平成19年度 グラフ理論 期末試験解答 (9/3 実施　解答作成：井上 純一)

※ 各問題/小問の配点は問題用紙に記した通り．これ以外にも部分点を与える場合がある．

問題 1 (配点 10 点)

(1) 完全三部グラフ $K_{2,2,2}$ を描くと図 1 のようになる．

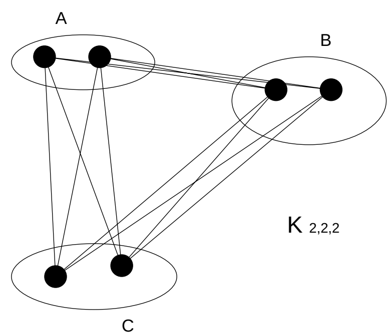

図 1: 完全三部グラフ $K_{2,2,2}$ の作図例.

(2) $K_{r,s,t}$ の辺の本数は $rs + rt + st$ 本である．

(3) 図 1 のグループ A に属する左側の点から時計周りに $1, \cdots, 6$ と各点へと番号を割り振ると隣接行列 $\boldsymbol{A}$ は以下の通り．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

問題 2 (配点 10 点)

(1) オイラー・グラフ：各辺をちょうど 1 回ずつ通る閉じた小道があるグラフ．
半オイラー・グラフ：各辺をちょうど 1 回ずつ通る小道があるグラフ．
また, 完全グラフ K_5 の全ての点の次数は 4 で偶数であるので, オイラーの定理から K_5 はオイラー・グラフであると結論づけられる．(※ 注：または, 図 2 のように具体的に閉じたオイラー小道を示しても正解).

(2) ハミルトン・グラフ：各点をちょうど 1 回ずつ通る閉じた小道があるグラフ．
半ハミルトン・グラフ：各点をちょうど 1 回ずつ通る小道のあるグラフ．
また, 完全 2 部グラフ $K_{2,3}$ は例えば, 図 3 のような点の順で回れば全ての点を 1 回ずつ通るが, 必ず出発点以外の点で終わるので半ハミルトン・グラフである．

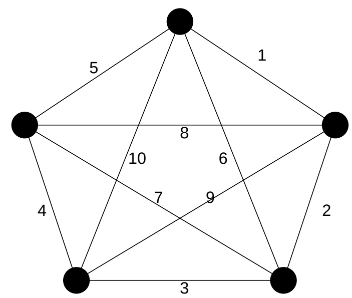

図 2: 完全グラフ K_5. 番号順に回れば, 閉じたオイラー小道が得られる.

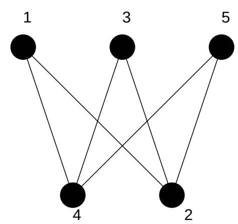

図 3: 完全二部グラフ $K_{2,3}$. 番号順に回れば, ハミルトン小道が得られるが, これは閉じない.

問題 3 (配点 10 点)

1. 完全グラフ及び, 辺が 1 本断線したグラフ (3 種類), 辺が 2 本断線したグラフ (3 種類), 辺が全て断線したグラフ (1 種類) のそれぞれのグラフを図 4 に示す. ここで注意すべきなのは, 各点がネットワークのサーバに対応するので, 「完全グラフの場合」, 及び, 「辺が 1 本だけ断線する場合」に限り, このネットワークは正常に機能する. それぞれの確率は $(1-q)^3$, $3q(1-q)^2$ である. 従って, ネットワークの信頼度 R はこれら両者の和で与えられるので, q の関数としての R は

$$R(q) \quad = \quad (1-q)^3 + 3q(1-q)^2 \tag{2}$$

となる. これを図 5 に描く.

2.

(1) 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ により与えられるグラフ G は図 6 のようになる. 従って, 求める点行列 $\boldsymbol{D}$ は

$$\boldsymbol{D} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

である.

(2) $i = j = 4$ で余因子展開することにより, グラフ G の全域木の個数 $\tau(\mathrm{G})$ は

$$\tau(\mathrm{G}) \quad = \quad (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 \cdot 3 = 7 \text{ (個)}$$

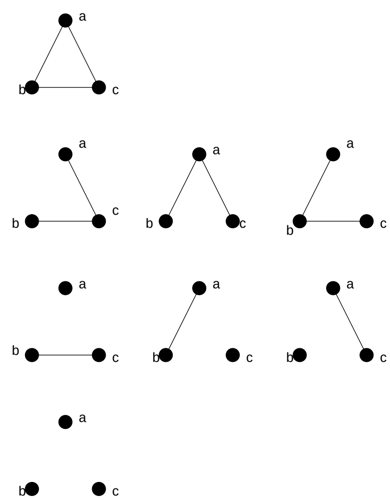

図 4: ここで考えられるネットワークの状態. 上から, 断線ゼロ, 1 本断線, 2 本断線, 全部断線のグラフ. ネットワークとして正常であるのは, 断線ゼロ, 及び, 1 本断線の場合のみ.

