グラフ理論　#7

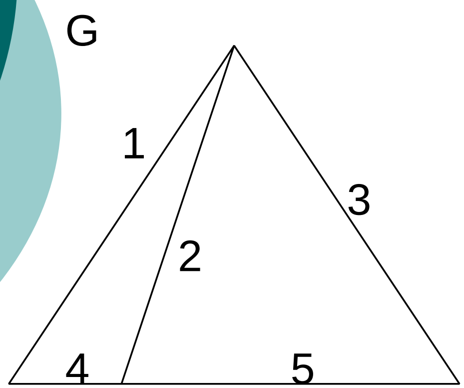
第7回講義　5月22日

--- 木の数え上げ ---

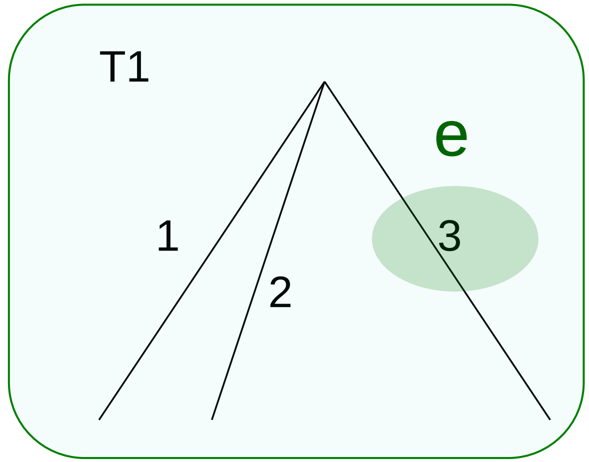
情報科学研究科　　　井上純一

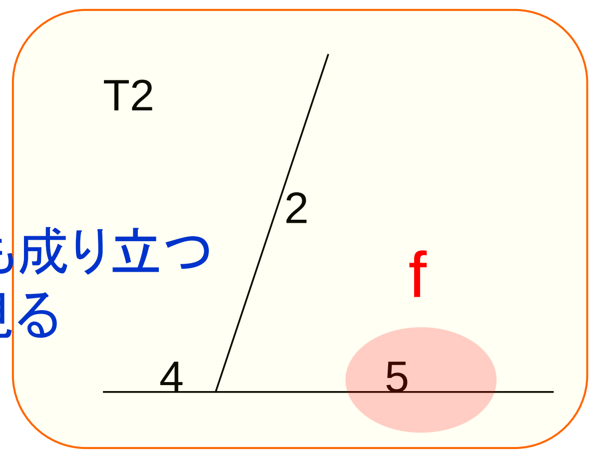
http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題6（1）の解答例



