グラフ理論　#11

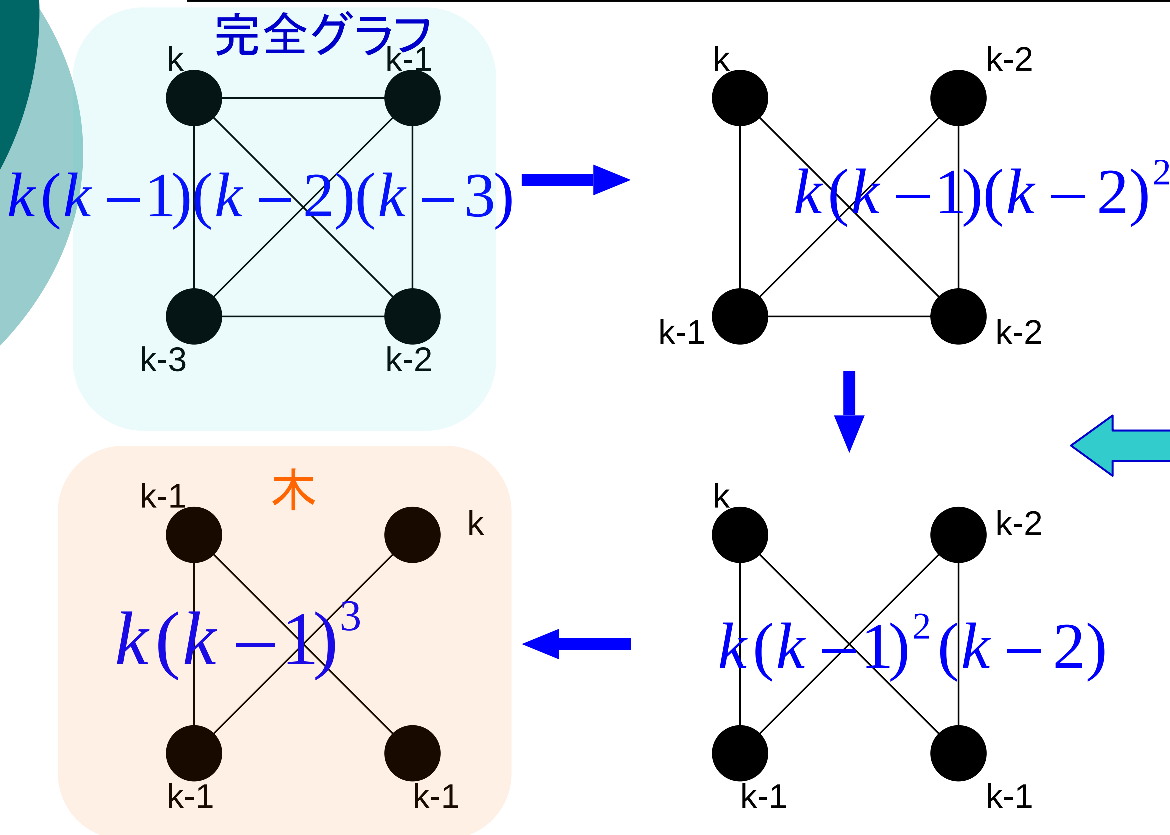
第11回講義　6月26日

––– 有向グラフ –––

情報科学研究科　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題10の解答例



完全グラフから
辺を削除していくと
最終的な連結グラフ
としては木が得られる。

この操作で彩色数は
単調に増加する。

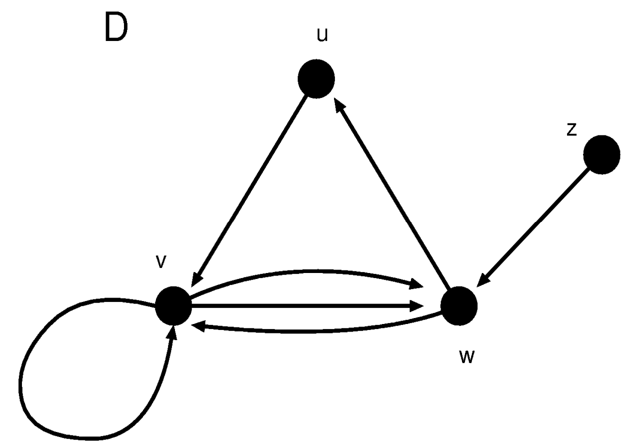
$$\underbrace{k(k-1)\cdots(k-N+1)}_{P_{K_N}(k)} \le P_G(k) \le \underbrace{k(k-1)^{N-1}}_{P_{T_N}(k)}$$

