

グラフ理論 講義ノート #2

井上 純一

北海道大学 大学院情報科学研究科

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成 19 年 4 月 23 日

目次

2 定義と例	11
2.1 単純グラフ	11
2.2 同形	12
2.3 ラベル付きグラフとラベルなしグラフ	13
2.4 連結グラフ	13
2.5 次数および次数列	14
2.6 部分グラフ	15
2.7 行列によるグラフの表現方法	15

演習問題 1 の解答例

(1) 例えば, 展示会の会場を設計する場合, 各ブース (点とみなす) に出し物があり, 来場者に各ブースを 2 度以上通らずに会場内をまわり, 入口から出口 (入り口と共用) へとスムーズに移動してもらうためには, ハミルトン・グラフが適しており, ハミルトン・グラフの各頂点に各ブースが対応するような会場を設計すれば良い. 一方, 展示物が各ブースではなく, 各通路に展示されているような場合. 例えば, 美術館などに展示されている絵画は順路上に掲げられている場合が多いが, このような場合には来客が入り口から全ての通路を 1 回だけ通り, 一筆書きの順路で出口 (入り口と共用) へと戻れるように会場を設計することが望ましい. この場合にはオイラー・グラフが適している.

また, 雪国である札幌市特有の問題として「市内の除雪作業」がある. この場合, 除雪車の巡回経路はオイラー・グラフであることが望ましい. では実際, 札幌市内の道路をオイラー・グラフとみなして良いか否かであるが, 市内の主な道路は交差点の各々が「北 14 条西 9 丁目」のように指定される「碁盤の目」のように区画化されていることに注意すると, 各道路の交差点での次数は 4 であることから (市内の最外郭を無視した「部分グラフ」を取り出すと), 後に詳しくみるオイラーの定理より, オイラー・グラフとみなすことができる. 従って, このオイラー・グラフ上のオイラー閉路を適切に選んで除雪車を巡回させることで, 既に除雪した道路は 2 度と通らないで済むという意味でコストを削減することができる. もっとも, 市内の住宅街周辺のローカルな道路 (除雪作業においては, より本質的である) は碁盤の目状ではなく, (当然奇数次の点も含む) より複雑な形状であるため, そのようなローカルな道路も含めた場合, オイラー閉路が存在しない場合もあることに注意しなければならない.

(2) 問題の点, 辺集合からなるグラフを実際に描いてみるととなる. このグラフは (点数 5 の) 完全グラフと呼ばれ, 例えば次のような特徴を有する.

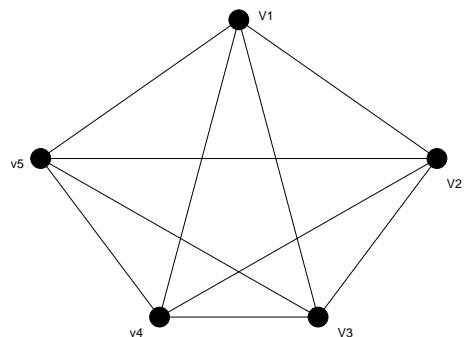


図 13: 答えのグラフ. 完全グラフと呼ばれる.

- 全ての点は自分以外の全ての点と結ばれる.
- 問題のグラフは 10 本の辺を有する. (一般に辺の数は点数を n とすると $nC_2 = n(n-1)/2$ 本ある.)
- オイラー・グラフであり, ハミルトン・グラフでもある. ただし, オイラー・グラフであるのは点の個数が奇数のときのみ. 今の場合は点数 5 なのでオイラー.

この完全グラフは今後頻出するので覚えておくと良い.

2 定義と例

この節ではグラフ理論に現れる数々の定義を例を交えながら解説する. 部分的に前回講義で紹介した事項をも含むが, 例えば「同形」の定義など, より正確な記述をここから学んで行くことになる.

2.1 単純グラフ

単純グラフ: グラフにループが含まれず, 頂点のどの対も高々1つのリンクで結ばれているグラフ.

$V(G)$: グラフ G の点集合 (vertex set)

$E(G)$: グラフ G の辺集合 (edge set)

ψ_G : グラフ G の接続関数 (incidence function)

どのグラフ (単純グラフも含む) G も $V(G)$ と $E(G)$ からなる.

難しく言うと \Rightarrow 『グラフ G は $V(G)$ と $V(G)$ の元非順序対からなる有限な族 (複数個の同じ元があってもよい) である $E(G)$ からなる.』

図 14 に単純グラフとその点集合及び辺集合を載せる. 前出のグラフ G の接続関数とは G の各辺に G の頂点の対を対応させる関数であり, この図の例でいくと

$$\psi_G(e_1) = uv, \quad \psi_G(e_2) = vw$$

$$\psi_G(e_3) = wu, \quad \psi_G(e_4) = wz$$

のようになる.