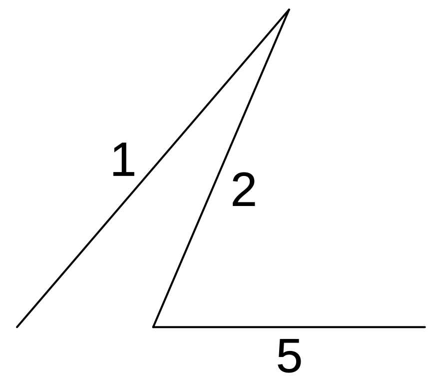
ここで考えるグラフG





T1,T2 : ベクトル空間の基
T1,T2の元を　e, f　としても成り立つ
⇒ マトロイド理論で後に見る

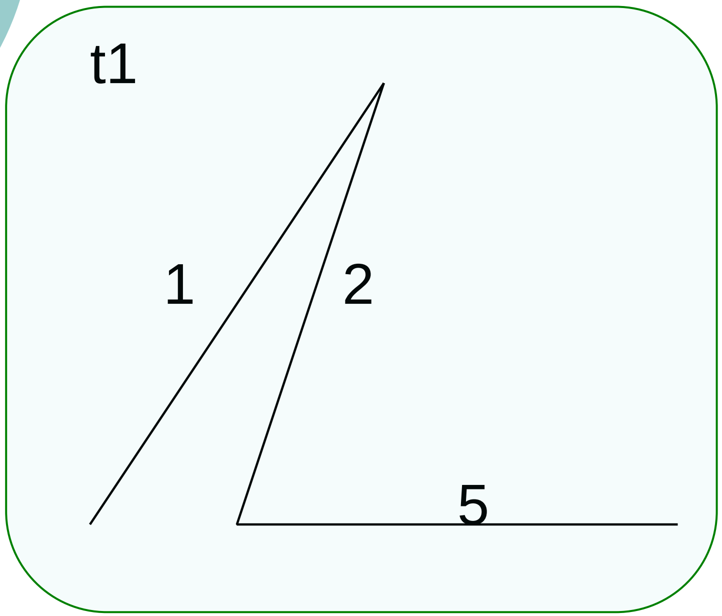
$$T_1 - e \cup f$$



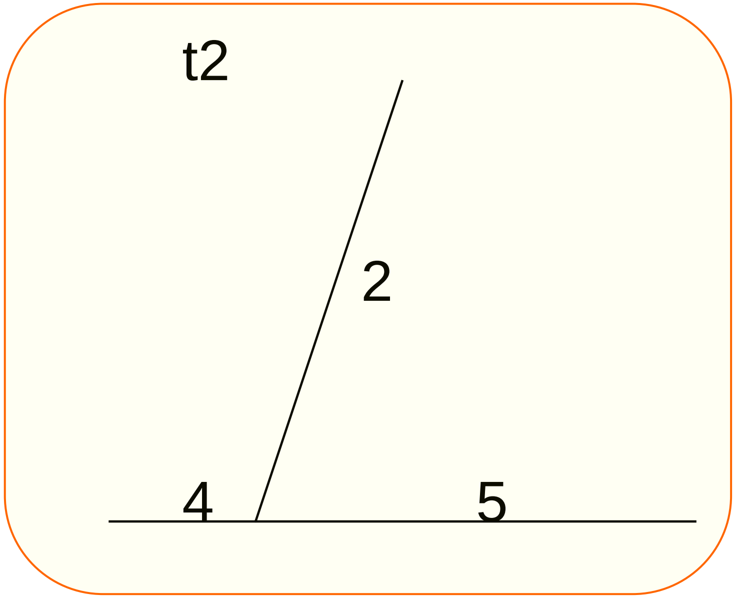
これもグラフGの
全域木である

演習問題6（2）の解答例

$$T_1 - \{e = 3\} \cup \{ f = 5\} \simeq t_1$$



中間にできるグラフもやはり
グラフGの全域木になっている



$$t_1 - \{e = 1\} \cup \{ f = 4\} \simeq t_2 = T_2$$

ケイリーの定理とその証明 #1

ケイリーの定理

n点の異なるラベル付き木の総数はn^{n-2}個である

（証明）

準備：

$\deg(v)=k-1$の点vを含むラベル付き木：A

$\deg(v)=k$の点vを含むラベル付き木：B

