

グラフ理論 #8

第8回講義 5月29日

--- 平面グラフ ---

情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題7 の解答例

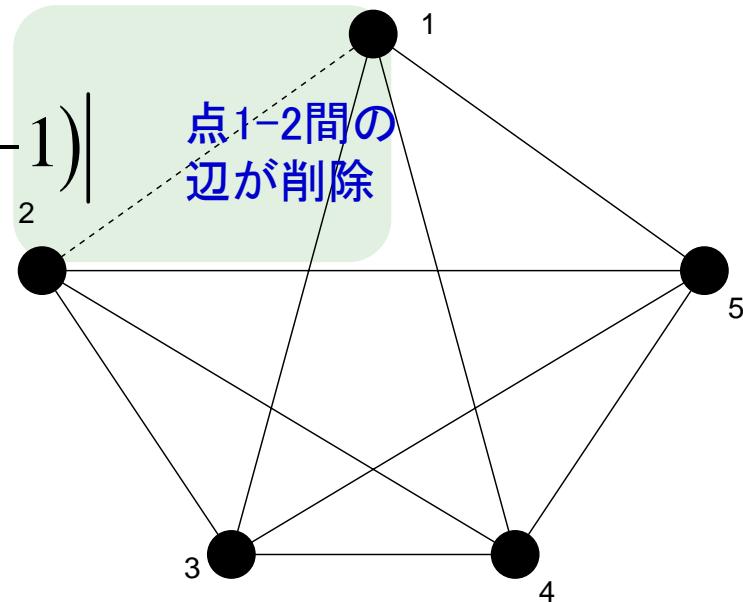
点行列法で行列木定理を用いる

$$\begin{aligned}\tau(K_n - e) &= (-1)^{N+N} \left| \mathbf{D}_{K_n - e}(N-1, N-1) \right| \\&= \begin{vmatrix} a-1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & a-1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & -1 & a \end{vmatrix} \\&\quad \text{点1-2の関係を表す部分行列}\end{aligned}$$

$$= (a-1)(a+1)(b_{m-2} + 2c_{m-2})$$

$$= (n-2)n^{n-3}$$

例題7.6の結果を用いる

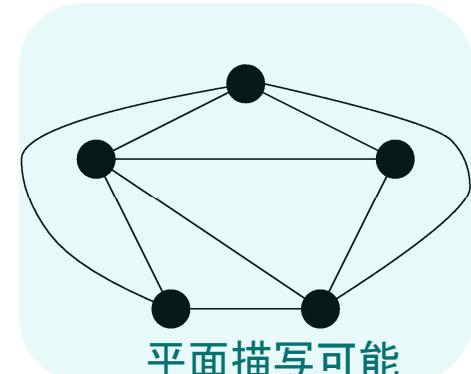
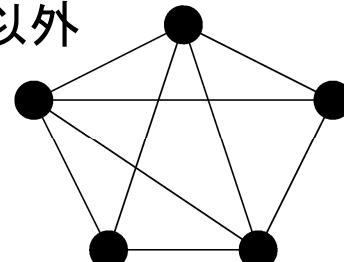