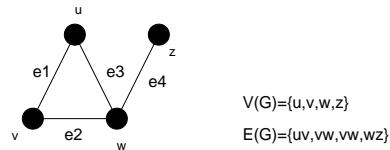


図 14: 単純グラフ G の例と点集合 $V(G)$ 及び辺集合 $E(G)$.

一方, 図 15 に一般グラフ (general graph) (ループや多重辺をも許されたグラフ) の一例を載せる. この図において各辺の現れる回数は uv (1 回), vv (ループ, 2 回), vw (3 回), uw (2 回), wz (1 回) である.

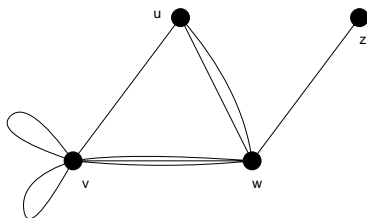


図 15: 一般グラフ G の一例.

2.2 同形

2 つのグラフ G_1 と G_2 の間に一対一の対応関係があり, G_1 の任意の 2 点を結ぶ辺数が G_2 の対応する 2 点を結ぶ辺数に等しいとき, G_1 と G_2 は同形 (isomorphic) であるという. 図 16 の 2 つのグラフ G_1 及び

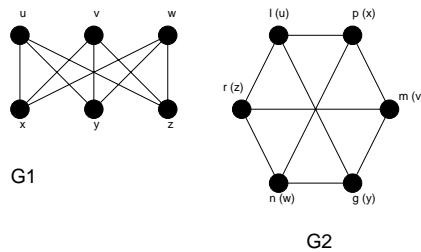


図 16: 同形グラフ G_1 と G_2 .

G_2 は同形であり, G_2 中に書き込んだような対応関係を持つ.

(補足事項)

先に定義した接続関数を用いると, 2 つのグラフ G_1, G_2 が同形であるとき, 1 対 1 写像 :

$$\theta : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$$

$$\phi : E(G_1) \rightarrow E(G_2)$$

が次の関係 :

$$\psi_{G_1}(e) = uv \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

が成り立つ. このような写像の対 (ϕ, θ) を G_1, G_2 間の同形写像と呼び, この同形写像が存在する場合, G_1, G_2 は同形であると言い, 式では $G_1 \cong G_2$ と表現する.

これを実際に図 16 の G_1, G_2 で確かめると

$$\begin{aligned} \theta(u) &= l, \theta(v) = m, \theta(w) = n \\ \theta(x) &= p, \theta(y) = q, \theta(z) = r \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} \phi(\overline{ux}) &= \overline{lp} = \overline{\theta(u)\theta(x)} \\ \phi(\overline{uz}) &= \overline{lr} = \overline{\theta(u)\theta(z)} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

となるから

$$\psi_{G_1}(\overline{ux}) = ux \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ux})) = \psi_{G_2}(\overline{lp}) = lp = \theta(u)\theta(x)$$

等の成立が確かめられ, 従って, 図 16 の G_1, G_2 は同形であることがわかる (もちろん, この場合の写像 ϕ, θ は同形写像である).

2.3 ラベル付きグラフとラベルなしグラフ

各点に名前の付されたグラフをラベル付きグラフと呼ぶ. 前回の講義でみた例題 1.1 で扱った炭素原子を並べた木に関しても, この課題では「ラベルなし」としてその場合を数えたが, ラベル付きの木として扱う際には図の 2 つの木は別個の木として扱うことになる.

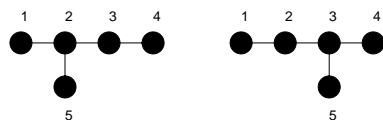


図 17: 例題 1 で扱った炭素原子の木をラベル付きで考えると両者は異なる木とみなされる.

2.4 連結グラフ

連結グラフとは平たく言えば「一つにつながっているグラフ」ということになるが, 点同士が「連結する」「連結される」という概念を用いると, 下記のように, もう少し丁寧に連結グラフを定義することができる.

まず、グラフ G の点 u, v に関して、 G に u, v を結ぶ道があれば、 u は v に連結されると言う。

そこで、グラフ G を構成する任意の 2 点 u, v に対し、

$$u \text{ は } v \text{ に連結される} \iff u \text{ は } v \text{ と同じ } V_i \text{ に属する}$$

というようにグラフ G を G の点からなる空でない部分集合 $V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_n$ で分割したとき、各集合からなる部分グラフ $G(V_1), G(V_2), \dots, G(V_n)$ をそれぞれグラフ G の成分 (component) と呼び、成分が 1 つだけのグラフを連結グラフ (connected graph) と定義する。図 18 に連結グラフ (G_1) 及び、成分数が 3 である非連結グラフ (G_2) の例を載せる。言うまでもないことだが、非連結グラフ (disconnected