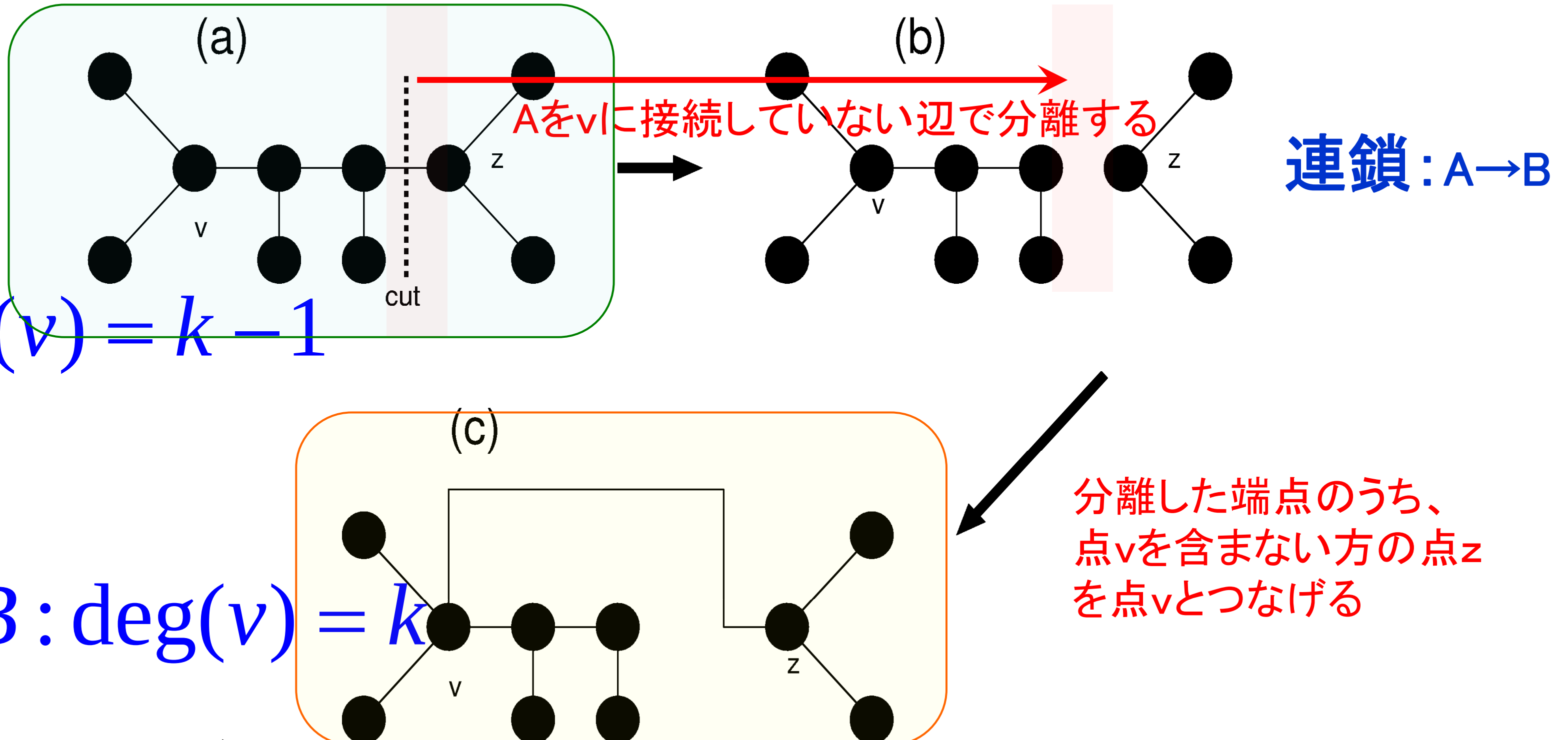
n個の点からなるラベル付き木のある点の次数がkであるものの総数を$T(n,k)$とする

証明のポイント：

「ラベル付き木Aからラベル付き木Bを作る連鎖の総数」
＝「ラベル付き木Bからラベル付き木Aを作る連鎖の総数」

という条件式から $T(n,k)$ を導く

ケイリーの定理とその証明 #2



$A : \deg(v) = k - 1$

$B : \deg(v) = k$

切断する辺の選び方　：

$$(\text{点}v\text{に接続しない辺の選び方}) = (\text{木}A\text{の辺数}) - (\text{点}v\text{の次数})$$
$$= (n-1) - (k-1) = n - k$$

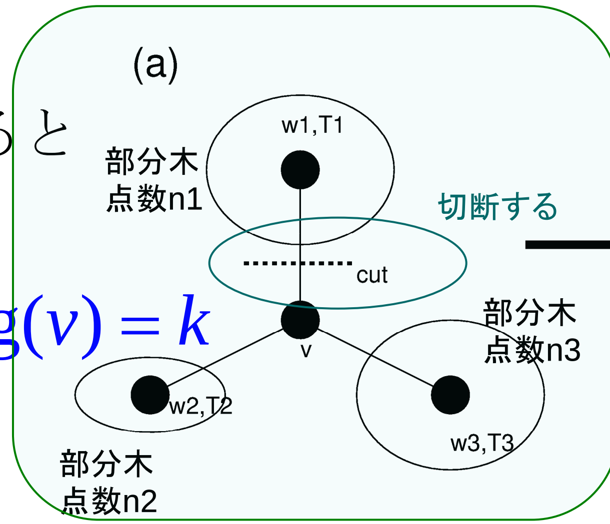
$$(\text{連鎖：}A \to B\text{の総数}) = \underbrace{T(n, k-1)}_{\text{Aの総数}}(n-k)$$