有向グラフ：定義･性質 #1

弧集合：

$A(D)$：点集合$V(D)$の元の順序対からなる有限族

$$A(D)=\{\overline{uw},\overline{vv},\overline{vw},\overline{vw},\overline{wv},\overline{wu},\overline{zw}\}$$

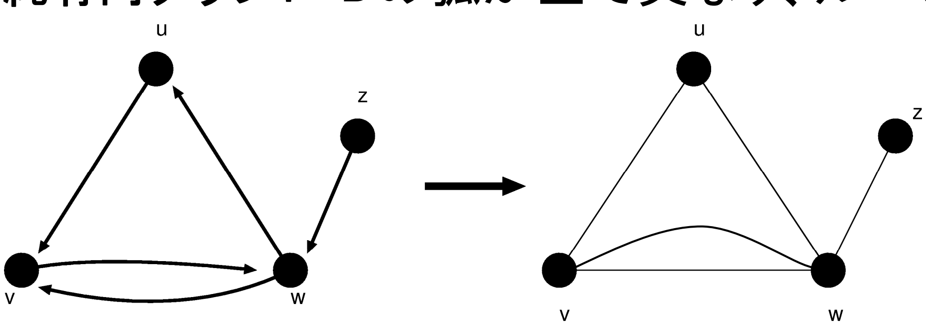


有向グラフ：

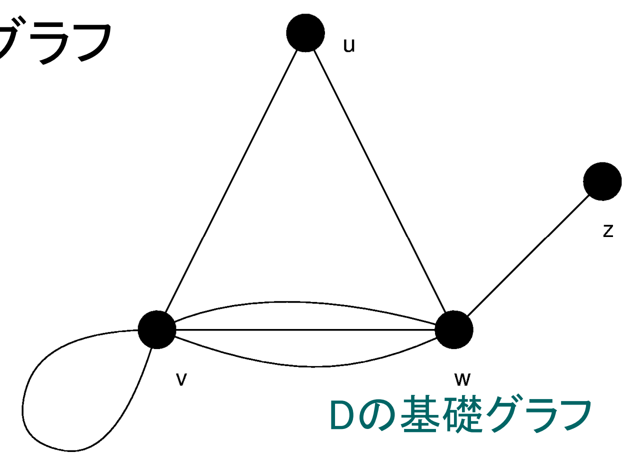
D：$V(D)$と$A(D)$からなるグラフ

Dの基礎グラフ：有向グラフDの矢印を取り除いたグラフ

単純有向グラフ：　Dの弧が全て異なり、ループの無いグラフ



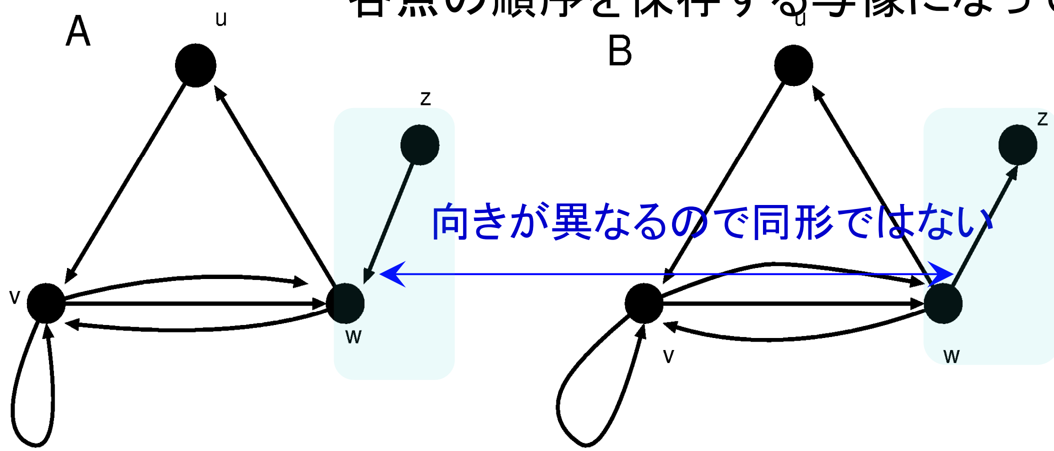
単純有向グラフの基礎グラフは必ずしも単純グラフでない



Dの基礎グラフ

有向グラフ：定義・性質 #2

有向グラフの同形：基本グラフの間に同形写像があり、
各点の順序を保存する写像になっているとき