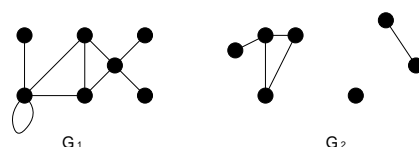


図 18: 連結グラフ G_1 と非連結グラフ G_2 . G_2 の成分数は 3 である。

graph) とは連結グラフでないグラフのことである。

2.5 次数および次数列

グラフ G 及びその中の点 v に関する、次にあげる重要な概念を押さえておこう。

- 点 v の次数 (degree)
 - v に接続している辺の本数. ただし、ループの場合は 2 本とカウントする. 式で書くと $\deg(v)$ となる.
- 孤立点 (isolated vertex)
 - 次数ゼロの点
- 端点 (end-vertex)
 - 次数 1 の点
- グラフ G の次数列 (degree sequence)
 - 次数を増加順に記したもの. 必要となれば同じ次数を繰り返しても良い. 図 18 の G_1 の例で言うと、この連結グラフの次数列は $(1, 1, 1, 3, 3, 4, 5)$.

また、グラフの次数に関して次の有名な補題が知られている。

握手補題 (handshaking lemma) : 任意のグラフの全ての点の次数を合計すれば必ず偶数になる。

また、整数列 d_1, d_2, \dots, d_n が与えられたとき、 n 個の点からなるグラフ G に対し、各 i に関して

$$\deg(v_i) = d_i \tag{2}$$

が成立するとき、数列 d_1, d_2, \dots, d_n はグラフ的であるという。例えば、数列 $(4, 3, 2, 2, 1)$ はグラフ的であり、そのグラフは図 19 である。対応関係は

$$d(v_1) = 4, d(v_2) = 3, d(v_3) = 2, d(v_4) = 2, d(v_5) = 1 \tag{3}$$

となる。

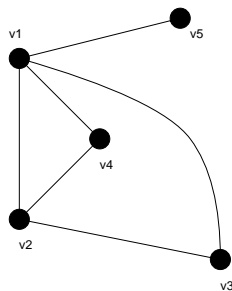


図 19: 「グラフ的」であるグラフの一例.

2.6 部分グラフ

グラフ G の部分グラフ (subgraph) : 点が全て $V(G)$ に属し, その辺が全て $E(G)$ に属するグラフ.

従って, いかなる場合にも, グラフ G の点と辺の除去, 及び辺の縮約 (辺を除去し, その辺の両端についていた 2 点を同一視して 1 点にすること) という操作を行うことにより, グラフ G の部分グラフを作ることができる.

2.7 行列によるグラフの表現方法

グラフを計算機上で表現する場合には個々のグラフの特徴を数量化し, その数字を用いてコーディングする必要がある. このとき, 下記に挙げる隣接行列及び, 接続行列という行列による表現方法が便利である.

グラフ G の点及び辺が $1, 2, \dots, n, 1, 2, \dots, m$ とそれぞれラベル付けされているとすると

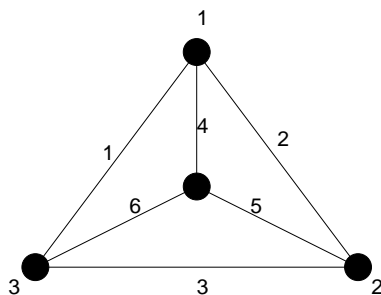
隣接行列 (adjacency matrix) : 点 i と点 j を結ぶ辺の本数を第 ij 要素とする $n \times n$ の行列

接続行列 (incidence matrix) : 点 i が辺 j に接続している場合, 第 ij 要素が 1 であり, 接続していない場合 0 であるような $n \times m$ の行列¹

¹ 点 v において辺 e が「ループ」として接続している場合, このグラフの接続行列の第 ve 成分を, 教科書によっては 1 と定義しているものと 2 と定義している 2 通りがあるようであるが, この講義ではこの場合 1 として接続行列を定義する. 従って, 接続行列の成分は必ず 0 か 1 である.

例題 2.1 (2003 年度 レポート課題 #1 問題 1)

図に与えられたグラフについて以下の問いに答えよ.



- (1) このグラフの次数列を書け.
- (2) 図のグラフに対して隣接行列 A 及び接続行列 M を求めよ.

(解答例)

- (1) 次数列は $(3, 3, 3, 3)$.
- (2) それぞれの定義に従えば隣接行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

接続行列 M は

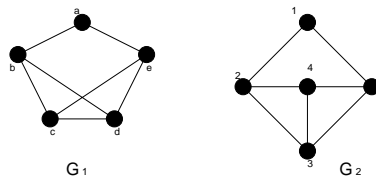
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

となる.

例題 2.2 (2004 年度 演習問題 2)

以下の問題に答えよ.

1. 図の G_1 と G_2 の間の同形写像 ϕ, θ を見つけよ.



