グラフ理論　#4

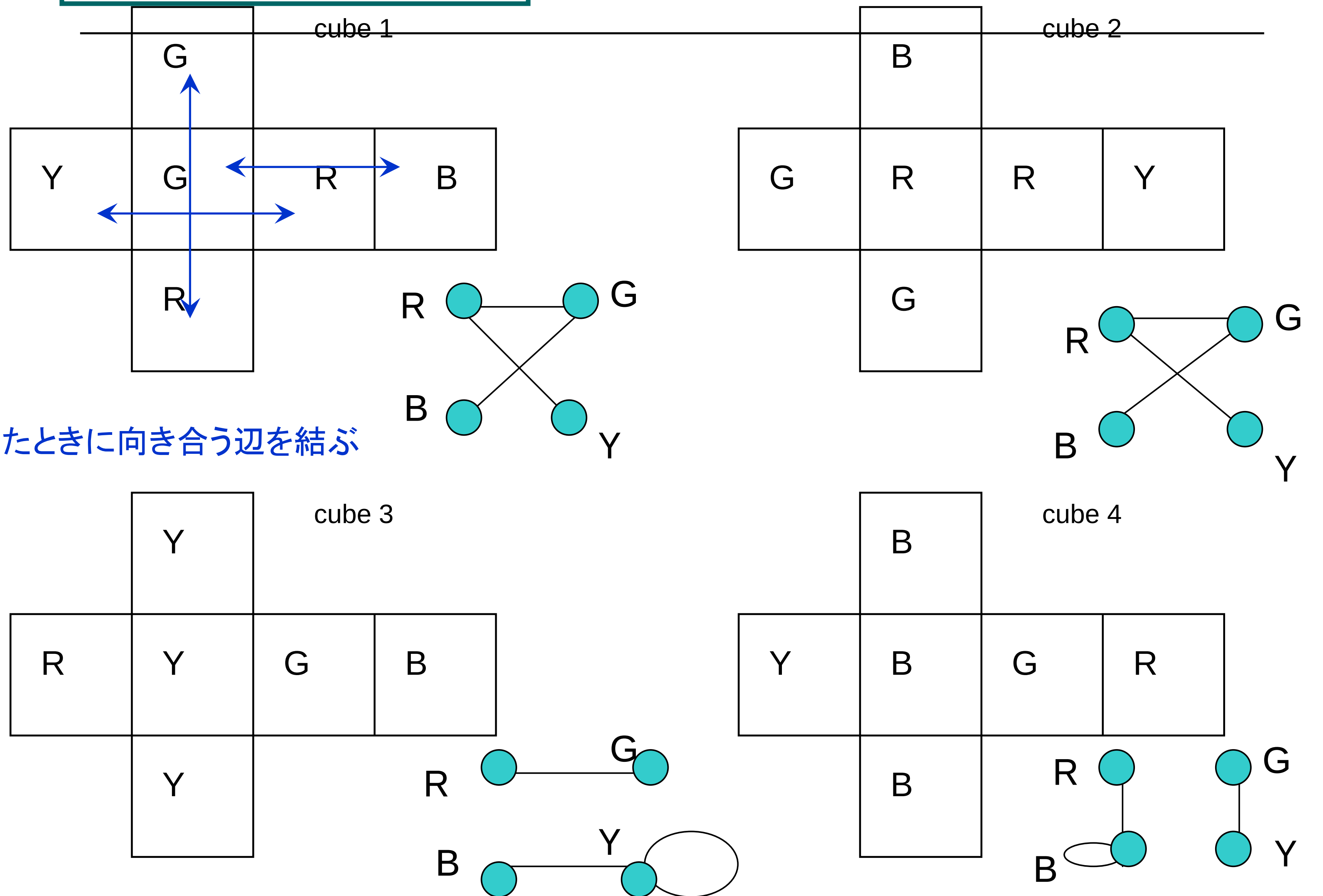
第4回講義　4月24日

――― 道と閉路 ―――

情報科学研究科　　井上純一

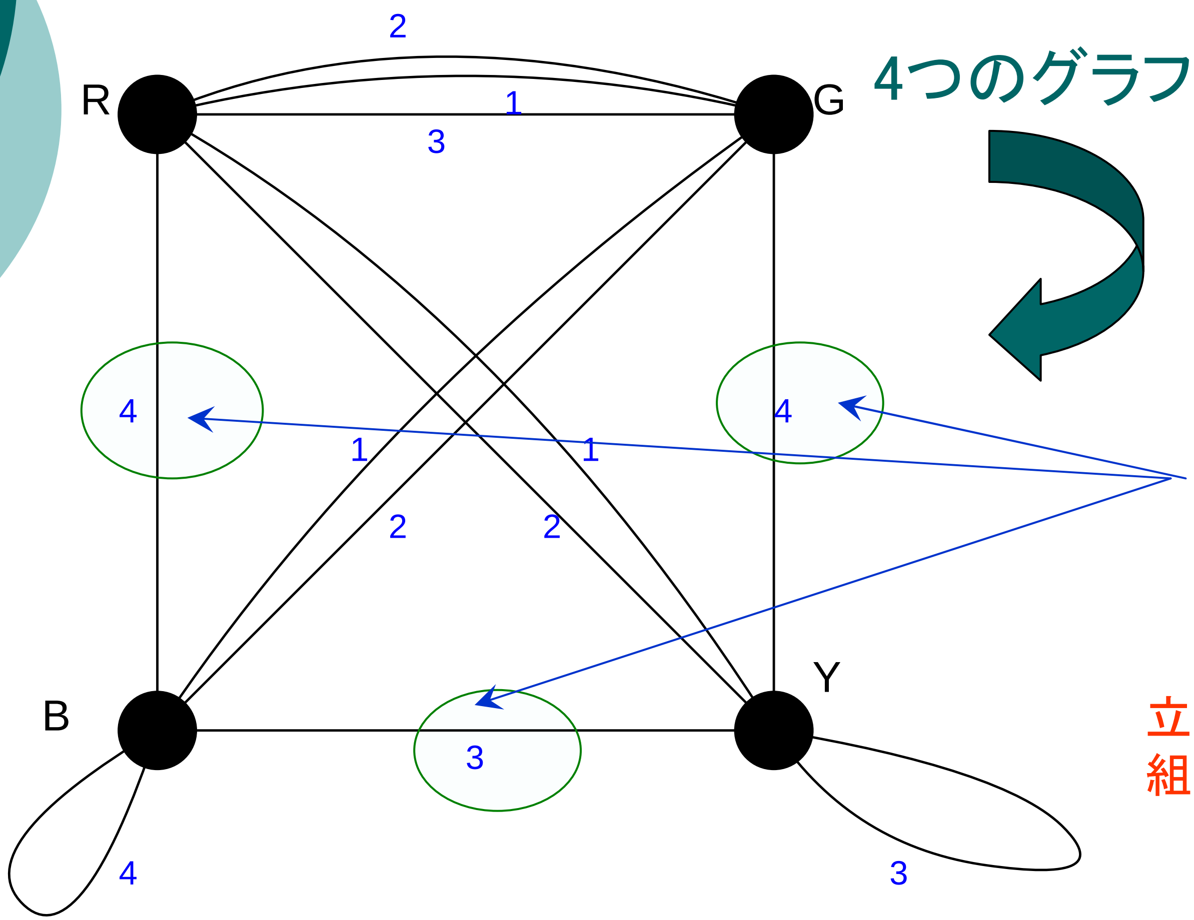
http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題3の解答例