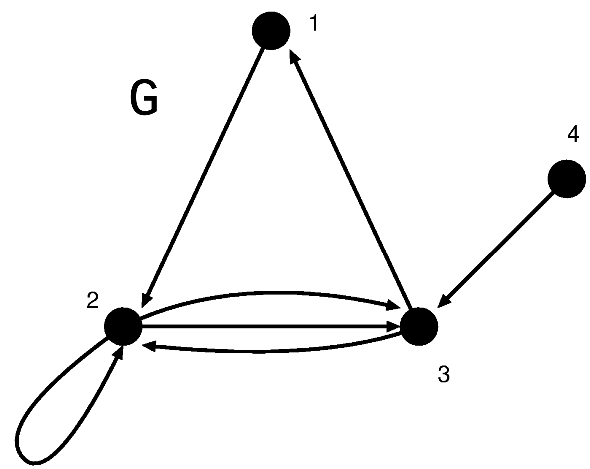


有向グラフの隣接行列：

$\mathbf{A}=(a_{ij})$：要素a_{ij}がv_iからv_jへの「弧」の本数を表す。

点数nのグラフに対して$n\times n$の行列

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&2&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

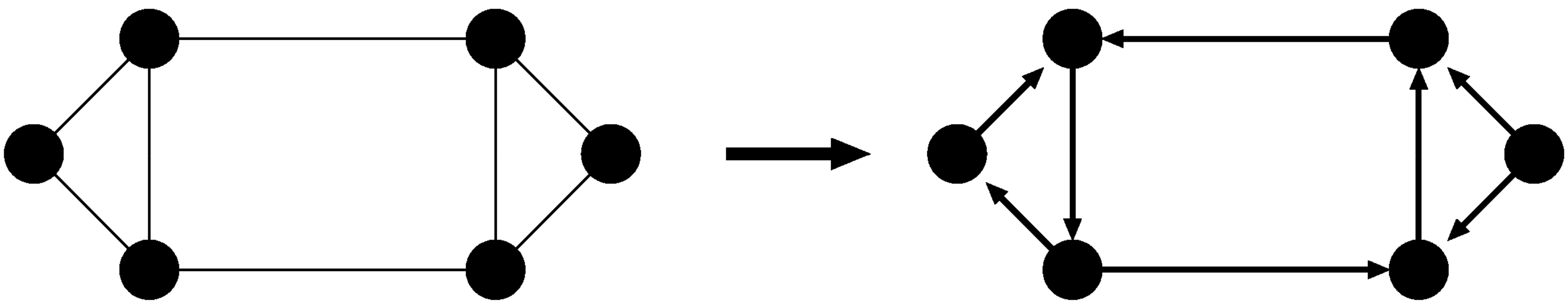


グラフGの隣接行列
一般に対称ではない

強連結と向き付け可能性

強連結 ： 任意の2点 v,w の間に点vから点 w への道がある

向き付け可能 ：Gの全ての辺を方向付けて強連結有向グラフが得られると



向き付け可能なグラフの一例

定理22・1とその証明

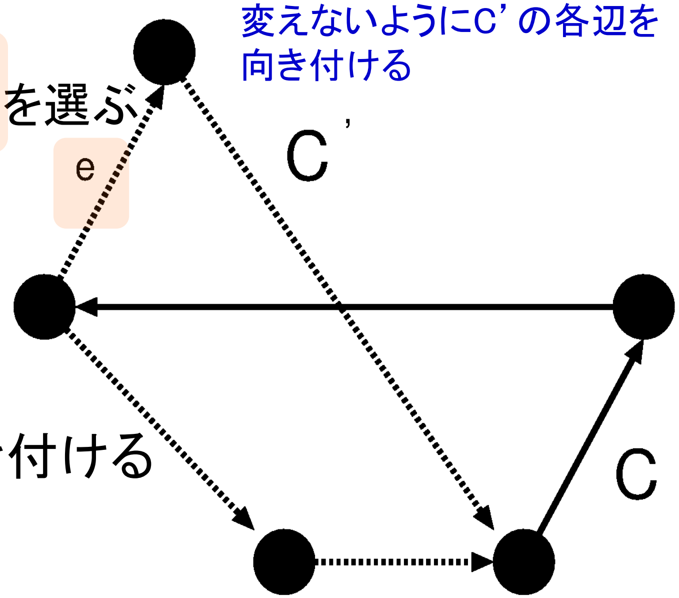
連結グラフGが向き付け可能であるための必要十分条件は
グラフGの各辺が少なくとも一つの閉路に含まれていることである