完全グラフの任意の1辺を削除してできるグラフ

平面グラフ：定義など

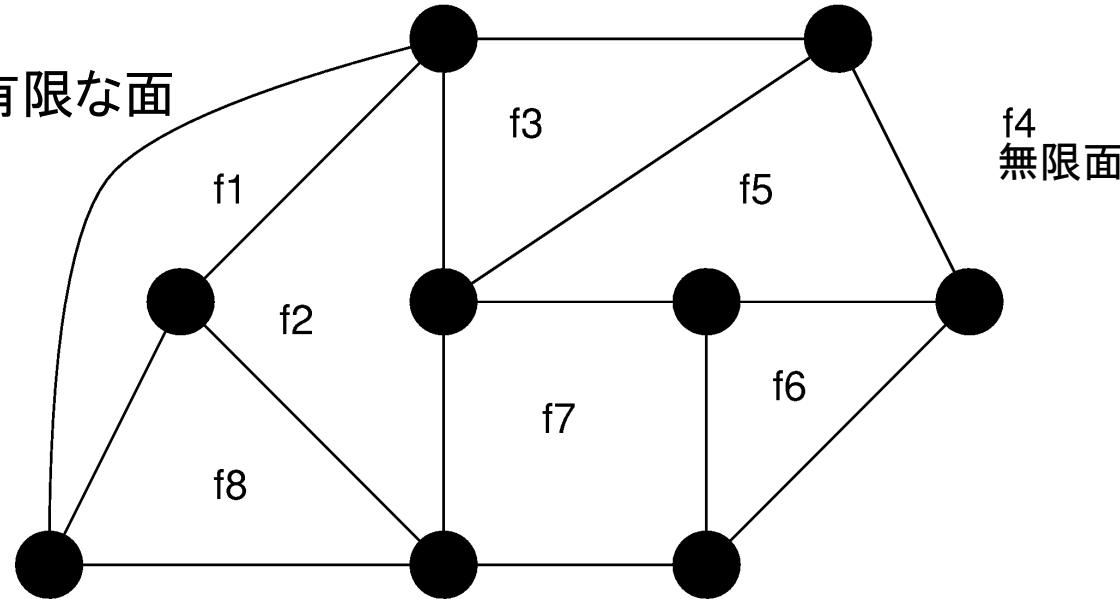
平面グラフ：

どの2つの辺も、それが隣接する点以外
では幾何学的に交差しないように
描かれたグラフ



面：辺によって分割される領域

無限面：非有限な面



オイラーの公式

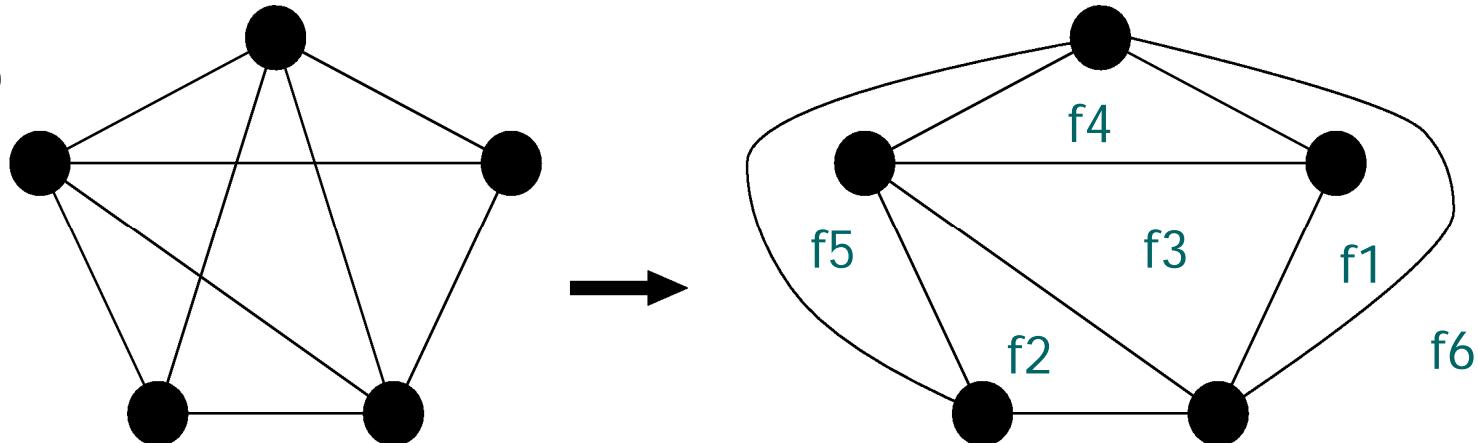
グラフ G を連結な平面グラフとするとき、次の公式が成り立つ

$$n - m + f = 2$$

n :点数、 m :辺数、 f :面数

オイラーの公式

(例)



$$n = 5, f = 6, m = 9 \text{ より}$$

$$n - m + f = 5 - 9 + 6 = 2 \text{ と成立するので平面描写可能である}$$

オイラーの公式の証明 #1

辺数 m に関する数学的帰納法により証明する

$$m = 0 : n = 1, f = 1 \text{ (無限面)}$$

$$\therefore n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2 \text{ で成立}$$

