平成19年度 グラフ理論 期末試験問題 (9/3 実施　出題者：井上 純一)

※ **注意事項**：問題用紙はこの表紙を入れて 2 ページあり, **問題 1** 〜 **問題 4** の大問計 4 題である (50 点満点). 解答用紙, 計算 (下書き) 用紙は各 1 枚配布する. **解答用紙には氏名, 学科学生番号を記入し, 裏面を使う際には「裏に続く」と記入すること**. 試験開始後 30 分間は退室できない. また, 一度退室した場合には再入室できないので注意するように. どの問題から解いてもよいが, 必ず該当する問題番号を明記してから答案を作成すること. 制限時間 90 分.

『解答始め』の合図があるまで問題冊子を開かないこと

※ 解答を終え, 退室する際には必ず解答用紙を提出し, 解答例を 1 部持ち帰ること.
※ 成績分布・採点基準などは明日以降, できるだけ早い時期に講義 HP 上にて公開する. 自分自身の成績の知りたい者は 9/10 以降に情報科学研究科棟 8-13 まで来るように.

問題 1 (配点 10 点) (キーワード：完全三部グラフ, 辺数, 隣接行列)

オイラー・グラフに関して以下の問い (1)〜(3) に答えよ.

(1) 完全三部グラフ $K_{2,2,2}$ を描け **(5 点)**.
(2) 完全三部グラフ $K_{r,s,t}$ の辺数を r, s, t のうちから必要なものを用いて表せ **(3 点)**.
(3) (1) で描いた完全三部グラフ $K_{2,2,2}$ の隣接行列を求めよ. ただし, 各点の番号を明記してから答えること **(2 点)**.

問題 2 (配点 10 点) (キーワード：オイラー・グラフ, ハミルトン・グラフ, 完全グラフ, 完全二部グラフ)

(1) オイラー・グラフ, 半オイラー・グラフとはどのようなグラフか, それぞれ簡潔に説明せよ. また, 完全グラフ K_5 はオイラー・グラフ, 半オイラー・グラフ, そのどちらでもないグラフのうちのどれであるか, 理由とともに答えよ **(5 点)**.
(2) ハミルトン・グラフ, 半ハミルトン・グラフとはどのようなグラフか, 簡潔に説明せよ. また, 完全二部グラフ $\mathsf{K}_{2,3}$ はハミルトン・グラフ, 半ハミルトン・グラフ, そのどちらでもないグラフのうちのどれであるか, 理由とともに答えよ **(5 点)**.

問題 3 (配点 10 点)

1. (キーワード：完全グラフ, 連結グラフ, ネットワークのつながり方と信頼度)
完全グラフ K_3 に関し, その各点がサーバに対応し, K_3 のつながり方をした「ネットワーク」をなしているものとする. このネットワークの各辺が確率 q で断線する場合, **ラベル付きグラフが依然として連結グラフである場合に限り, このネットワークは正常に機能する**ことがわかっている. このとき, このネットワークが正常である確率 (ネットワークの信頼度) R を q の関数として求め, 図示せよ **(3 点)**.

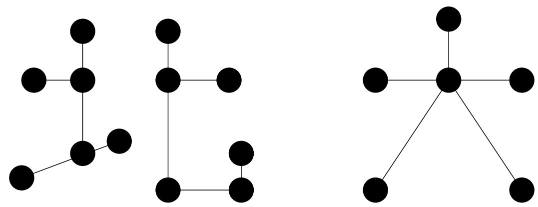
2. (キーワード：点行列, 行列木定理, 全域木とその総数)
隣接行列 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるグラフ G に関する行列木定理について以下の問いに答えよ.
(1) グラフ G の点行列 $\boldsymbol{D}$ を求めよ **(2 点)**.
(2) 行列木定理により, グラフ G の全域木の総数 $\tau(\mathrm{G})$ を求めよ **(3 点)**.
(3) (2) で得られた個数だけ存在する全域木を具体的に全て図示せよ **(2 点)**.

問題 4 (配点 20 点) (キーワード：点彩色, 彩色多項式, 辺の除去と縮約)

1. 図の「北大」を表す非連結グラフを隣同士の点が同じ色にならないように「赤」「青」「黄」の三色で彩色する際の場合の数を求めよ **(7 点)**.



2. G は点数 n, 辺数 m の単純グラフであるものとする．このとき, 彩色多項式: $P_{\mathrm{G}}(k)$ の
   (i) 主要項は k^n である **(3 点)**.
   (ii) k^{n-1} の係数は $-m$ である **(5 点)**.
   (iii) 各係数の符号は正負が交互に表れる **(5 点)**.
   をそれぞれ辺数 m に関する数学的帰納法によりそれぞれ証明せよ.