(証明) 必要性はあきらかなので、十分性を示す。

閉路Cには含まれないが、Cの書く辺に隣接している辺 e を選ぶ

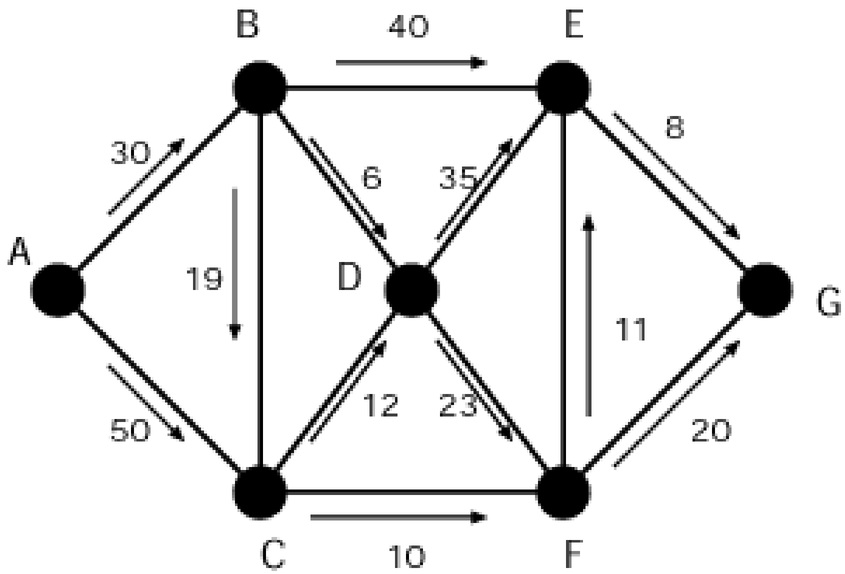
「グラフ G の各辺は少なくとも一つの閉路に含まれる」
ので、辺 e は C 以外の閉路 C' に含まれる

Cの各辺の向きを変えないように、C' の各辺を向き付ける



この操作を続けて、各ステップで少なくとも1つの辺を
向き付けると、各ステップで有向グラフは強連結なので、
グラフ全体を向き付けたのちにできるグラフは強連結である。

例題10.1（最長路を求める）



$$A:0$$

$$B: l(A)+30=30$$

$$C: l(A)+50=50$$

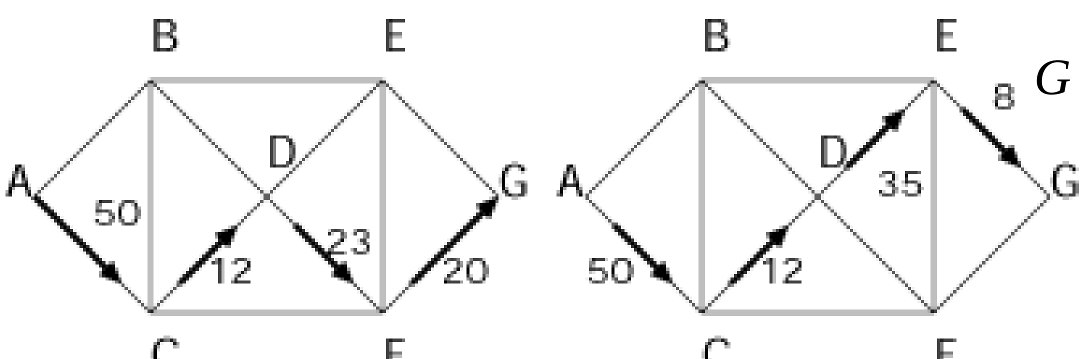
$$D: \max\{l(B)+6, l(C)+12\}$$
$$=\max\{36,62\}=62$$

$$F: \max\{l(D)+23, l(C)+10\}$$
$$=\max\{85,60\}=85$$

$$E: \max\{l(B)+8, l(B)+35, l(F)+11\}$$
$$=\max\{70,97,96\}=97$$

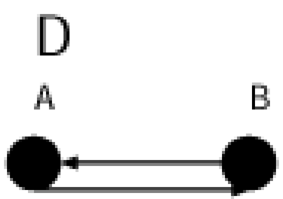
$$G: \max\{l(E)+8, l(F)+20\}$$
$$=\max\{105,105\}=105$$