ケイリーの定理とその証明 #3

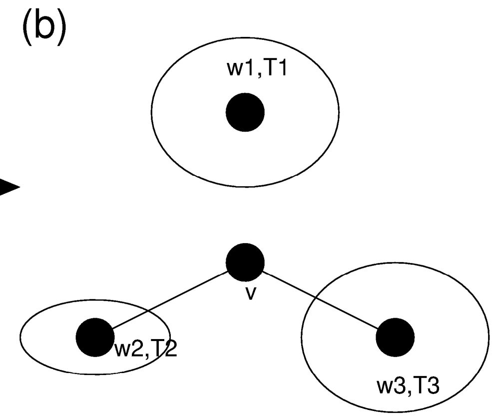
連鎖：B→A ：

部分木T_iの点数をn_iとすると

$$n-1=\sum_{i=1}^{k} n_i$$

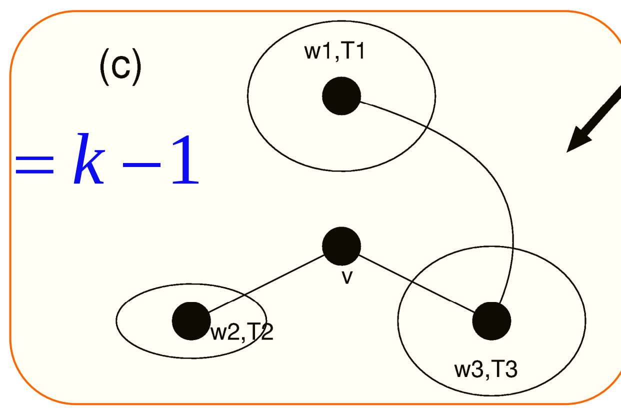


$$B:\deg(v)=k$$



連鎖B→Aの総数

$$A:\deg(v)=k-1$$



T1以外の部分木
（例えば、T3内の
任意の点uとT1内の
任意点wiを結ぶ）

$$T(n,k)\sum_{i=1}^{k}(n-1-n_i)$$

$$=T(n,k)(n-1)(k-1)$$

(点vを除く点数)－(部分木T_iに属する点数)

$=(n-1)-n_i$ （通り）

ケイリーの定理とその証明 #4

[連鎖：A→Bの総数] ＝ [連鎖：B→Aの総数]とおくと

$$(n-k)T(n,k-1)=(n-1)(k-1)T(n,k)$$

k=n−1,n−2,n−3,….を書き出してみると

定義より1である

$$T(n,n-2)=T(n,n-1)(n-1)(n-2)$$

$$T(n,n-3)=\tfrac{1}{2}(n-1)^2(n-2)(n-3)$$

$$T(n,n-4)=\tfrac{1}{3!}(n-1)^3(n-2)(n-3)(n-4)$$

これを一般化し、k=k+1のとき

$$\boxed{T(n,k)=\frac{(n-1)^{n-k+1}(n-2)}{(k-1)(k-2)\cdots}={}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1}}$$