$m=0$ の場合

● $n=1$

$f=1$ (無限面)

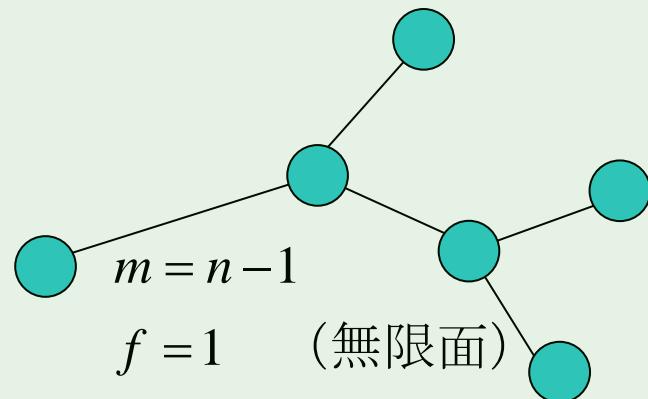
「 $m-1$ 本以下の辺をもつ全てのグラフGに対して公式が成立する」と仮定する

(※注)

Gが木の場合には特別な事情がある

$$n - (n - 1) + 1 = 2$$

(任意の m に対して常に成立)



以下の議論では木を除く一般の連結グラフ G について考える

オイラーの公式の証明 #2

グラフ G の任意の辺を一本削除すると

$$n \Rightarrow n$$

$$m \Rightarrow m - 1$$

$$f \Rightarrow f - 1$$

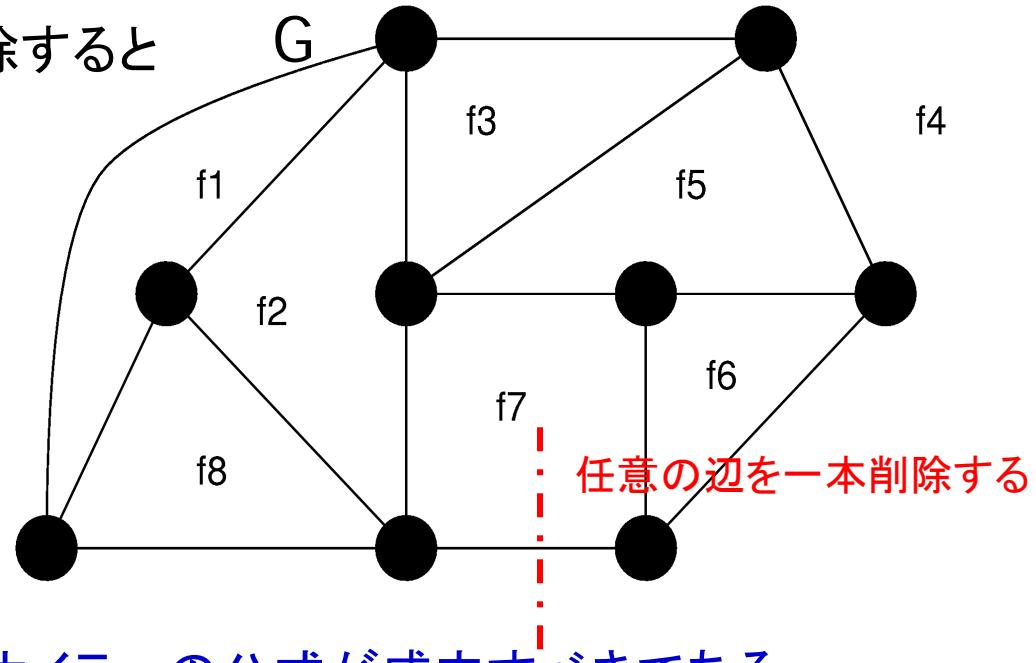
仮定により、このセットに対してオイラーの公式が成立すべきである

$$n - (m - 1) + f - 1 = 2$$

⇒ 任意の変数に対して公式は成立

$$\therefore n - m + f = 2$$

証明終わり



オイラー公式の書き換え

オイラーの公式を面数を含まない形に書き換える

内周 κ : グラフ G の最短の閉路長

$d(F)$: グラフ G の面 F の次数の和

$$\kappa \leq d(F)$$

$$\therefore \kappa f \leq \sum_{F \in F(G)} d(F) = 2m$$

握手補題より
グラフ G の面集合

オイラーの公式: $f = 2 + m - n$ を代入して m に関してまとめると

$$m \leq \frac{\kappa(n-2)}{\kappa-2}$$

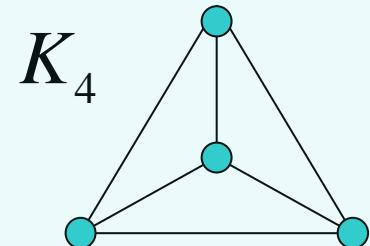
グラフの平面性の判別式