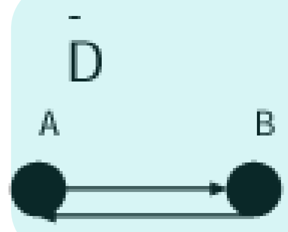
最長路の長さ



求まる2つの最長路

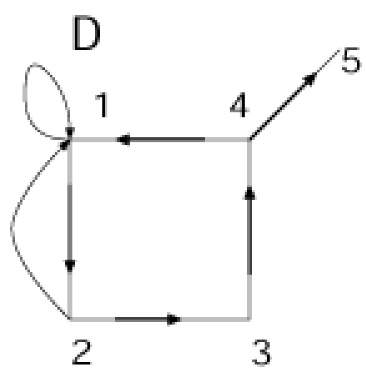
例題10.2 (有向グラフの逆)

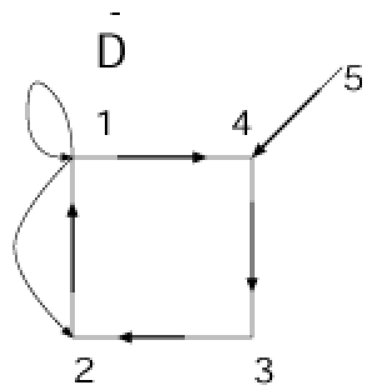




有向グラフDの逆 ：
Dの向きを反転してできるグラフ

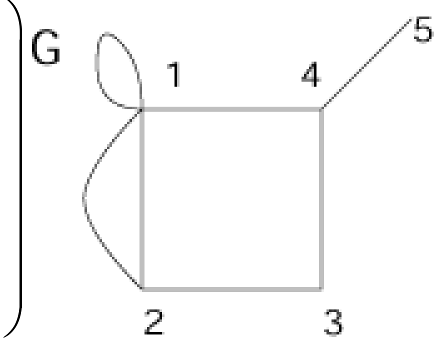
$$\mathbf{A}_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$





$$\mathbf{A}_{\widetilde{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$[\mathbf{A}_G]_{vw} = \left[\mathbf{A}_D + \mathbf{A}_{\widetilde{D}}\right]_{vw}$$

$$2[\mathbf{A}_G]_{vv} = \left[\mathbf{A}_D + \mathbf{A}_{\widetilde{D}}\right]_{vv}$$