組み立てたときに向き合う辺を結ぶ

演習問題3の解答例 #2



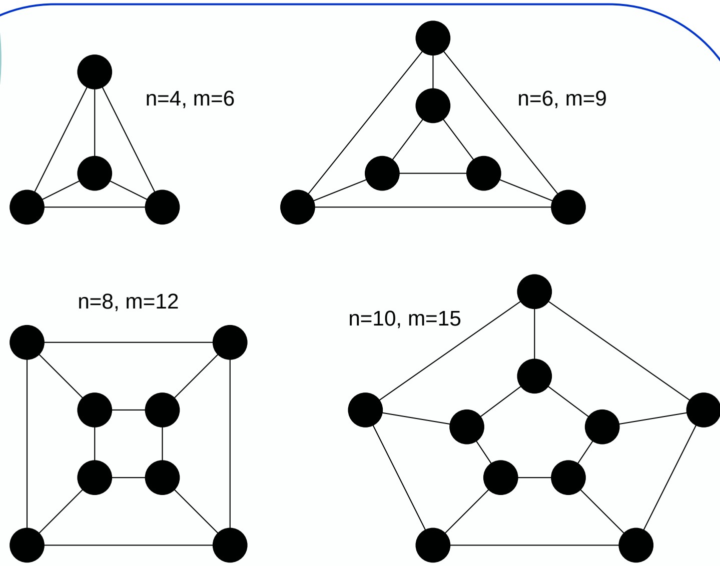
4つのグラフを合わせると

候補が一つしかないので
次数2の正則グラフ
を2つ作ることはできない

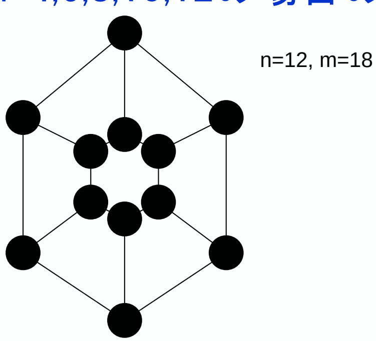
立方体を題意のように
組み立てることはできない

例題3.4の1.

（iv）11個の点を持つ正則グラフはあるか？



※ n=4,6,8,10,12の場合の3次グラフはある



次数列（3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3）はグラフ的か？

握手補題より

$$\underbrace{m}_{\text{辺数}} = \frac{3n}{2}$$

点数nは偶数でなければならないので
n=11の場合には不可能

例題3.4の2.(1)