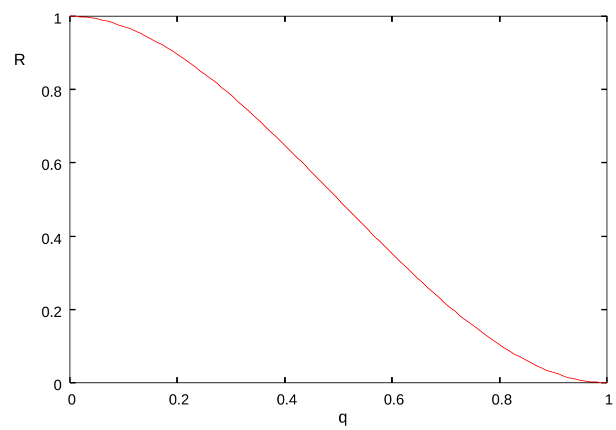

図 5: ネットワークの信頼度 R の各辺の断線確率 q 依存性.

(4)

となる.

(3) グラフ G の 7 通りの全域木を図示すると図 7 になる.

問題 4 (配点 20 点)

1. 非連結グラフ「北大」を構成する全ての成分は点数が 6 の「木」であること, 点数 n の木の彩色多項式が $k(k-1)^{n-1}$ で与えられること, 非連結グラフの個々の成分は他の成分とは独立に彩色できることに注意すると

$$P_{\text{北大}}(k) \quad = \quad k(k-1)^{n-1} \times k(k-1)^{n-1} \times k(k-1)^{n-1} = k^3(k-1)^{3n-3} \tag{5}$$

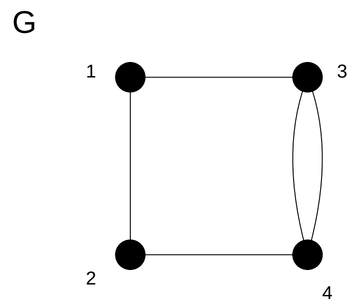

図 6: 隣接行列 $\mathbf{A}$ によって定義されるグラフ G.

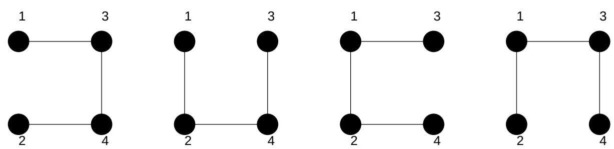

図 7: 隣接行列 $\mathbf{A}$ によって定義されるグラフ G の全域木. ただし, 辺 3 → 4 を削除するか, 辺 4 → 3 を削除するかにより, これら 4 つのグラフの中で辺 34 があるグラフにはそれぞれ 1 つずつ異なるグラフが存在するので, 計 7 つの全域木が得られる.

従って, 求める場合の数は $n = 6$, $k = 3$ の場合であるから

$$P_{\text{北大}}(3) \quad = \quad 3^3 \times 2^{15} = 884736 \tag{6}$$

となる.

2. 分解公式:

$$P_G(k) \quad = \quad P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k) \tag{7}$$

を用いて各事実を証明する. ただし, ここでは辺数 m についての帰納法を行うため, 辺数 m, 点数 n のグラフ G に対する彩色多項式を $P_G^{(m,n)}(k)$ のように書くことにしょう. このとき, グラフ $G-e$ の辺数は $m-1$, 点数が n, グラフ G/e の辺数 $m-1$, 点数 $n-1$ であるから, この定義のもとで分解公式は

$$P_G^{(m,n)}(k) \quad = \quad P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) - P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) \tag{8}$$

となる. 以下でこの公式 (8) を用いて証明を試みる.

