の完全グラフ K_5 の 5 つの頂点に, 時計回りに番号 $1, \dots, 5$ を割り当てる. このとき, この完全グラフの隣接行列 A を求めよ.
- (2) 点 1 と点 3 を結ぶ長さ 2 の歩道の数, A^2 の第 $(1, 3)$ -成分に等しいことを示せ.
- (3) 点 1 と点 3 を結ぶ長さ 3 の歩道の数, A^3 の第 $(1, 3)$ -成分に等しいことを示せ.
- (4) 一般に, 隣接行列 A を持つ単純グラフ G の 2 点 i, j を結ぶ長さ K の歩道の数, A^K の第 (i, j) -成分に等しいことを示せ.

(解答例)

- (1) 完全グラフ K_5 の隣接行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のように対角成分がゼロであり, 非対角成分に 1 が並んだ行列となる.

- (2) まず, 図の完全グラフ K_5 から考察してみると, 点 1 と 3 を結ぶ長さ 2 の歩道は

$$[1] \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

$$[2] \quad 1 \rightarrow 5 \rightarrow 3$$

$$[3] \quad 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$$

の 3 つである.

一方, 隣接行列の自乗を計算してみると

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

となり, これから直ちに A^2 の第 $(1, 3)$ -成分は 3 であることがわかる. 従って, 題意が示せた.

- (3) (2) と同様に, 少し面倒であるが, まずは問題の完全グラフから点 1, 3 を結ぶ長さ 3 の歩道を数え上げてみると

$$[1] \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$$

- [2] $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \mathbf{3}$
- [3] $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow \mathbf{3}$
- [4] $1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow \mathbf{3}$
- [5] $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow \mathbf{3}$
- [6] $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow \mathbf{3}$
- [7] $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow \mathbf{3}$
- [8] $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \mathbf{3}$
- [9] $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow \mathbf{3}$
- [10] $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow \mathbf{3}$
- [11] $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow \mathbf{3}$
- [12] $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow \mathbf{3}$
- [13] $1 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow \mathbf{3}$

のようになり, 計 13 通り存在する.
一方, A^3 を計算すると

$$A^3 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 12 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 12 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

となり, この第 (1, 3)-成分は 13 となり, 題意が示された.

- (4) 一般に n 点からなる単純グラフの隣接行列の K 乗, つまり, A^K の第 (i, j) -成分は

$$[A^K]_{ij} = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \cdots \sum_{k_K=1}^n a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 k_3} \cdots a_{k_{K-1} k_K} a_{k_K j}$$

であり, a_{ik_1} は点 i と k_1 を結ぶ道の数であることから, 上記の $[A^K]_{ij}$ は点 i, j を結ぶ道の数に等しいことがわかる.

例題 3.3

完全三部グラフ $K_{r,s,t}$ はそれぞれに属する点の個数が r, s, t である 3 つの点集合からなり, 異なる集合に属する点は全て辺で結ばれているグラフである. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $K_{2,2,2}$ 及び $K_{3,3,2}$ を描け.
- (2) $K_{r,s,t}$ には全部で何本の辺があるか答えよ.

(解答例)

- (1) 完全三部グラフ $K_{2,2,2}$ を描くと図 43 のようになる ($K_{3,3,2}$ も同様に作図できるが, ここでは省略.).

- (2) $K_{r,s,t}$ の辺の本数は $rs + rt + st$ 本である.

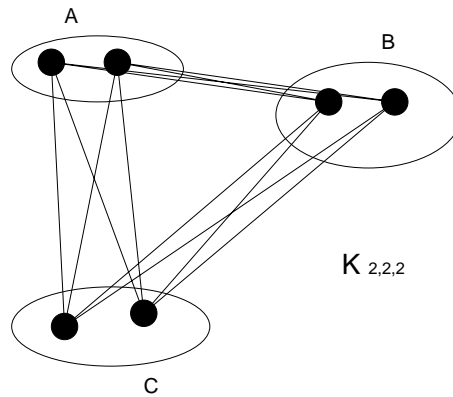


図 43: 完全 3 部グラフ $K_{2,2,2}$ の作図例. $K_{3,3,2}$ も同様に作図できるが, ここでは省略.