問題となるグラフとその補グラフの和は完全グラフとなるべきである

問題のグラフの辺数は

$$m = \frac{n(n-2)}{4}$$

$$\therefore n = 4k,\ \ 4k+1$$

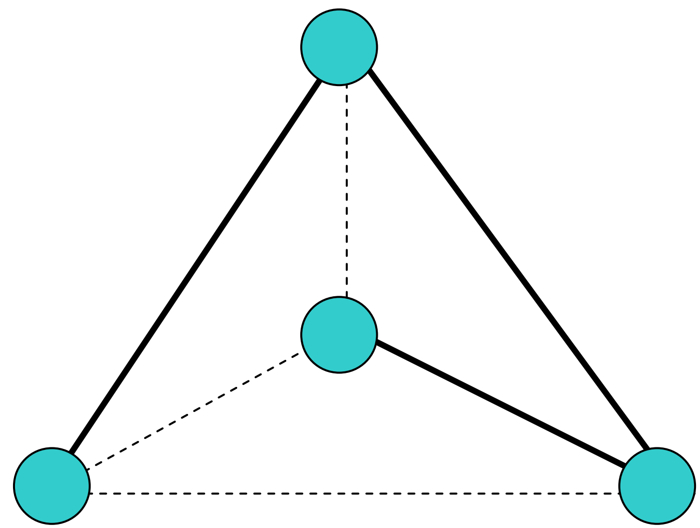
（辺数は整数でなくてはいけない）

k＝1のとき，n＝4

$$\underbrace{L}_{\text{次数1の点数}} + 2\underbrace{M}_{\text{次数2の点数}} = 6$$

$$L + M = 4$$

この解は　$(L, M) = (2, 2)$



破線と実線のグラフがそれぞれ自己補対

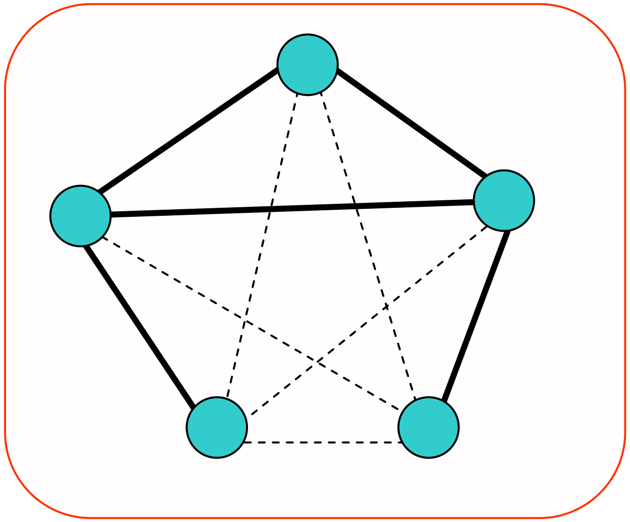
例題3.4の2.(1) #2

k=1, n=4k+1=5の場合には

$$L+2M+\underline{N}=10$$

次数3の点数

$$L+M+N=5$$



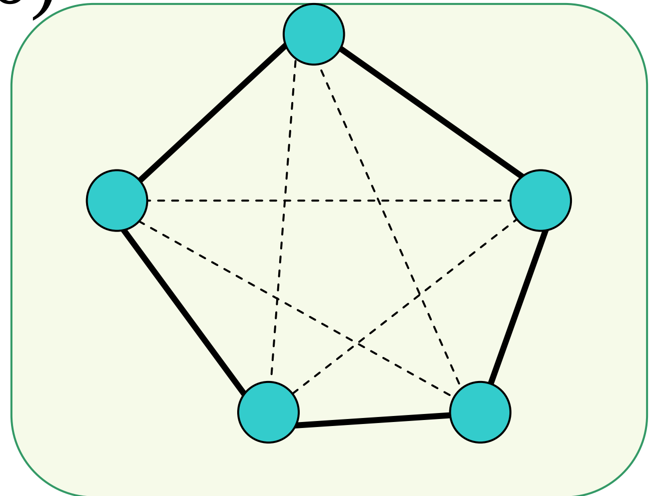
その解は

$$(L,M,N)=(1,3,1),(2,1,2),(0,5,0)$$

対応する次数列は

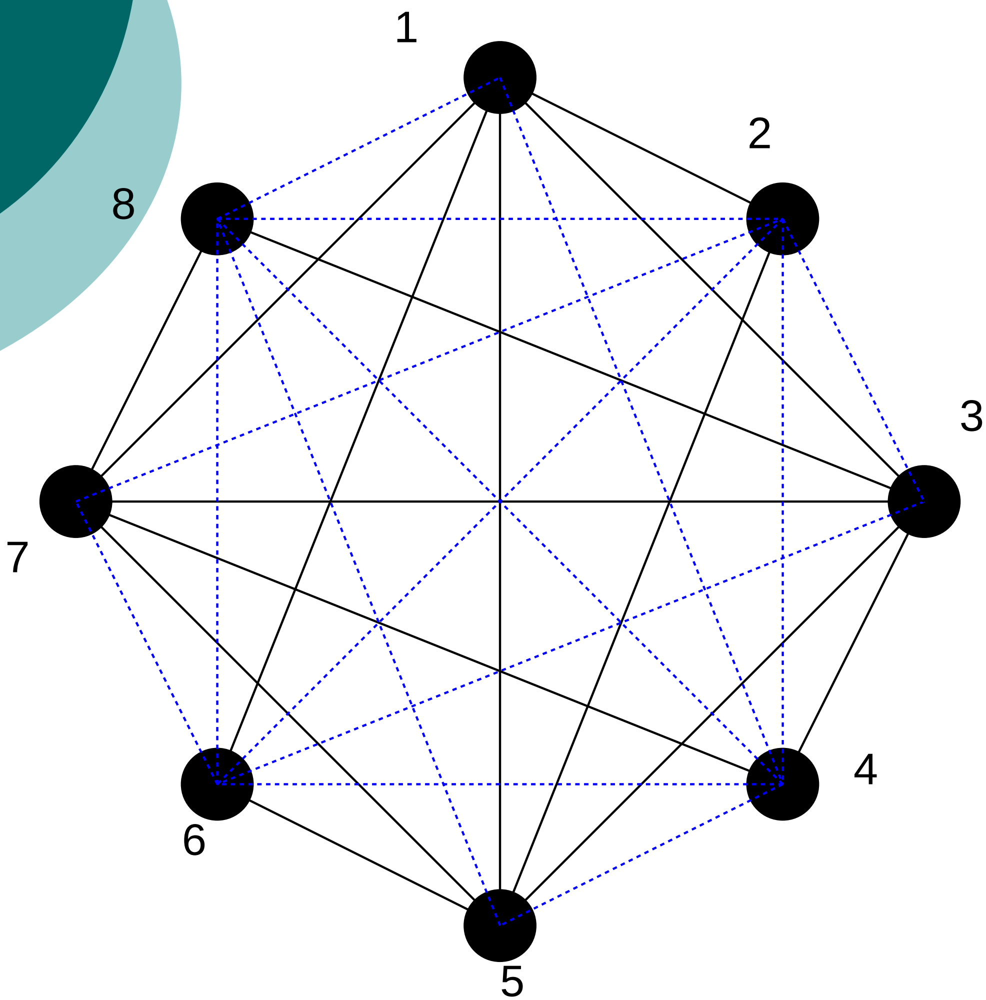
(3,2,2,2,1), $\boxed{(3,3,2,1,1)}$, $\boxed{(2,2,2,2,2)}$

これは
描けない



例題3.4の2.(2)

k=2, n = 4k=8 の自己補対グラフの例



(1) 8個の点を時計回りに並べる

(2) 8個の点のうち奇数番の点に
関して完全グラフを作る

(3) 奇数番目の点とその点の番号+1
番目の点どうしを結ぶ

(4) 偶数番目の点とその点+3番目の
点を結ぶ

自己補対グラフの探し方

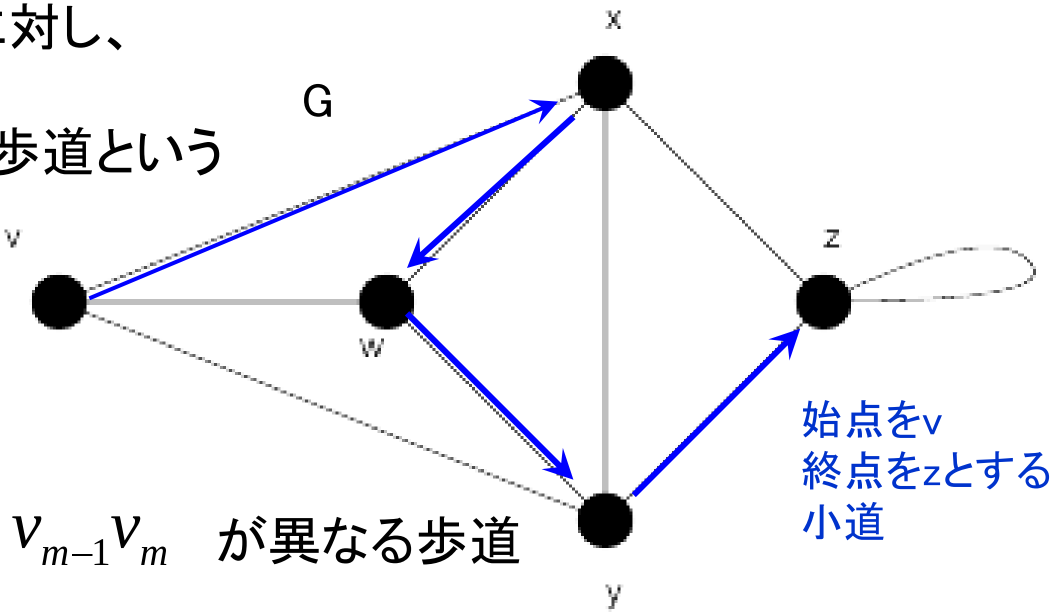
歩道・小道・道・閉路

歩道： $v_i(i=1,..,m)\in G$ に対し、

$v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{m-1}v_m$ を歩道という

始点　終点

（※重複する辺があってもよい）



小道： 全ての辺 $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{m-1}v_m$ が異なる歩道

道： 点 $v_0, v_1, \ldots, v_m$ が全て異なる歩道

閉路： 少なくとも1本辺を持つ閉じた道

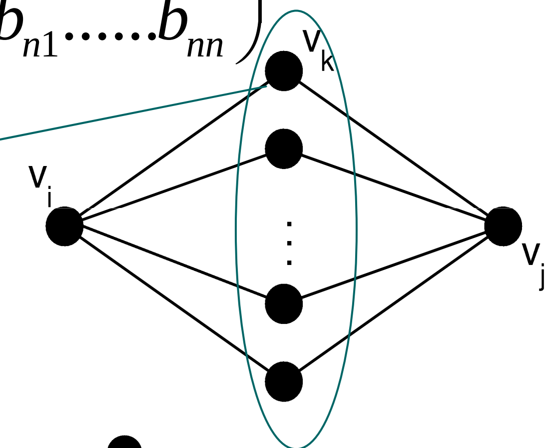
例題4.1　#1

連結単純グラフ$G:\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, m本の辺, t個の三角形

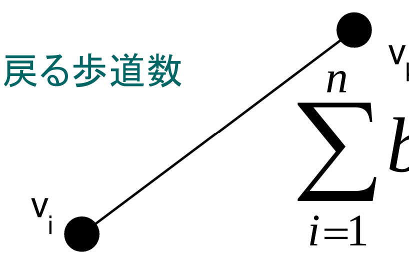
(1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots\dots a_{1n} \\ \dots\dots \;\; \dots\dots \;\; \dots\dots \\ a_{n1} \dots\dots a_{nn} \end{pmatrix}$ と置くと、この2乗は $A^2 = \begin{pmatrix} b_{11} \dots\dots b_{1n} \\ \dots\dots \;\; \dots\dots \;\; \dots\dots \\ b_{n1} \dots\dots b_{nn} \end{pmatrix} = B$

第 ij 要素： $b_{ij} = \underline{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}}$ → 点vi から点vkを経由してvjに至る長さ2の歩道の数

経由点vkに関する全ての可能性について足しあげたものはvi とvj間の歩道の総数に等しい



(2) $b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ki}$ → Viからvkを経由してviに戻る歩道数
Viとvkを結ぶ辺の2倍