また, G_1 の任意の辺 e 及び点 u, v に対して

$$\psi_{G_1}(e) = uv \iff \psi_{G_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

が成り立っていることを 2,3 の $\{e, u, v\}$ の組に対して確かめよ.

2. 図 16 のグラフ G_2 の部分グラフを 2 つ挙げよ.
 3. 次の隣接行列 A , 接続行列 M で与えられるグラフをそれぞれ描け.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(解答例)

1. 求める同形写像 θ, ϕ はグラフ G_1, G_2 の各点に対して

$$\theta(a) = 1, \theta(b) = 2, \theta(c) = 3, \theta(d) = 4, \theta(e) = 5$$

各辺に対して

$$\begin{aligned} \phi(\overline{ab}) &= \overline{12}, \phi(\overline{bc}) = \overline{23}, \phi(\overline{cd}) = \overline{34}, \phi(\overline{bd}) = \overline{24} \\ \phi(\overline{de}) &= \overline{45}, \phi(\overline{ce}) = \overline{35}, \phi(\overline{ea}) = \overline{51} \end{aligned}$$

従って, この写像の下で

$$\begin{aligned} \psi_{G_1}(\overline{ab}) = ab &\iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{ab})) = \psi_{G_2}(\overline{12}) = \theta(a)\theta(b) \\ \psi_{G_1}(\overline{bc}) = bc &\iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{bc})) = \psi_{G_2}(\overline{23}) = \theta(b)\theta(c) \\ \psi_{G_1}(\overline{cd}) = cd &\iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{cd})) = \psi_{G_2}(\overline{34}) = \theta(c)\theta(d) \\ \psi_{G_1}(\overline{de}) = de &\iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{de})) = \psi_{G_2}(\overline{45}) = \theta(d)\theta(e) \\ \psi_{G_1}(\overline{ea}) = ea &\iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{ea})) = \psi_{G_2}(\overline{51}) = \theta(e)\theta(a) \\ \psi_{G_1}(\overline{ce}) = ce &\iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{ce})) = \psi_{G_2}(\overline{35}) = \theta(c)\theta(e) \\ \psi_{G_1}(\overline{bd}) = bd &\iff \psi_{G_2}(\phi(\overline{bd})) = \psi_{G_2}(\overline{24}) = \theta(b)\theta(d) \end{aligned}$$

が成り立つ.

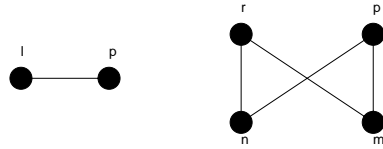


図 20: グラフ G_2 の部分グラフの例.

2. 例えば図 20 のようなグラフが G_2 の部分グラフである.
3. まず、隣接行列 A について考える. この隣接行列のサイズから、求めるグラフの点の数は $n = 5$ であり、隣接行列は必ず対称行列であることに注意しよう. また、この行列 A の対角成分は全てゼロであることから、このグラフにはループが含まれないことが直ちにわかる. 以上に注意しながら隣接行列の定義に従ってグラフを描くと図 21 のようになる. もちろん、この図と全く同じでなくても、同形なグラ

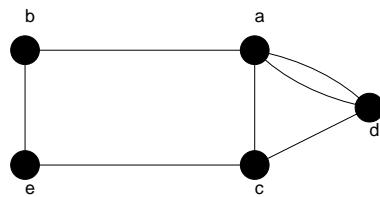


図 21: 隣接行列が A で与えられるグラフ. ここで、隣接行列 A の第 1 行, 2 行, ... の番号として、図の点 a, b, \dots が対応していることに注意.

フならば正解である.

次は接続行列 M を持つグラフに関してであるが、以下の点に注意しながら考察するとグラフが描きやすい.

- 隣接行列の各列には必ず 2 個の 1 があり、対応する行の番号が付された点同士が結ばれ、それにより出来上がる辺にはその列の番号が割り当てられる.
- 第 i 行, 第 j 行に 1 が立っている列が l 本ある場合、点 i, j 間には l 重の多重辺が存在する.

以上に注意しながらグラフを描くと図 22 のようになる.

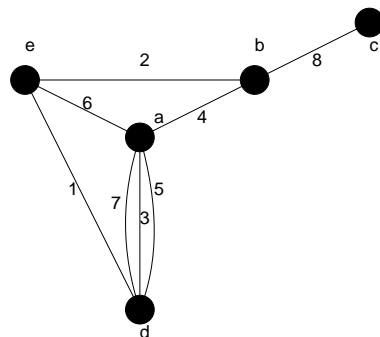
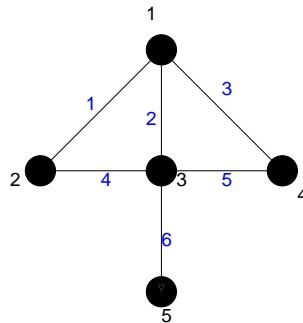


図 22: 接続行列が M で与えられるグラフ. ここで、接続行列 M の第 1 列, 2 列 ... の番号として、図の a, b, \dots が対応していることに注意.