(成立すれば平面描写可能)

例題8.1

(1) 4次の完全グラフ

$$n = 4, m = {}_4C_2 = 6, \kappa = 3$$

$$\therefore 6 \leq \frac{3 \cdot (4 - 2)}{3 - 2} = 6$$

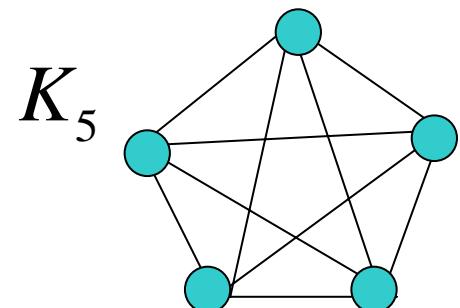


不等式成立。平面描写可能

(2) 5次の完全グラフ

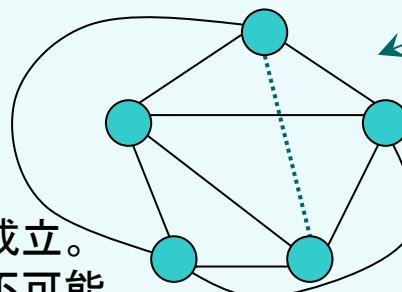
$$n = 5, m = {}_5C_2 = 10, \kappa = 3$$

$$\therefore 10 \leq \frac{3 \cdot (5 - 2)}{3 - 2} = 9$$



どのような同形写像で変換しても平面描写は不可能

不等式不成立。
平面描写不可能



オイラー公式(複数成分)とその証明

複数成分をもつグラフに対するオイラーの公式

平面グラフ G の成分が k の場合には

$$n - m + f = k + 1$$

が成り立つ

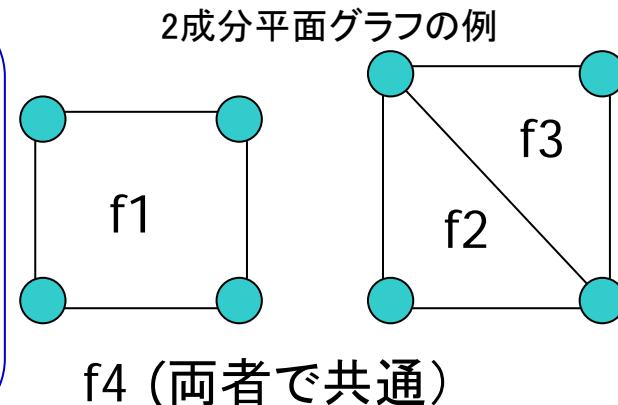
(証明)

無限面が $k - 1$ 個だけ余分にカウントされるので

$$f \rightarrow f - (k - 1) \text{ とすると}$$

$$n - m + \{f - (k - 1)\} = 2$$

$$\therefore n - m + f = k + 1$$



証明終わり

平面グラフの辺数の上限

単純連結平面グラフ G が $n(\geq 3)$ 個の点と m 本の辺をもつとき

$$m \leq 3n - 6$$

が成立し、三角形が無ければ

$$m \leq 2n - 4$$

が成り立つ

系 13.4

(証明)