$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ はGの総辺数の2倍

例題4.1　#2

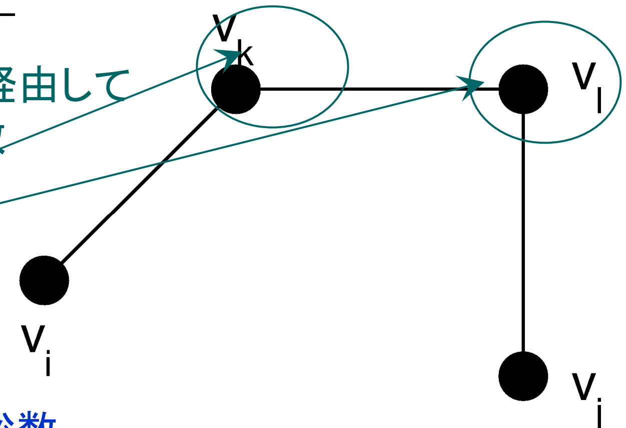
(3)

$$A^3 = \begin{pmatrix} c_{11}\cdots\cdots c_{1n} \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ c_{n1}\cdots\cdots c_{nn} \end{pmatrix} = C$$

点viから点vkとvlを経由して
点vjへ至る辺の本数

$$\underline{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}a_{kl}a_{lj}}$$