例題 3.4

1. 次の (i) ~ (v) のグラフがある場合にはそれを 1 つ挙げて描け (無い場合には「無し」と書く).
 - (i) 次数 5 の正則グラフであるような二部グラフ.
 - (ii) 二部グラフであるプラトン・グラフ.
 - (iii) 車輪である完全グラフ.
 - (iv) 11 個の点をもつ 3 次グラフ.
 - (v) 次数 4 の正則グラフで $K_5, K_{4,4}, Q_4$ 以外のグラフ.
2. それ自身の補グラフと同形な単純グラフは自己補対 (self-complementary) であるという. このとき
 - (1) 4 個, または 5 個の点をもつ自己補対グラフを全て描け.
 - (2) 8 個の点からなる自己補対グラフを見つけよ.

(解答例)

- 1.(i) 次数 5 の正則グラフである二部グラフは図 44 のような完全二部グラフ $K_{5,5}$ が挙げられる.

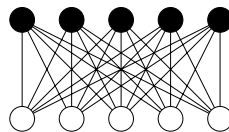


図 44: 次数 5 の正則グラフである二部グラフの例.

- (ii) 二部グラフであるプラトングラフとしては, 図 45 のような立方体が挙げられる.
- (iii) 車輪である完全グラフは図 46 である.
- (iv) まずは, 図 47 に点数が $n = 4, 6, 8, 10, 12$ の場合の 3 次の正則グラフの例を載せる. ここで問われて

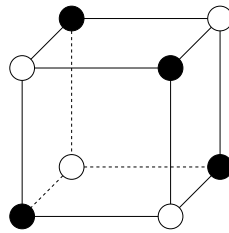


図 45: 二部グラフであるプラトングラフの一例.

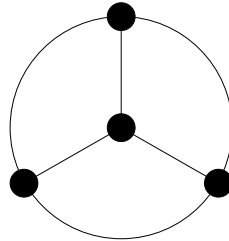


図 46: 車輪である完全グラフ.

いる問題は自然数列 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (3, 3, \dots, 3)$ がグラフ的であるかどうか, を $n = 11$ の場合に確かめ, グラフ的である場合には具体的にその図を描け, と言い直すことができる. この場合, 握手捕題から, 点数 n , 次数 3 のグラフの辺数 m は

$$m = \frac{3n}{2} \quad (19)$$

である. ここで, これを図で確認してみると, 確かに成立していることがわかる. 辺の数は必ず整数でなければならないので, この式が成り立つためには n は偶数でなければならない. 従って, $n = 11$ の場合には全ての点の次数が 3 であるような正則グラフは描けないことが結論づけられる.

(v) 次数 4 の正則グラフで $K_5, K_{4,4}, Q_4$ 以外のグラフとしては図 48 のような正 8 面体が挙げられる.

2.

(1) まず, その補グラフが自己補対であることから, そのグラフおよび対応する補グラフの和 (グラフを 2 つ重ね合わせたもの) が完全グラフとなることに着目する. すると, 点数が n である完全グラフの辺数 m が $m = n(n-1)/2$ であるから, 求めるグラフの辺数はこの半分, すなわち, $n(n-1)/4$ であることが必要である. 従って, 辺数は整数でなければならないので, 求めるグラフの点数 n は k を整数として, $n = 4k$ あるいは $n-1 = 4k$ でなければならない, すなわち, 求めるグラフが自己補対であるためには, 点の数 n が $n = 4k$ か $n = 4k+1$ であることが必要である. $k = 1$ とした場合, $n = 4$ または $n = 5$ となるが, このときの自己補対グラフを具体的に求めよ, というのがここでの問題である. そこで, まず $n = 4$ の場合について考えてみると, 各点の次数は孤立点が生じてはならないわけであるから, 1, 2 に限られることに注意する. 次数 1 の点の個数を L , 次数 2 の点の個数を M とすれば, 正の整数 L, M は次の等式を見なければならぬ.