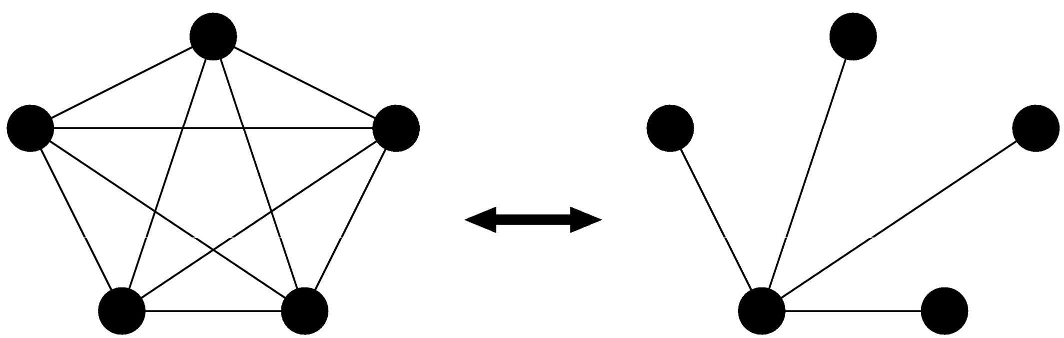
ケイリーの定理とその証明 #5

求めるラベル付き木の総数は

$$T(n)=\sum_{k=1}^{n-1}T(n,k)=\sum_{k=1}^{n-1}{}_{n-2}C_{k-1}1^{k-1}(n-1)^{(n-2)-(k-1)}$$

$$=\{(n-1)+1\}^{n-2}=n^{n-2}$$ （証明終わり）

系：完全グラフK_nの全域木の総数はn^{n-2}である



点数nのラベル付き木は完全グラフKnに一対一に対応する

K 5

点行列と行列木定理

グラフGの点行列 : $\mathbf{D}$

$$D_{ij} = \begin{cases} 点 v_i の次数 & (i = j のとき) \\ -(点 v_i と点 v_j を結ぶ辺数) & (i \neq j のとき) \end{cases}$$

このとき、グラフGの全域木の本数は点行列の任意の余因子で与えられる

$$\tau(G) = (-1)^{i+j} \left| \mathbf{D}(\overline{i}, \overline{j}) \right|$$

行列木定理の応用例

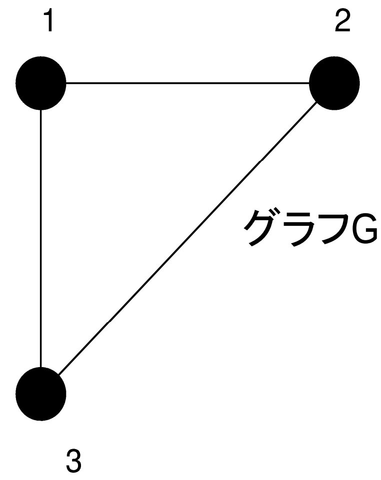
隣接行列**A**が

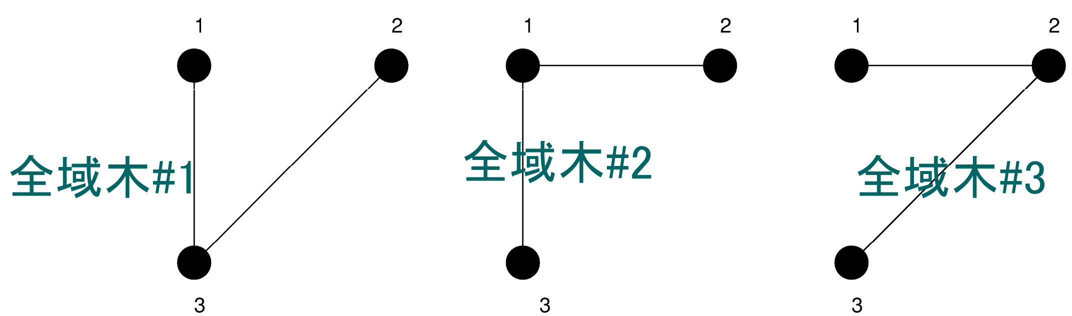
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$ で与えられるグラフGの全域木の総数$\tau(G)$を求めよ