一般に成り立つ

オイラー有向グラフ

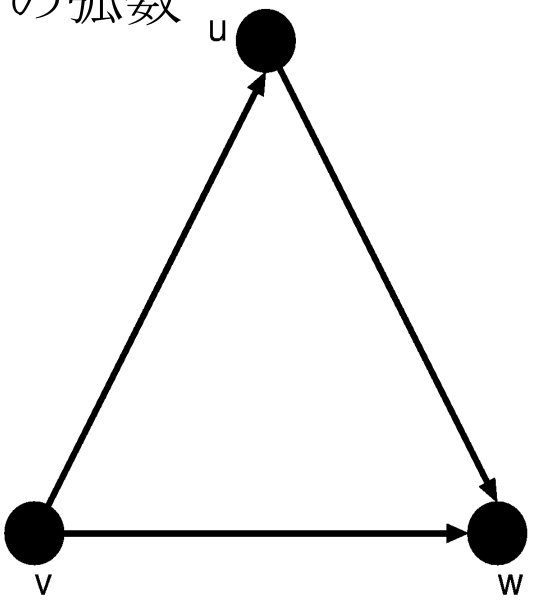
オイラー有向グラフ : 全ての弧を含む閉じた小道が存在する連結有向グラフ

入次数 indeg(v) : vw の形をした有向グラフD の弧数

出次数 outdeg(v) : wv の形をした有向グラフD の弧数

握手有向補題
有向きグラフDの全点について
入次数の合計と出次数の合計は等しい

定理23・1
連結有向グラフDがオイラーであるための必要十分条件はDの各点で outdeg (v) = indeg (v)が成立することである。



基礎グラフはオイラーであるが有向グラフとしてみるとオイラーではない例

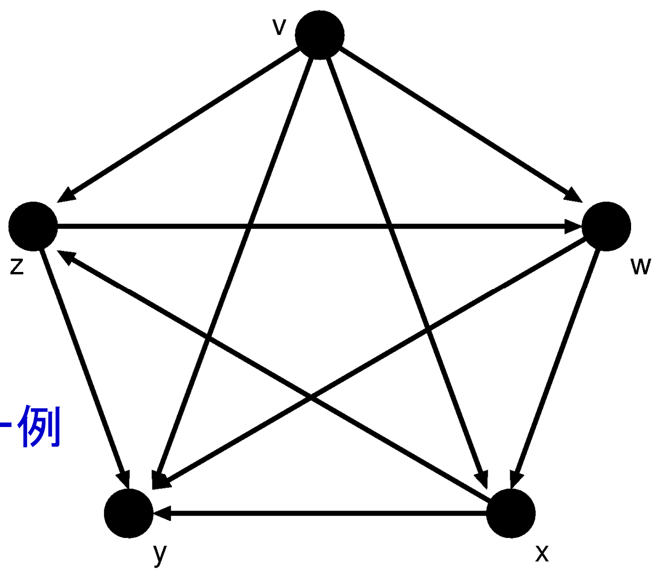
ハミルトン有向グラフ

ハミルトン有向グラフ : 全ての点を含む閉路がある有向グラフ

半ハミルトン有向グラフ : 全ての点を通る道がある有向グラフ

D は強連結有向グラフであり、点が n 個あるとする。各点 v に対し $\operatorname{out deg}(v) \geq n/2$ かつ $\operatorname{in deg}(v) \geq n/2$ ならば D はハミルトン有向グラフである。

トーナメント :
任意の2点がちょうど1本の弧で結ばれる有向グラフ



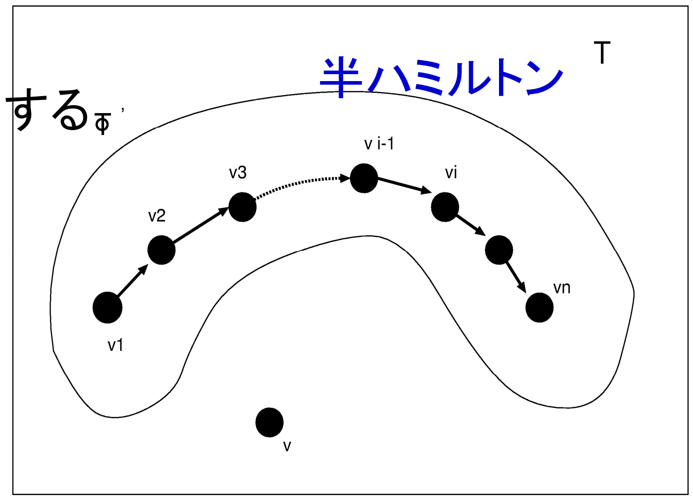
トーナメントの一例

定理23・3

(i) ハミルトンでないトーナメントは全て半ハミルトンである。
(ii) 強連結なトーナメントは全てハミルトンである。

((i)の証明)

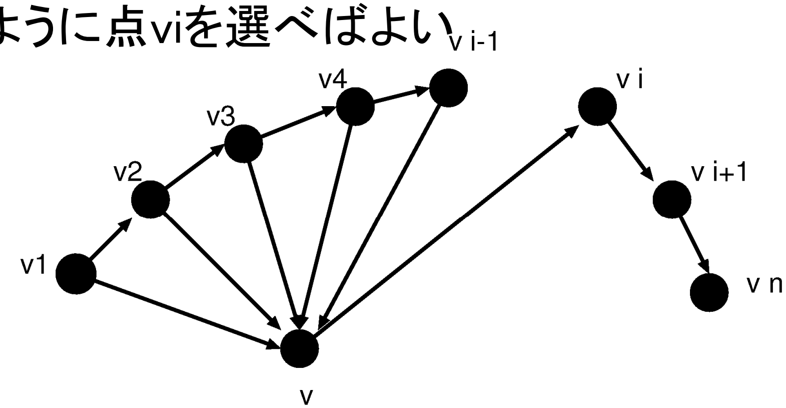
点n個のトーナメントは全て半ハミルトンであると仮定する。
図のT’にはn個の点があるので半ハミルトンである。



これに点vを加える状況(T)を考える

(1) vv1がTの弧ならば $v \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$
が所望の道である。