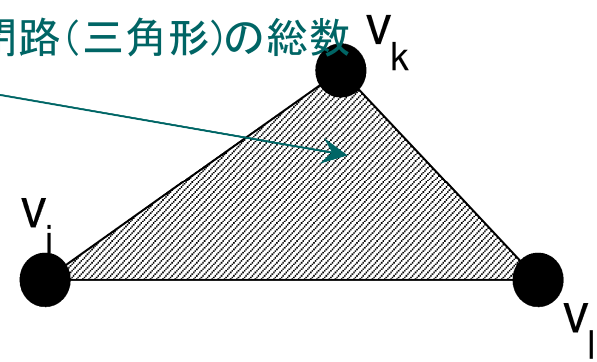
点viから点vjへ至る歩道の総数



対角要素：

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}a_{kl}a_{li}$$

このような閉路(三角形)の総数



従って

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \underline{6t}$$

点 i, k, l の並べ方の3!=6通りからくる

定理5・2 #1

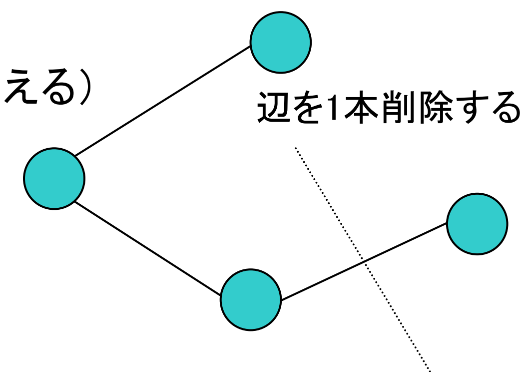
グラフGはn個の点をもつ単純グラフであり、k個の成分がある場合、Gの辺数mは

$$n-k \le m \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$ を満たす

（証明）

$m \ge n-k$ について

辺数の下限に関してであるから、グラフGはできるだけ
少ない辺数を持つものとする（極端な場合として木を考える）



Gから辺を1本削除すると

$$k \to k+1, n \to n, m_0 \to m_0 - 1$$

$$m_0 - 1 \ge n-(k+1)$$ m_0-1 本の辺に関して不等式の成立を仮定

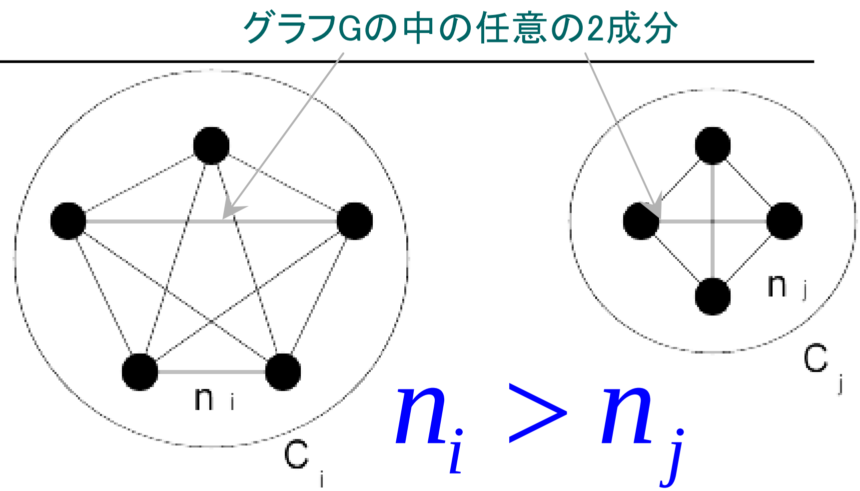
（帰納法の仮定。m0=0の場合は自明）

$$m_0 \ge n-k$$ m_0 本の辺について成立⇒全ての辺数について成立

定理5・2 #2

$$m \le (n-k)(n-k+1)/2$$

の成立について示す



$$n_i > n_j$$

辺数の上界を示すので、グラフGは辺数の最も多い完全グラフとして考える

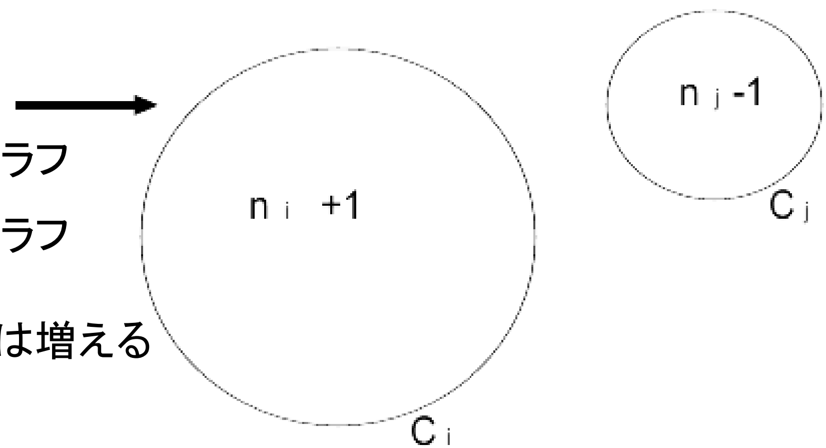
$C_i + C_j$ の辺の総数

$$N_{ij} = \frac{1}{2} n_i (n_i - 1) + \frac{1}{2} n_j (n_j - 1)$$

次の操作を行う

$C_i \Rightarrow n_i + 1$ 個の点をもつ完全グラフ

$C_j \Rightarrow n_j - 1$ 個の点をもつ完全グラフ



$\Delta N_{ij} = n_i - n_j + 1 > 0$ だけ点の総数は増える

この操作を繰り返すとn−k+1個の完全グラフとk−1個の孤立点が得られる

$$m \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$ が成立する

例題4.2（1）

$d(v,w)$はvからwへの最短路の長さ

$d(v,w) \geq 2$ならば, $d(v,z)+d(z,w)=d(v,w)$なる点zが存在する

（証明のアウトライン）

図において

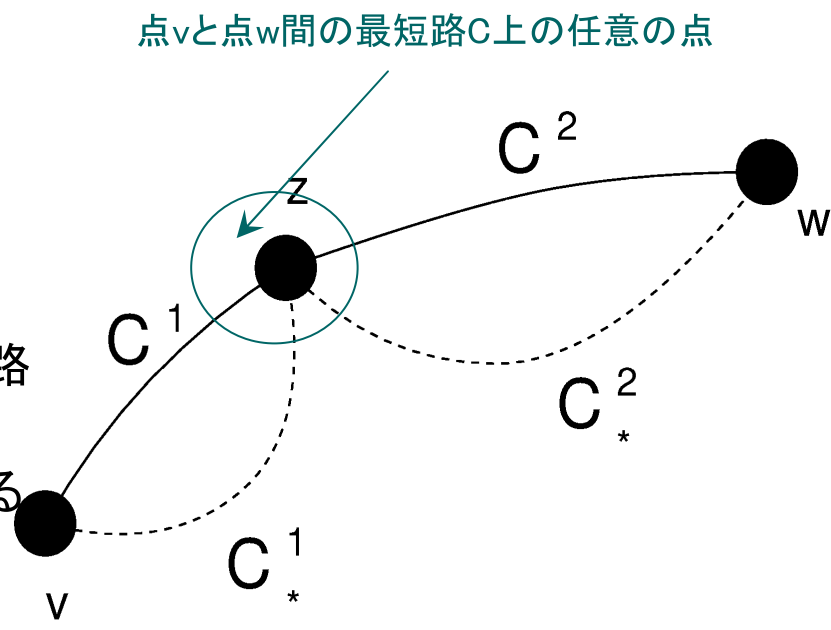
C^1 は点vと点zを結ぶ最短路である

仮定

もし、これ以外に最短路 C^1_* があるとすれば経路

$C^1_* + C^2$ がvとwを結ぶ最短路となり仮定に反する

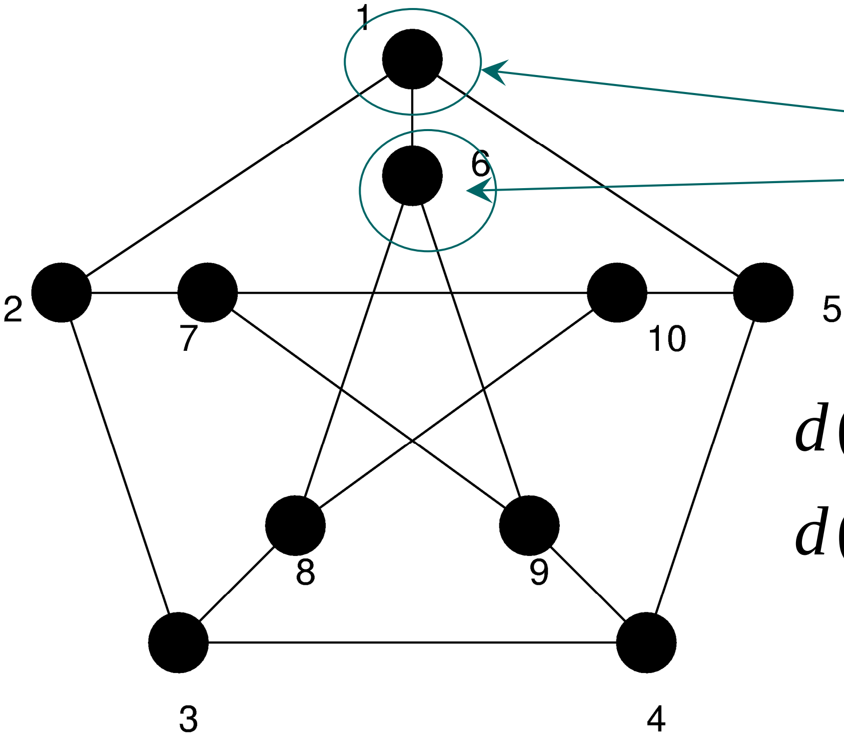
C^2 に関しても同様の議論ができる



考えるグラフは連結であるから、いつでもC上にzをとることができる

例題4.2 (2)