このグラフGの点行列は

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$ なので

$$\tau(G)=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=4-1=3$$





例題7.5 の1

$$T(n,k) = {}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1}$$ より

与えられた点が木の端点になっている場合の数はk=1とおいて

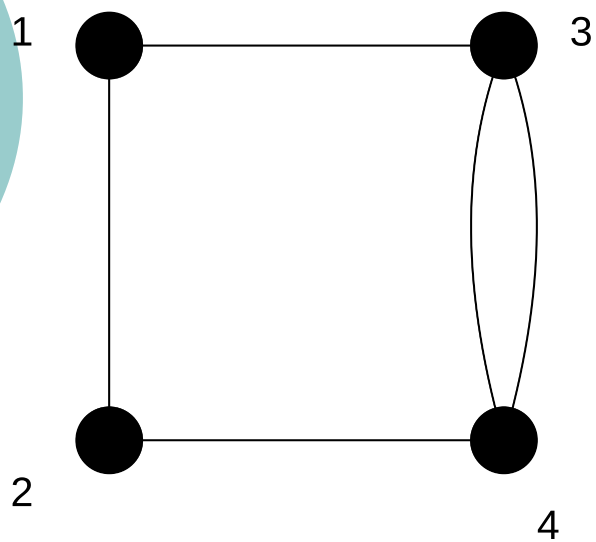
$$T(n,1) = (n-1)^{n-2}$$

従って、与えられた点が端点となっている確率は

$$P(n) = \frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} = e^{-1}$$

G

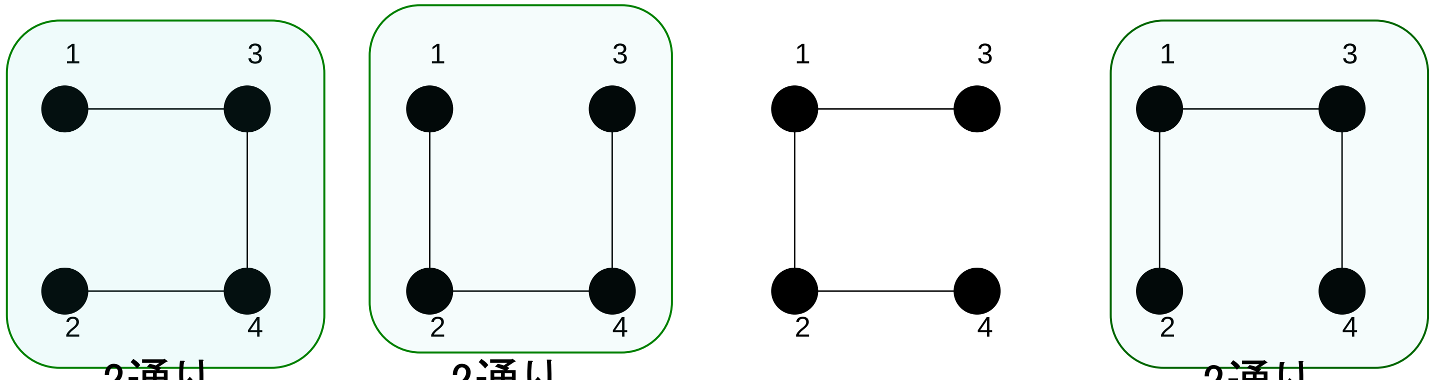
例題7.5 の2



点行列

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

具体的な計算は講義ノート



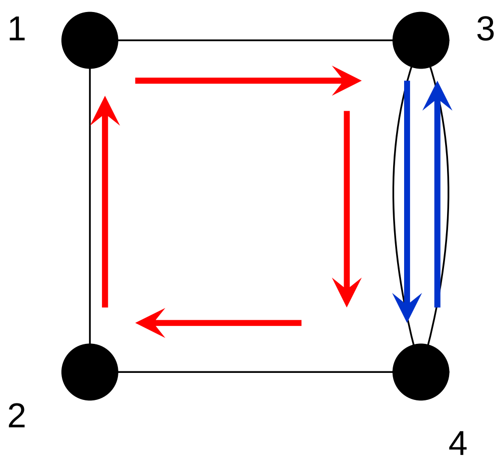
閉路行列と閉路行列法

$$R_{ij} = \begin{cases} \text{閉路}c_i\text{を構成する辺数} & (i = j) \\ \pm(\text{閉路}c_i\text{と閉路}c_j\text{に共通な辺数}) & (i \neq j) \end{cases}$$

$$\tau(G) = |\mathbf{R}|$$ 全域木の個数

G

（例）



$$R = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau(G) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

例題7.5の2と一致