$$L + 2M = 6 \quad (20)$$

$$L + M = 4 \quad (21)$$

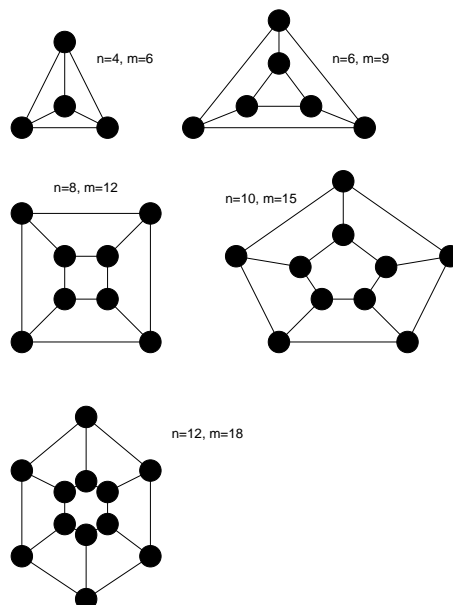


図 47: 点の数が $n = 4, 6, 8, 10, 12$ の場合の正則グラフ. ちなみに, $n = 10$ の場合には前に見た「ピータースン・グラフ」も当てはまる. この辺数は $m = 15$ である.

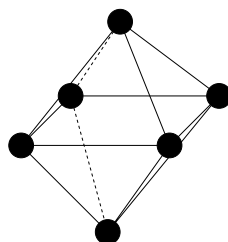


図 48: 次数 4 の正則グラフである正 8 面体.

これを満たす組み合わせとしては $(L, M) = (2, 2)$ であり, 求める自己補対であるグラフの次数列は $(1, 1, 2, 2)$ のみであることがわかる. これを満たすグラフとしては図 49 の左図実線が挙げられる (これのみ).

同様にして, $n = 5$ の場合に対し, 各点の次数は 1, 2 または 3 であるから, このそれぞれの次数を持つ点の数を L, M 及び N とすれば, 次の等式:

$$L + 2M + 3N = 10 \quad (22)$$

$$L + M + N = 5 \quad (23)$$

が成り立つ. これを満たす解は $(M, L, N) = (1, 3, 1), (2, 1, 2)$ の 2 つであるので, 可能な自己補対グラフの次数列としては $(3, 2, 2, 2, 1)$ あるいは $(3, 3, 2, 1, 1)$ であるが, 前者では自己補対グラフは実際には描けず, 後者に関しては図 49 の右図実線 (これのみ) が対応する. 補足コメント

$n = 5$ の場合に自己補対グラフを求める問題で, 次数 1, 2, 3 の点の個数を L, M, N としたとき

$$L + 2M + N = 10 \quad (24)$$

$$L + M + N = 5 \quad (25)$$

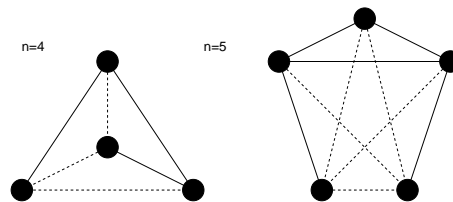


図 49: 点の数が 4, または 5 であるような自己補対グラフ. 点線で描かれたグラフがそれぞれの補グラフを表す.

として, 可能な次数列を $L, M, N \geq 1$ の範囲内で探しましたが, L, M, N はゼロも取りうるので, この範囲内で探せば, $M = 5, L = N = 0$ も上記方程式を満たします. このときの次数列は $(2, 2, 2, 2, 2)$ となり, 可能な自己補対グラフとして図 50 のようなものも存在することになります.