(i) $m = 1$ のとき, グラフ G は任意の 2 点が 1 本の辺で結ばれており, 残り $n-2$ 点は孤立点であるべきなので, この場合の彩色多項式は係数も含めて陽に求めることができて

$$P_G^{(1,n)}(k) \quad = \quad k(k-1) \times k^{n-2} = k^n - k^{n-1} \tag{9}$$

となる. 従って, 明らかに題意を満たしていることがわかる. 次に辺数 $m-1$ の場合に題意の成立を仮定しよう. つまり, 彩色多項式で書けば

$$P_{G'}^{(m-1,n)}(k) \quad = \quad k^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k^{n-i} \tag{10}$$

を辺数 m, 点数 n の任意のグラフ G' に対して仮定する. このとき, グラフ G から任意の辺 e を削除したグラフ $G-e$ の彩色多項式は, グラフ $G-e$ が辺数 $m-1$, 点数 n であることから, 上のグラフ G' のカテゴリーに入ることを考えて

$$P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) \quad = \quad k^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k^{n-i} \tag{11}$$

となる．一方, G の辺 e を縮約することにより出来上がるグラフ G/e に関する彩色多項式は, 縮約操作によって点数が $n-1$ になっていることに注意して

$$P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) \quad = \quad k^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} \beta_i k^{n-i} \tag{12}$$

である．従って, 分解公式 (8) から, 辺数 m, 点数 n のグラフ G の彩色多項式は

$$P_{G}^{(m,n)}(k) \quad = \quad k^{n} - (1-\alpha_1)k^{n-1} + (k^{n-2} \text{ 以下の項}) \tag{13}$$

となる．従って, 辺数 m の場合にも題意が成立する．従って, 任意の自然数 m に対して題意が成立する．

(ii) $m=1$ のとき, 既に求めているように

$$P_{G}^{(1,n)}(k) \quad = \quad k^{n} - k^{n-1} \tag{14}$$

であるから題意の成立は明らかである．そこで辺数 $m-1$ のときに題意の成立を仮定する．つまり, 辺数 $m-1$, 点数 n のグラフ G' に対して

$$P_{G}^{(m-1,n)}(k) \quad = \quad k^{n} - (m-1)k^{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k^{n-i} \tag{15}$$

としよう．このとき (i) と同様の考察により

$$P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) \quad = \quad k^{n} - (m-1)k^{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k^{n-i} \tag{16}$$

$$P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) \quad = \quad k^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} \beta_i k^{n-i} \tag{17}$$

が得られる．従って, 分解公式 (8) を用いると辺数 m, 点数 n のグラフ G の彩色多項式は

$$\begin{aligned} P_{G}^{(m,n)}(k) \quad &= \quad k^{n} - (m-1)k^{n-1} - k^{n-1} + (k^{n-2} \text{ 以下の項}) \\ &= \quad k^{n} - mk^{n-1} + (k^{n-2} \text{ 以下の項}) \end{aligned} \tag{18}$$

となり, 辺数 m の場合にも題意が成立する．従って, 任意の自然数 m に対して題意が成立する．

(iii) $m=1$ の場合には

$$P_{G}^{(1,n)}(k) \quad = \quad k^{n} - k^{n-1} \tag{19}$$

より題意は成立する．(この場合には 2 つの項のみであることに注意.) そこで, 辺数 $m-1$ の場合に題意の成立を仮定する．つまり, 彩色多項式で書けば

$$P_{G'}^{(m-1,n)}(k) \quad = \quad k^{n} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \alpha_i k^{n-i} \tag{20}$$

を辺数 m, 点数 n の任意のグラフ G' に対して仮定する．ただし, 項ごとの符号をファクタ: $(-1)^i$ で導入した関係で, 全てのインデックス i に対して $\alpha_i > 0$ であるとして以下の議論を進めなくてはならないことに注意しょう．すると, (i)(ii) と同様の考察により

$$P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) \quad = \quad k^{n} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \alpha_i k^{n-i} \tag{21}$$

$$P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) \quad = \quad k^{n-1} - \sum_{i=2}^{n} (-1)^i \beta_i k^{n-i} \tag{22}$$

が得られる. α_i と同様の理由で, 全ての i に対して $\beta_i > 0$ である. 従って, 分解公式 (8) を用いると辺数 m, 点数 n のグラフ G の彩色多項式は

$$\begin{aligned} P_G^{(m,n)}(k) &= k^n - k^{n-1} + (-1)\alpha_1 k^{n-1} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^i(\alpha_i + \beta_i)k^{n-i} \\ &= k^n - mk^{n-1} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^i(\alpha_i + \beta_i)k^{n-i} \end{aligned} \tag{23}$$

となる. ここで (ii) で示された事実: $\alpha_1 = m - 1$ を用いた. $\alpha_i + \beta_i > 0$ より, m のときの題意の成立が示せたので, 任意の自然数 m に対して題意が成立する.