G に含まれる最小面は 3 点からなる三角形なので

$$3 \leq d(F)$$

つまり、 $3f \leq \sum_{F \in F(G)} d(F) = 2m, \therefore m \leq 3n - 6$

オイラー公式 : $f = 2 - n + m$ を代入

また、 G に三角形がなければ、最小面は四角形なので

$$4 \leq f(F)$$

つまり、 $4f \leq \sum_{F \in F(G)} d(F) = 2m, \therefore m \leq 2n - 4$

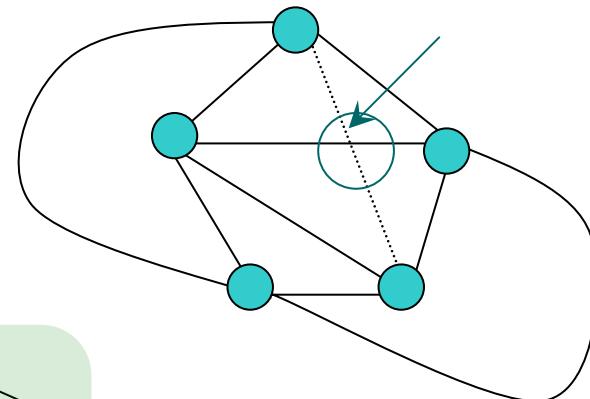
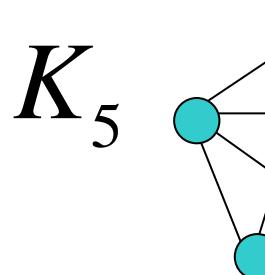
証明終わり

交差数と厚さ

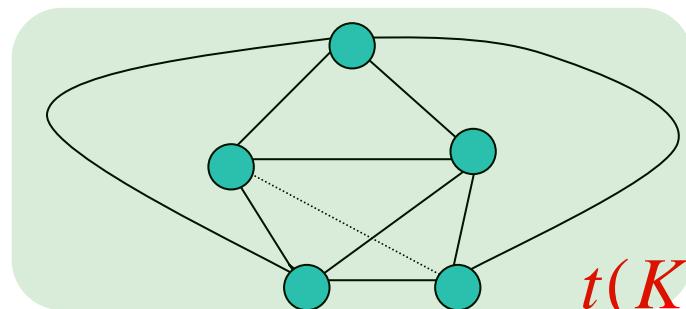
交差数 : グラフ G を平面描写した際に生じる辺の最小交差の数 $cr(G)$

厚さ : いくつかの平面グラフを重ね合わせてグラフ G を作る際に必要な平面グラフの数 $t(G)$

(例)

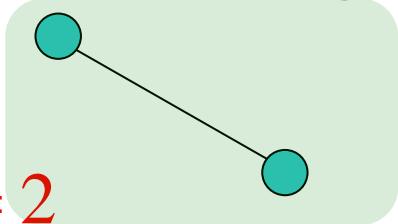


交差数 1, $cr(K_5) = 1$



$t(K_5) = 2$

+



例題8.3: 単純グラフの厚さの下限

単純グラフ G に $n(\geq 3)$ 個の点、 m 本の辺があるとき、 G の厚さは

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil, \quad t(G) \geq \left\lceil \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rceil$$

を満たす

(証明)

$$\begin{aligned} t(G) &\geq \left\lceil \frac{\text{辺の総数}}{\text{平面グラフとなるための辺の上限}} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil \end{aligned}$$

さらに恒等式: $\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor$ で $a = m, b = 3n - 6$ とすると

この関係式の証明は講義ノートを参照のこと

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rceil$$

(証明終わり)

例題8.4

(1) 完全グラフの厚さ

完全グラフの辺数は $m = n(n-1)/2$

$$\therefore t(K_n) \geq \left\lfloor \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 3n - 7}{3n-6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor$$