ピーターースン・グラフにおいて、任意の2点v, wに対し
$d(v,w)=1$ または $d(v,w)=2$ である



ピータースン・グラフの対称性から

$$v=1, v=6$$

をスタート点を選んだときの可能な経路の長さを調べればよい。実際に調べてみると

$$d(1,2)=1, d(1,3)=2, \ldots, d(1,10)=2,$$
$$d(6,1)=1, \ldots, d(6,10)=2$$

となり、満たす。

詳細は講義ノート

非連結化集合とカットセット

非連結化集合：

それを除去するとグラフが
非連結となる辺の集合

カットセット：

そのどのような部分集合も
非連結化集合ではない非連結化集合

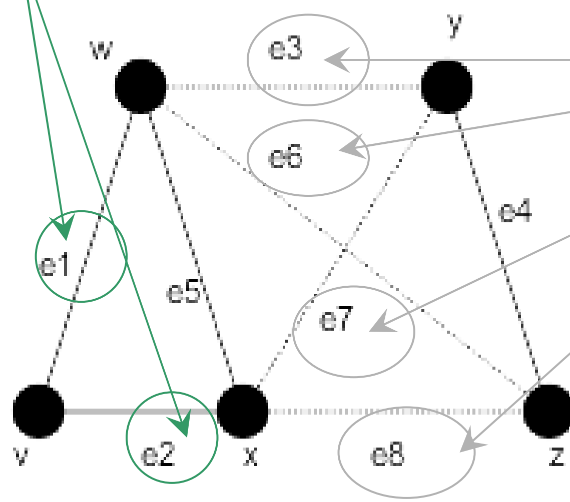
辺連結度： $\lambda(G)$

連結グラフの最小なカットセットの大きさ

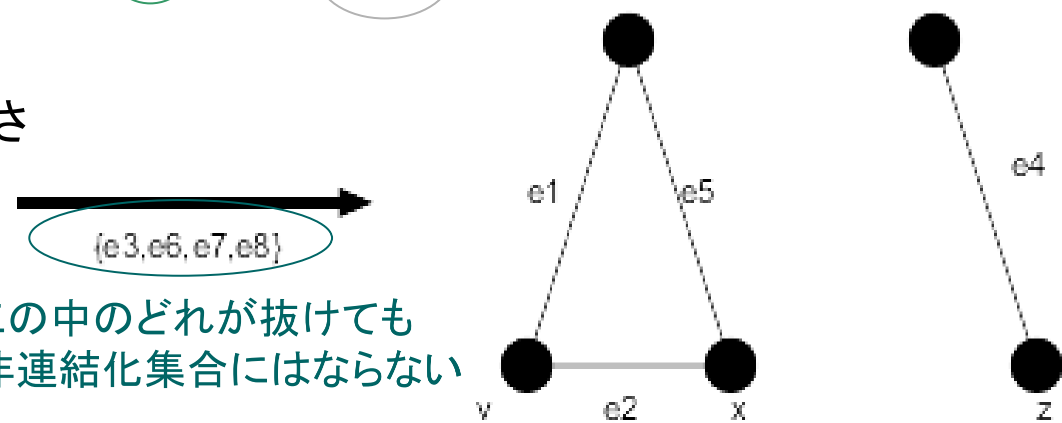
例に挙げた右図では

$$\lambda(G) = 2$$

要素数最小のカットセット



非連結化集合
の各要素



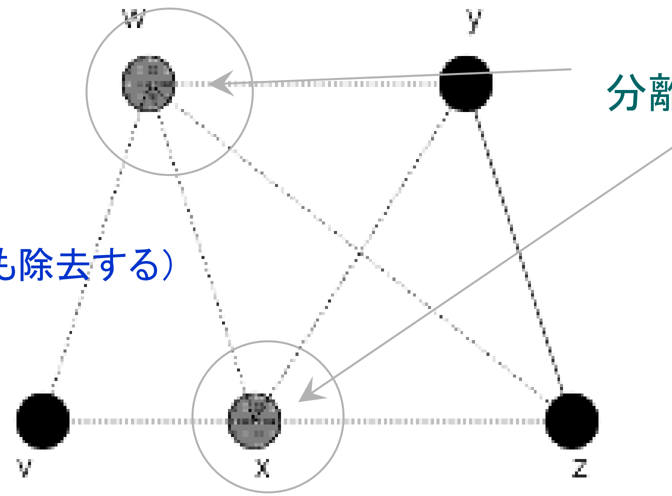
この中のどれが抜けても
非連結化集合にはならない

分離集合とカット点

分離集合：

それを除去するとグラフが
非連結となる点の集合

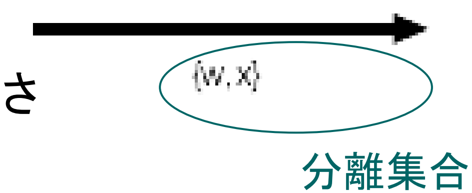
（※辺を除去する際にはその接続辺も除去する）

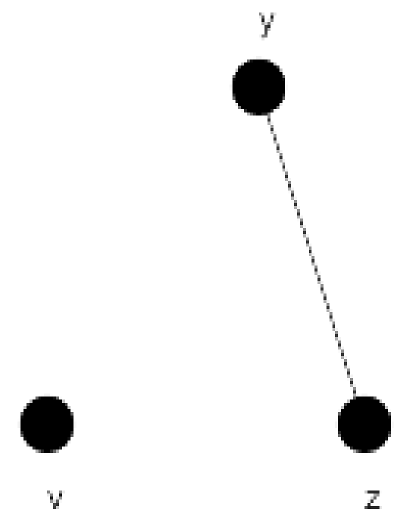


カット点：

1個の点からなる分離集合

連結度：



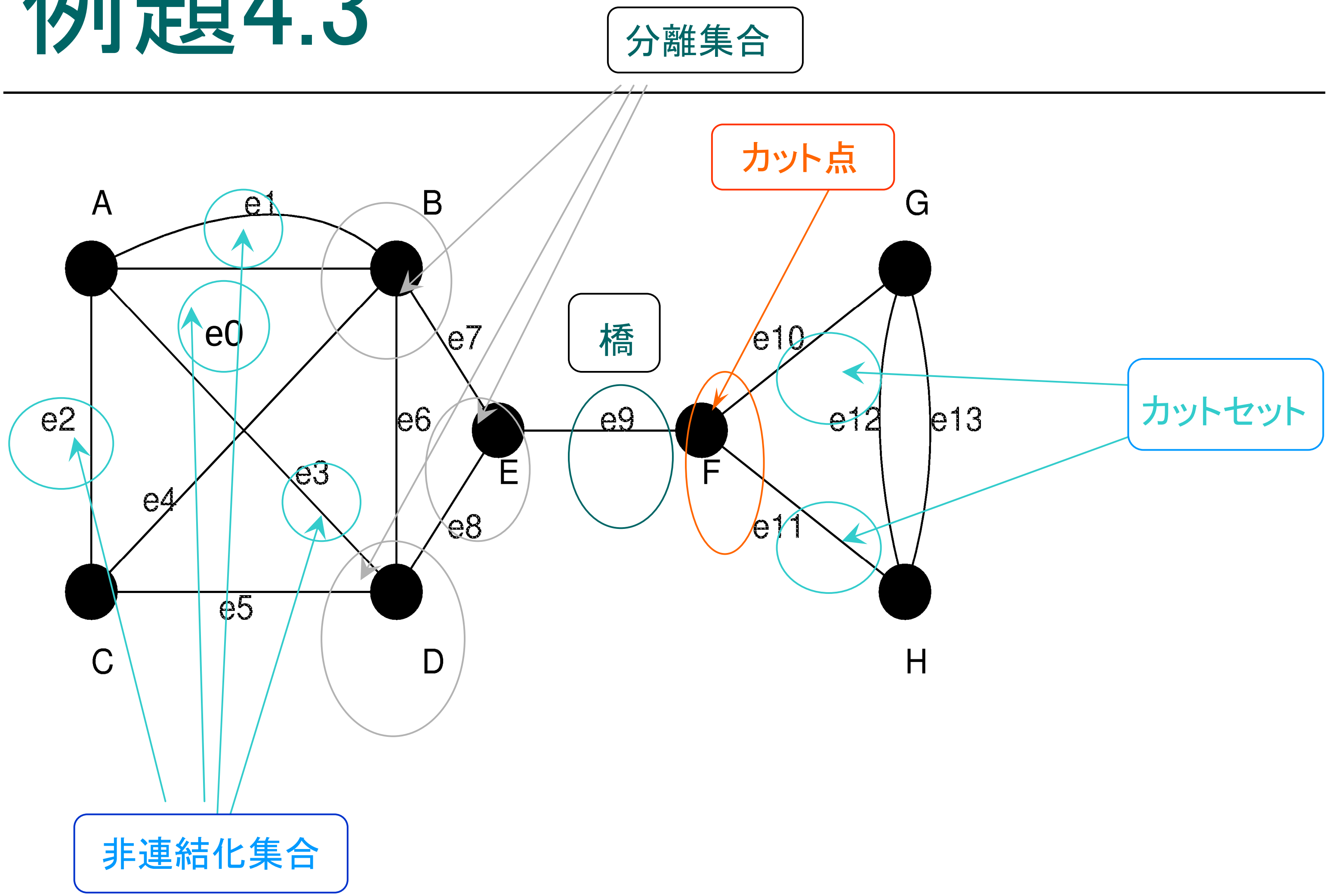


グラフの最小な分離集合の大きさ

図の例では　$\kappa(G) = 2$

$\kappa(G) \geq k$　のときグラフGは**k連結**であるという

例題4.3


分離集合
カット点
橋
カットセット
非連結化集合
A
B
C
D
E
F
G
H
e0
e1
e2
e3
e4
e5
e6
e7
e8
e9
e10
e11
e12
e13

例題4.4 (タイセット行列)