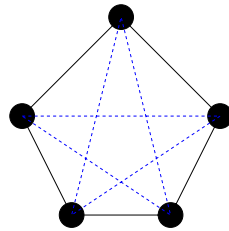


図 50: $n = 5$ の場合の自己補対グラフのもう一つの可能性. 図の実線と破線がそれぞれ互いに同形となっている.

- (2) 前に得た必要条件の式で $k = 2$ と置くと $n = 8$ が得られるので, 8 点からなる自己補対グラフを一つ見つけよう. この際, 次のようなアルゴリズム (I)-(IV) を用いて所望のグラフを見つけることにしよう.

(I) 図 51 のように 8 個の点, $1, \dots, 8$ を時計回りに並べる.

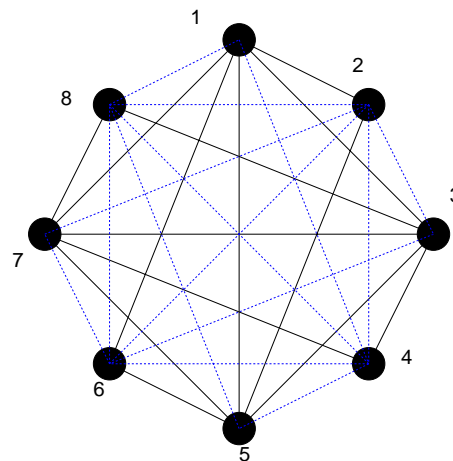


図 51: ここで得られる自己補対グラフ (実線) とその同形グラフ (破線). 自己補対の定義より, 実線と破線を足したものが 8 次の完全グラフ K_8 となることに注意.

- (II) 8 個の点の中で奇数番目の点 $(1, 3, 5, 7)$ に関して完全グラフを作る (自分以外の点全てと各々 1 本の辺で結ばれる).
- (III) 奇数番目の点のそれぞれと, その点に 1 を加えた偶数番目の点 (例えば, 点 1 ならば点 2, 点 3 ならば点 4) を結ぶ. この時点で辺の数は 10 であり, 8 個の点が全てつながった連結グラフが出来上がる. 従って, 自己補対グラフを作るためにはあと $14 - 10 = 4$ 本の辺を付け足せばよい.

(IV) 最後のステップとして, 偶数番目の各点と, その点の番号プラス 3 に相当する番号の点を結ぶ (点 2 と点 5 を, 点 8 は $8 + 3 = 11$ であるが, $11 - 8 = 2$ であるから, 点 8 と点 2 を結ぶことと約束する). この操作 (I)-(IV) で計 14 本の辺からなるグラフができるが, その作り方から明らかに, これ (図 51 の実線) と奇数番目の点の持つ役割と偶数番目の点の持つ役割を交換してでき上がるグラフ (図 51 の破線図) は互いに同形なので (お互いを足すと完全グラフができ上がる), これらのグラフ (図 51 の実線, 破線) が互いに自己補対となることは明らかである.

演習問題 3

図 52 のような展開図を持つ 4 つの立方体の問題には解が無いことを示せ.

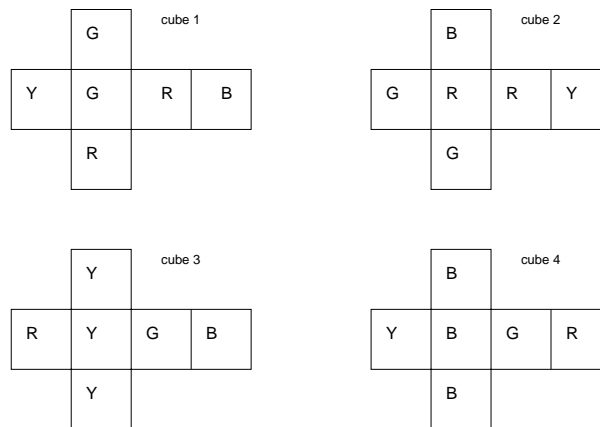


図 52: ここで問題にする 4 つの立方体の展開図.

連絡：今回のレポートの〆切は少し早いですが 4 月 24 日の講義開始時です.