(2) 完全二部グラフの厚さ

完全二部グラフ $K_{r,s}$ の点数と辺数は

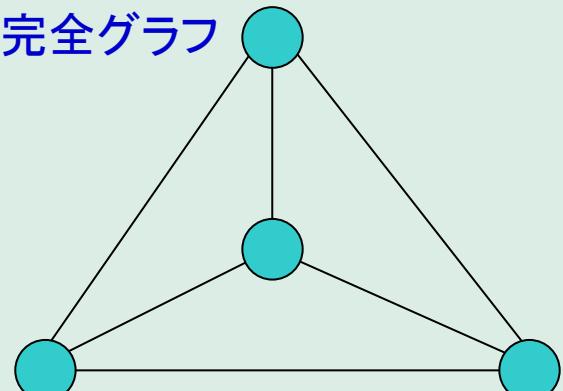
$$m = rs, n = r + s$$

$K_{r,s}$ には三角形が含まれないので

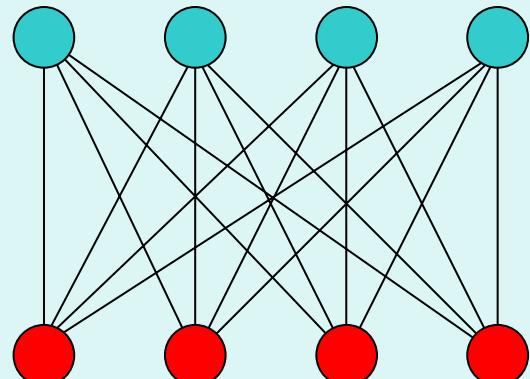
$$m \geq 2n - 4 \equiv m_0$$

$$\therefore t(K_{r,s}) = \left\lceil \frac{m}{m_0} \right\rceil = \left\lceil \frac{rs}{2(r+s)-4} \right\rceil$$

完全グラフ



完全二部グラフ



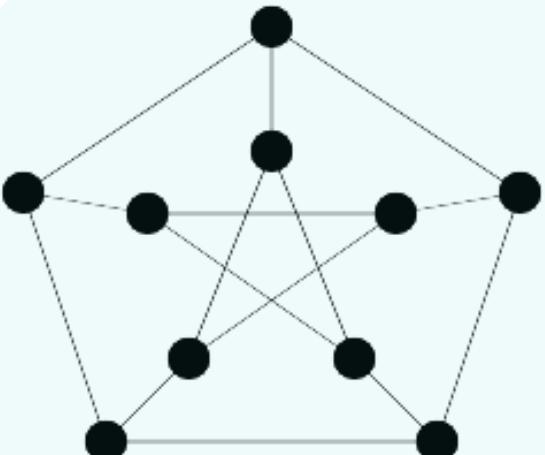
例題8.5の1と2

1. 完全グラフの全域木の総数(復習)