(2) vv1がTの弧でなく、v1vがTの弧ならば、図のように点viを選べばよい

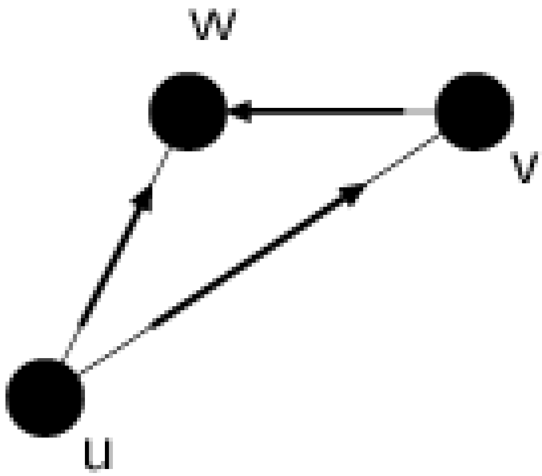


(3) vviの形をした弧がTに無ければ

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n \to v$$

が所望の道である。

例題10.3 (推移的トーナメント)



推移的トーナメントの一例

弧uvとvwがあれば必ず弧uwがある

$$1\text{位}: \mathrm{outdeg}(u) = 2, \mathrm{indeg}(u) = 0$$

$$2\text{位}: \mathrm{outdeg}(v) = 1, \mathrm{indeg}(v) = 1$$

$$3\text{位}: \mathrm{outdeg}(w) = 0, \mathrm{indeg}(w) = 2$$

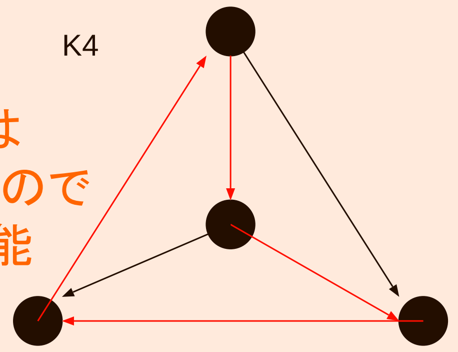
outdegの多い順に強い

indegの少ない順に強い

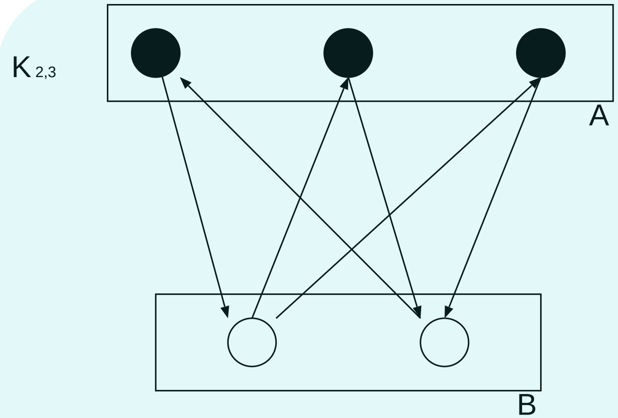
推移的トーナメントであれば必ず
$\mathrm{outdeg}(k) = 0$　となる点がある。

推移的トーナメントは強連結にはなり得な

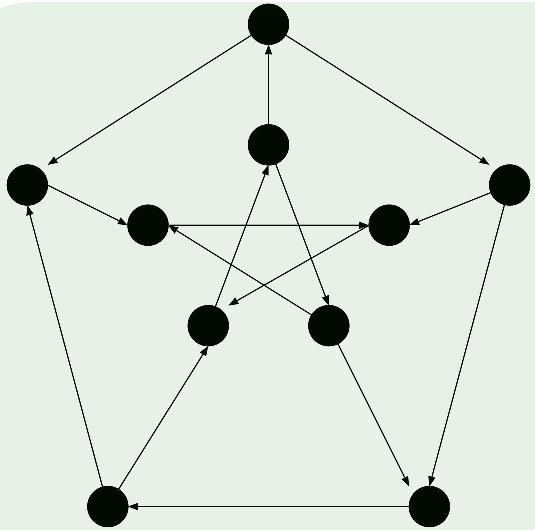
例題10.4 (グラフの向き付け)



完全グラフは
ハミルトンなので
向き付け可能



各辺が少なくとも一つの閉路
に含まれるので向き付け可能
⇒ **定理 22.1**



ピーターースン・グラフの向き付け