例題 2.3 (2005 年度 演習問題 2)

以下の問いに答えよ.

- (1) 5 個の点と 8 本の辺をもつ次のようなグラフを描け.
 - (i) 単純グラフ
 - (ii) ループがない, 単純でないグラフ
 - (iii) 多重辺がない, 単純でないグラフ
- (2) 図に与えられるグラフの隣接行列 A , 接続行列 M を求めよ.



- (3) 6 点からなるグラフで, 各点の次数列が $(3, 3, 5, 5, 5, 5)$ であるものを描け. この次数をもつ単純グラフは存在するか?

(解答例)

- 1. (i)(ii)(iii) を満たすグラフは図 23 のようになる.

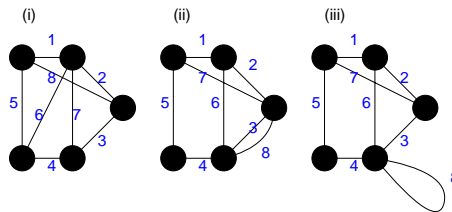


図 23: 5 個の点と 8 本の辺をもつグラフで条件 (i)(ii)(iii) を満たすもの.

- 2. 定義に従えば, 隣接行列 A , 接続行列 M は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

- 3. 図 24 を参照. 単純グラフは無い.

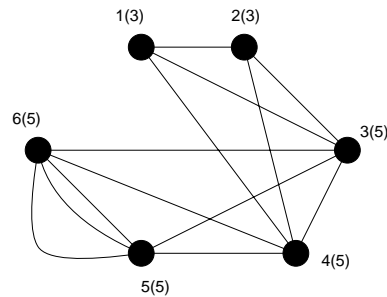


図 24: 6 点からなるグラフで次数列 $(3, 3, 5, 5, 5, 5)$ であるもの。

例題 2.4 (2006 年度 **演習問題 2**)

以下の問いに答えよ。

- (1) 講義ノート #1 の例題 1.3 (2) の解答に載せた図の二部グラフの隣接行列と接続行列, 及び次数列をそれぞれ求めよ。ただし, 接続行列を求める際には, 各自がどのように各辺に番号を付したのかを明示して解答を作成すること。
- (2) 次数列 $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ はグラフ的か? 理由とともに答えよ。
- (3) 例題 2.2 の 1. にならって図 25 に載せた 2 つのグラフ G_1, G_2 の同形写像 θ, ϕ を見つけ, G_1 の任意の辺 e 及び点 u, v に対して

$$\psi_{G_1}(e) = uv \iff \psi_{G_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

が成り立っていることを $\{e, u, v\}$ の組に対して確かめよ。

(解答例)

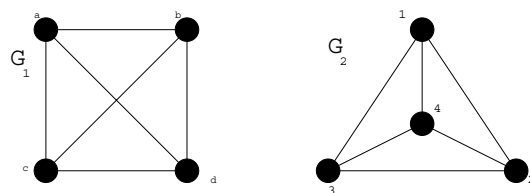


図 25: ここでその同形性を議論するグラフ G_1, G_2 .

(1) 問題の二部グラフの隣接行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

となる. また, 図 26 のように各辺に番号を振ると, このグラフの接続行列 M は

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

と書ける.

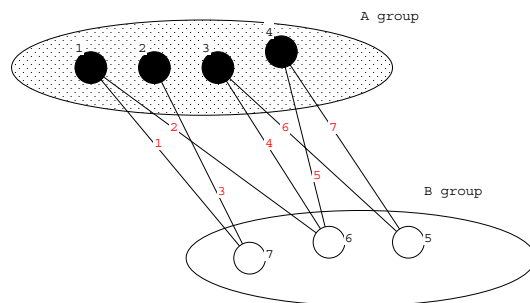


図 26: 図のように各辺に番号を振って接続行列を求める.

(2) 図 27 に描いた完全二部グラフ $K_{3,3}$ の次数列は $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ であるから, この次数列 $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ は「グラフ的」である.

完全二部グラフ $K_{3,3}$ の描き方は解答例以外にも様々考えられる. この解答例と同形なグラフであれば正解.

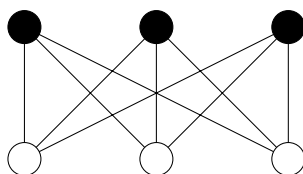


図 27: 図の完全二部グラフの次数列は $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ である.