閉路行列法を用いると

$$\tau(K_4) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16$$

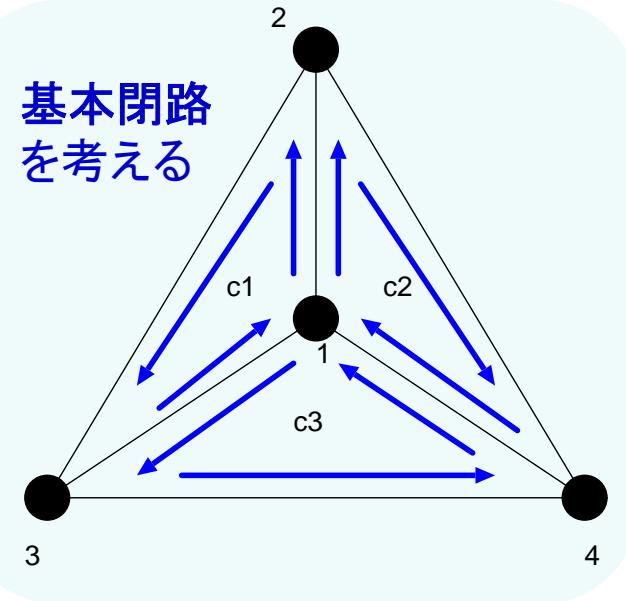
2. ピータースン・グラフの平面性



$n=10, m=15, \kappa=5$ を判別式に代入し

$$m \leq \frac{\kappa(n-2)}{\kappa-2} = \frac{5(10-2)}{5-2} = 13.33\dots$$

これは満たされないので
ピータースン・グラフは平面的ではない



例題8.5の3

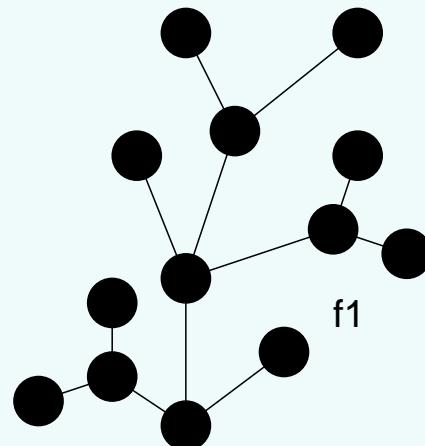
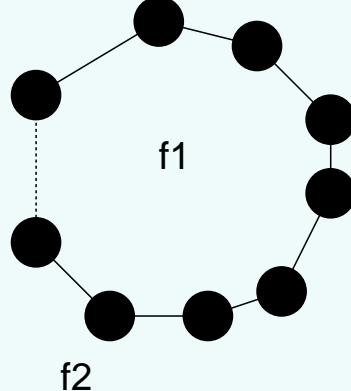
K 角形までない場合

握手補題より

$$(K+1)f = \sum_{f \in F(G)} d(F) = 2m$$

オイラーの公式 $f = 2 - n + m$ より f を消去

$$m \leq \left(\frac{K+1}{K-1}\right)(n-2) \rightarrow n \quad (n \rightarrow \infty, K = n)$$



考えうる状況

例題8.6

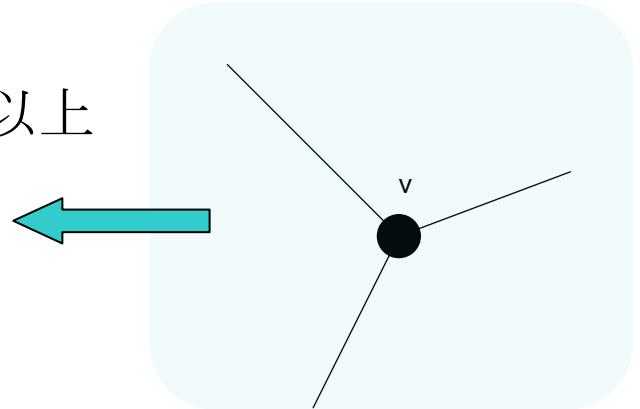
地図においては隣り合う5つ以下の隣接国しかもたない国が存在することの証明

(1)

地図では任意の点に接続する辺は3つ以上

$$\therefore m \geq 3n/2 \text{であるから}$$

$$n \leq \frac{2m}{3} \quad \text{辺の両端には必ず点が2つあるので2で割る}$$

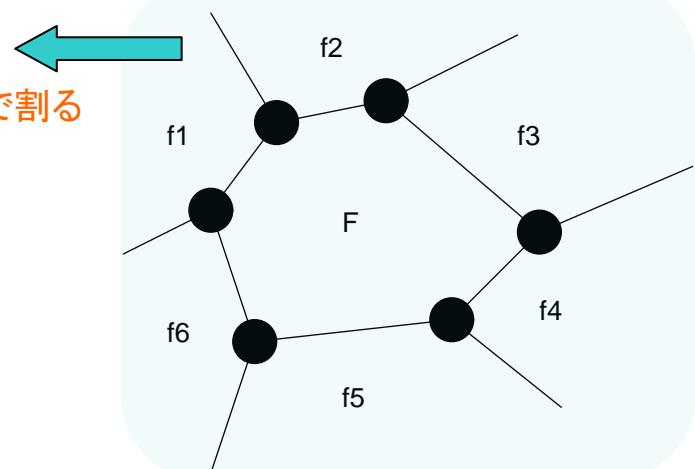


(2)

G の中に面が f 個あれば

$$m \geq 6f/2 \quad \therefore f \leq \frac{m}{3}$$

境界線の両側には必ず面が2つあるので2で割る



(3)

オイラーの公式より

$$2 = n - m + f \leq \frac{2m}{3} - m + \frac{m}{3} = 0$$

従って(1)のもとで(2)を仮定すると矛盾が生じたので題意が成立する