タイセット行列

$$\mathbf{B} = (b_{ij})$$

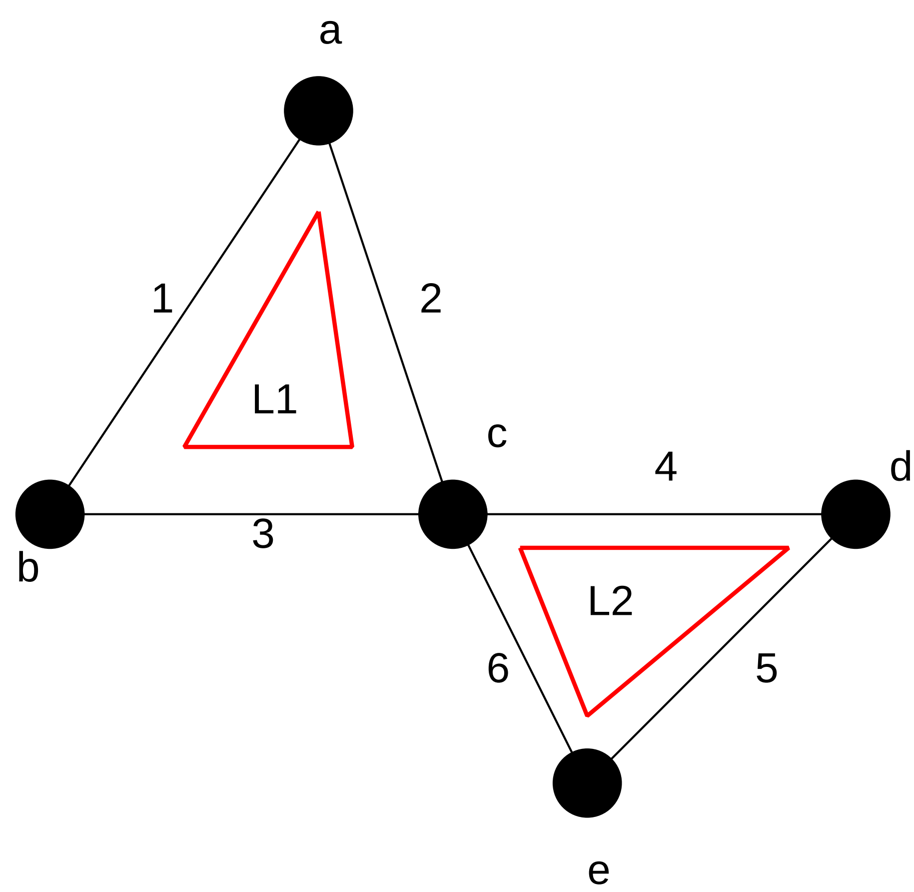
$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & (L_i\text{が枝}j\text{を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

右図の例では

閉路L1を構成する辺

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \boxed{1\ 1\ 1} & 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 & \boxed{1\ 1\ 1} \end{pmatrix}$$

閉路L2を構成する辺



例題4.4 #2（カットセット行列）

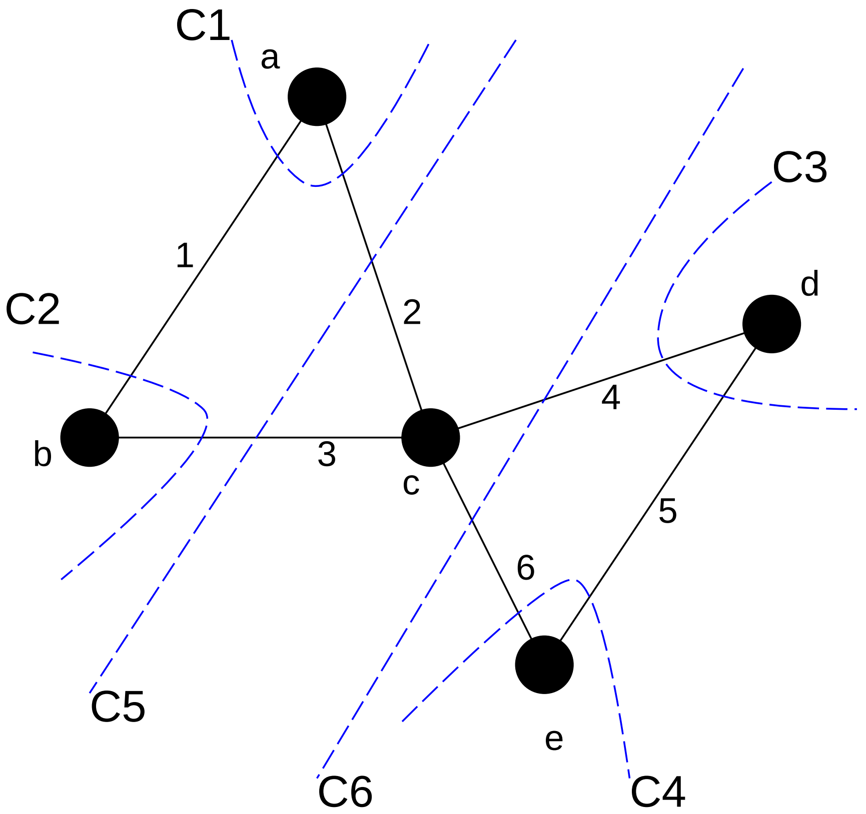
カットセット行列

$$\mathbf{C}=(c_{ij})$$

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & (C_i\text{が枝}j\text{を含む})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

右図の例では

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$



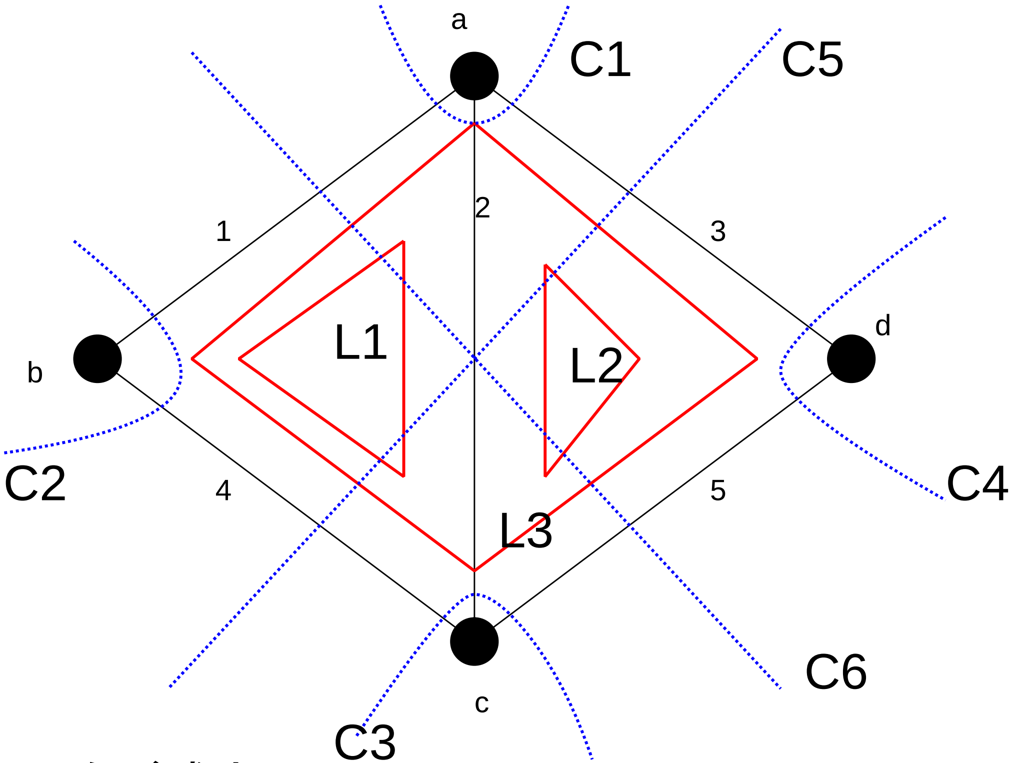
例題4.4 (1)–(3)