(3) 写像 θ, ϕ を

$$\theta(a) = 1, \theta(b) = 2, \theta(c) = 3, \theta(d) = 4 \tag{9}$$

$$\phi(\overline{ab}) = \overline{12}, \phi(\overline{ac}) = \overline{13}, \phi(\overline{ad}) = \overline{14}, \phi(\overline{bd}) = \overline{24}, \phi(\overline{cd}) = \overline{34}, \phi(\overline{bc}) = \overline{23} \tag{10}$$

とすれば, 接続関数 ψ_{G_1}, ψ_{G_2} に対して

$$\psi_{G_1}(\overline{ab}) = ab \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ab})) = \psi_{G_2}(\overline{12}) = 12 = \theta(a)\theta(b) \tag{11}$$

$$\psi_{G_1}(\overline{ac}) = ac \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ac})) = \psi_{G_2}(\overline{13}) = 13 = \theta(a)\theta(c) \tag{12}$$

$$\psi_{G_1}(\overline{ad}) = ad \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ad})) = \psi_{G_2}(\overline{14}) = 14 = \theta(a)\theta(d) \tag{13}$$

$$\psi_{G_1}(\overline{bd}) = bd \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{bd})) = \psi_{G_2}(\overline{24}) = 24 = \theta(b)\theta(d) \tag{14}$$

$$\psi_{G_1}(\overline{cd}) = cd \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{cd})) = \psi_{G_2}(\overline{34}) = 34 = \theta(c)\theta(d) \tag{15}$$

$$\psi_{G_1}(\overline{bc}) = bc \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{bc})) = \psi_{G_2}(\overline{23}) = 23 = \theta(b)\theta(c) \tag{16}$$

が成り立つ. 従って, グラフ G_1, G_2 は同形である.

以下の一連の例題とその解答例では連結グラフを地下鉄の路線図に見立てた場合の交通量, 乗客の流れ等をグラフ理論を用いて考察する方法を例題形式で見ていく. もちろん, ここで取り上げるグラフで話が済むような, そんな単純な地下鉄路線は東京にもロンドンにもなく(札幌の地下鉄はかなりシンプルだが, ほとんど閉路を含まない「木」であるように思われる), その意味で現実の問題とは程遠いが, ここで学ぶ方法・概念を, より大きなサイズの複雑なグラフへと応用することで実際の地下鉄路線の問題を扱うことは, サイズ増加にともなう計算技術上の問題をクリアしさえすれば, いつでも可能であることに注意されたい. 下記の例題 2.5-a から例題 2.5-f は我々が最終的に調べたい例題 2.5-g へ向けての誘導となっている.

例題 2.5-a (2004 年度情報工学演習 II(B) #2)

グラフ G の任意の 2 点 u, v 間の距離を $d(u, v)$ とする. 今, 点 u を固定し, $v (\neq u)$ を任意の G 内の点とすると, $d(u, v)$ の最大値を点 u からの最遠距離と定義し, $e(u)$ と書くことにする. また, G 内の全ての点 u に対する $e(u)$ の最小値をグラフ G の半径と呼び, $R(G)$ と書く. さらに, 全ての u に対する $e(u)$ の最大値を G の直径と呼び, $D(G)$ と書く. また, 半径に等しい最短距離を持つ点の集合を G の中心と呼び, 最遠距離を持つ点の集合を G の周辺と言う. 例えば図 28(左) のグラフ G を例にとれば各点の最遠距離は $e(1) = 2, e(2) = 2, e(3) = 2, e(4) = 2, e(5) = 2$ であり, $R(G) = 2, D(G) = 2$, 中心は $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 周辺は $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ である.

これを参考にして図 28(右) のグラフの各点の最遠距離, 半径, 直径, 中心, 及び, 周辺を求めよ.

(解答例)

まず, u, v 間の距離 $d(u, v)$ とは点 u から点 v へ至る経路の中での最短路であることに注意する. すると, 問題の図 28(右) の点 1 を基点とした際の各他点への距離は

$$d(1, 2) = 2, d(1, 3) = 2, d(1, 4) = 3, d(1, 5) = 2, d(1, 6) = 1 \tag{17}$$

であるから, 点 1 に関する最遠距離 $e(1)$ は

$$e(1) = \max_{y \neq 1} d(1, y) = 3 \tag{18}$$

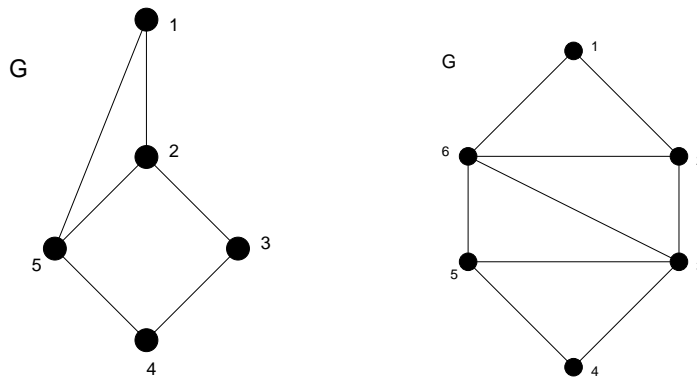


図 28: グラフ G(左) の各点の最遠距離は $e(1) = 2, e(2) = 2, e(3) = 2, e(4) = 2, e(5) = 2$ であり, $R(G) = 2, D(G) = 2$, 中心は $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 周辺は $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ である. 右がここで考える連結グラフ G(地下鉄路線図).

となる. $2, \dots, 6$ を基点とした場合も (17)(18) と同様にして順次, 最遠距離を求めていくと

$$d(2, 1) = 1, d(2, 3) = 1, d(2, 4) = 2, d(2, 5) = 1, d(2, 6) = 1, e(2) = \max_{y \neq 2} d(2, y) = 2$$

$$d(3, 1) = 2, d(3, 2) = 1, d(3, 4) = 1, d(3, 5) = 1, d(3, 6) = 2, e(3) = \max_{y \neq 3} d(3, y) = 2$$

$$d(4, 1) = 3, d(4, 2) = 2, d(4, 3) = 1, d(4, 5) = 1, d(4, 6) = 2, e(4) = \max_{y \neq 4} d(4, y) = 3$$

$$d(5, 1) = 2, d(5, 2) = 1, d(5, 3) = 1, d(5, 4) = 1, d(5, 6) = 1, e(5) = \max_{y \neq 5} d(5, y) = 2$$

$$d(6, 1) = 1, d(6, 2) = 1, d(6, 3) = 2, d(6, 4) = 2, d(6, 5) = 1, e(6) = \max_{y \neq 6} d(6, y) = 2$$

以上の結果から, 問題文中, 図 28 (右) のグラフ G の半径 $R(G)$, 及び, 直径 $D(G)$ は

$$R(G) \equiv \min_x e(x) = 2 \tag{19}$$

$$D(G) \equiv \max_x e(x) = 3 \tag{20}$$

となる. また, 中心は $\{2, 3, 4, 5\}$, 周辺は $\{1, 4\}$ である.

例題 2.5-b (2004 年度情報工学演習 II(B) #2)

A をグラフ G の隣接行列とすると, 次の和 :

$$S(r) = A + A^2 + A^3 + \dots + A^r = \sum_{k=1}^r A^k \tag{21}$$

の要素 $[S(r)]_{ij}$ は点 i から点 j に至る長さ r 以下の歩道の総数であることを図 28(右) のグラフ G の例を用いて示せ. また, (21) 式で r の値を 1 から徐々に増やしていったとき, $S(r)$ の非対角要素が全て非ゼロになったときの r の値は, 例題 2.5-a で述べた直径 $D(G)$ になっていることを図 28(右) の G に対して示せ.

(解答例)

まず, グラフ G の隣接行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

である. 従って, やや退屈ではあるが, この隣接行列に関して A^2, A^3 を逐次計算してみると

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 8 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 4 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 3 & 9 & 7 & 6 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad (23)$$

となる (A が対称行列であるから, A^2, A^3 も対称行列であることに注意). よって, $S(1), S(2), S(3)$ は順次に

$$S(1) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$S(2) = A + A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$S(3) = A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 & 3 & 5 & 8 \\ 8 & 10 & 10 & 5 & 12 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 7 & 10 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 4 & 8 & 4 \\ 5 & 12 & 10 & 8 & 10 & 10 \\ 7 & 10 & 6 & 4 & 10 & 7 \end{pmatrix} \quad (26)$$

となり, $r = 3$ で初めて, $S(r)$ は要素が全て非ゼロとなる. 従って, この $r = 3$ は例題 2.5-a で求めた直径 $D(G)$ に等しいことがわかる.

例題 2.5-c (2004 年度情報工学演習 II(B) #2)

例題 2.5-b での $S(r)$ の代わりに, η を $\eta \geq 1$ の定数として

$$W(r) = \frac{A}{\eta} + \left(\frac{A}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{A}{\eta}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{A}{\eta}\right)^r = \sum_{k=1}^r \left(\frac{A}{\eta}\right)^k \quad (27)$$

を考える. 例えば, これは図 28(右) のグラフ G が地下鉄の路線図であるとするならば, 「近い駅間ほど乗客の利用頻度 (価値) が高い」 などのように現実の問題と関連させ, 意味づけすることができる. さて, この行列 $W(r)$ に対し

$$C_r(i, r) = [W(r)]_{1i} + [W(r)]_{2i} + \cdots + [W(r)]_{ni} = \sum_{j=1}^n [W(r)]_{ji} \quad (28)$$

を点 i における長さ r のターミナル容量と呼ぶ. 図 28(右) のグラフ G の各点に対して長さ 2 のターミナル容量を求めよ. ただし, $\eta = 6$ とする. また, 図 28(右) のグラフを地下鉄の路線図と考えた場合, ここで得られた結果は何を意味するか, を簡潔に述べよ.