タイセット行列

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,1\,1 \end{pmatrix}$$

カットセット行列

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,0\,1 \end{pmatrix}$$



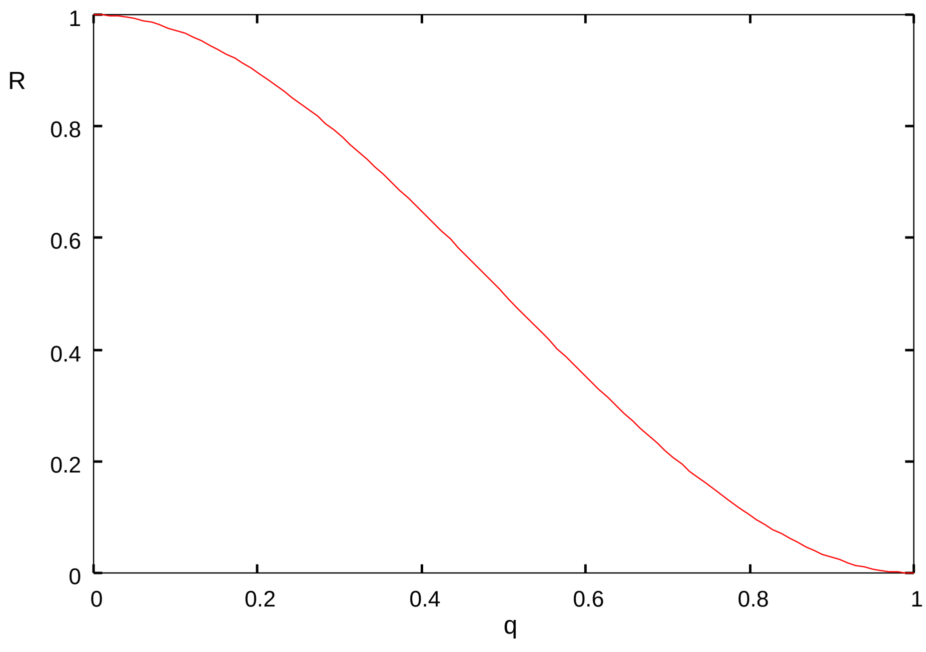
一般に次が成立

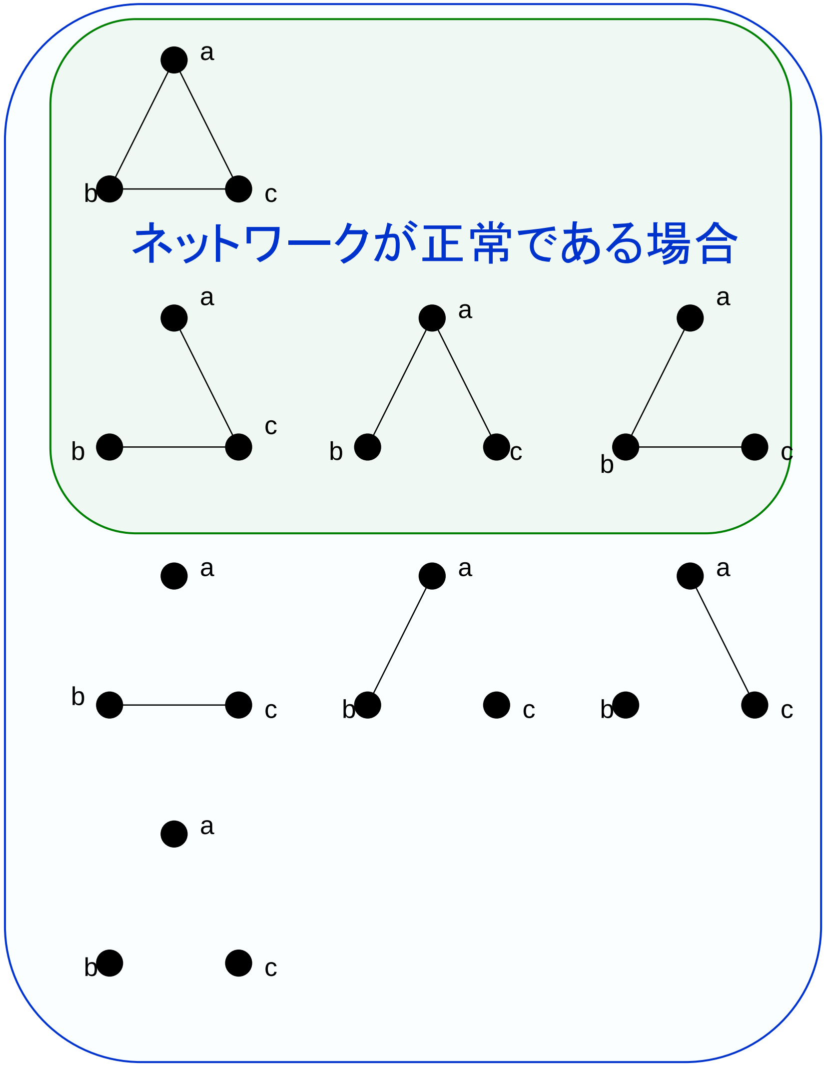
$$\mathbf{BC}^T = \mathbf{0} \pmod{2}$$

例題4.5の1

右図より、ネットワークが正常である確率は

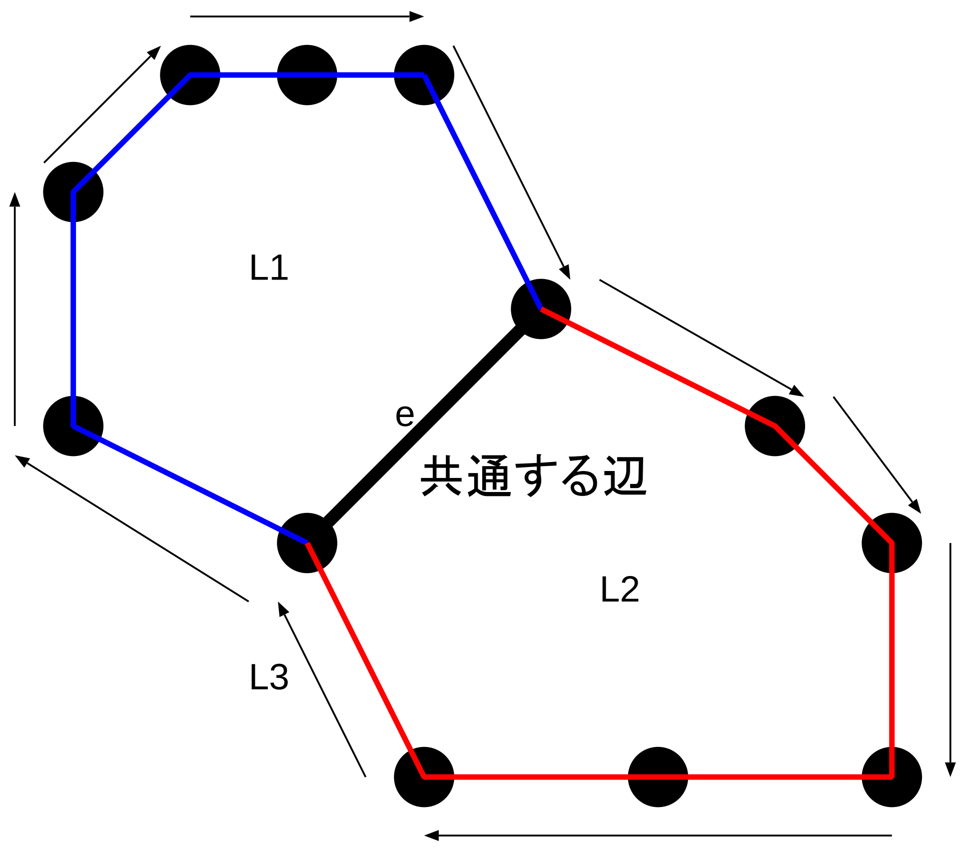
$$R(q) = (1-q)^3 + 3q\left(1-q\right)^2$$





例題4.5の2（1）

辺eを含まない閉路として、L1,L2の和からeを削除してできる閉路L3を選べる



例題4.5の2 (2)

辺 e, e1,e2が三角形をなしている場合にはカットセットとして
{e,e1}, {e,e2} 以外に必ず {e1,e2} を選ぶことができる