(解答例)

問題文の定義に従って, $W(2)$ を求めてみる. $\eta = 6$ であるから直ちに

$$\begin{aligned} W(2) &= \frac{1}{\eta} A + \frac{1}{\eta^2} A^2 \\ &= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 0 & 2 & 7 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 8 & 8 \\ 1 & 7 & 3 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 8 & 7 & 4 & 7 \\ 7 & 8 & 2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad (29) \end{aligned}$$

となる.

従って, $C_2(i, 2)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} C_2(1, 2) &= \frac{1}{36}(2 + 7 + 1 + 0 + 2 + 7) = \frac{19}{36} \\ C_2(2, 2) &= \frac{1}{36}(7 + 4 + 7 + 2 + 8 + 8) = \frac{36}{36} \\ C_2(3, 2) &= \frac{1}{36}(1 + 7 + 3 + 7 + 8 + 2) = \frac{28}{36} \\ C_2(4, 2) &= \frac{1}{36}(0 + 2 + 7 + 2 + 7 + 1) = \frac{19}{36} \\ C_2(5, 2) &= \frac{1}{36}(2 + 8 + 8 + 7 + 4 + 7) = \frac{36}{36} \\ C_2(6, 2) &= \frac{1}{36}(7 + 8 + 2 + 1 + 7 + 3) = \frac{28}{36} \end{aligned}$$

が得られる.

ここで, $\eta = 1$ の場合を考えてみると, 隣接行列の積の性質から $C_2(i, 2)$ の値は, グラフ G の全ての点から点 i に至る 2 以下の歩道が何本あるか, を表し, $\eta = 6$ の場合には, 長さ 1 の歩道の方が, 長さ 2 の歩道よりも利用価値が高いということであるから, ここで得られた結果は, 利用価値をも考慮に入れた場合の地下鉄各駅 i の利用頻度 (乗客量) を表している. この観点からは, 駅 2, 5 が最も乗客量が多く, 1, 4 が最も少な

い. これはグラフ G の形状から明らかであろう. しかし, グラフのサイズが大きくなり, 複雑になってくれば, ここでの系統的な分析方法が有効となってくる.

なお, $D(G) = 3$ であるから, $W(3)$, 及び, $C_3(i, 3)$ をついでに求めておくと

$$\begin{aligned}
 W(3) &= \frac{1}{\eta} A + \frac{1}{\eta^2} A^2 + \frac{1}{\eta^3} A^3 \\
 &= W(2) + \frac{1}{\eta^3} A^3 \\
 &= \frac{1}{216} \begin{pmatrix} 12 & 42 & 6 & 0 & 12 & 42 \\ 42 & 24 & 42 & 12 & 48 & 48 \\ 6 & 42 & 18 & 42 & 48 & 12 \\ 0 & 12 & 42 & 12 & 42 & 6 \\ 12 & 48 & 48 & 42 & 24 & 42 \\ 42 & 48 & 12 & 6 & 42 & 18 \end{pmatrix} + \frac{1}{216} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 8 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 4 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 7 & 6 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{216} \begin{pmatrix} 14 & 48 & 9 & 3 & 15 & 47 \\ 48 & 30 & 50 & 15 & 57 & 55 \\ 9 & 50 & 22 & 47 & 55 & 16 \\ 5 & 15 & 47 & 14 & 48 & 9 \\ 15 & 57 & 55 & 48 & 30 & 50 \\ 47 & 55 & 16 & 9 & 50 & 22 \end{pmatrix} \tag{30}
 \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
 C_3(1, 3) &= \frac{1}{216}(14 + 48 + 9 + 3 + 15 + 47) = \frac{136}{216} \\
 C_3(2, 3) &= \frac{1}{216}(48 + 30 + 50 + 15 + 57 + 55) = \frac{255}{216} \\
 C_3(3, 3) &= \frac{1}{216}(9 + 50 + 22 + 47 + 55 + 16) = \frac{199}{216} \\
 C_3(4, 3) &= \frac{1}{216}(3 + 15 + 47 + 14 + 48 + 9) = \frac{136}{216} \\
 C_3(5, 3) &= \frac{1}{216}(15 + 57 + 55 + 48 + 30 + 50) = \frac{255}{216} \\
 C_3(6, 3) &= \frac{1}{216}(47 + 55 + 16 + 9 + 50 + 22) = \frac{199}{216}
 \end{aligned}$$

となり, 乗客量に関する順位は $r = 2$ の場合と変わらない.

例題 2.5-d (2004 年度情報工学演習 II(B) #2)

図 28(右) のグラフの各辺に図 29 のような重みをつける. この重みは地下鉄の各区間の「非混雑度」を表すものとし, この値が大きくなほど, 客は快適に乗車することができる. このように各辺が「重み付け」されたグラフを重み付きグラフと呼ぶが, この重み付きグラフの場合には隣接行列 A の各要素 $[A]_{ij}$ は i, j 間の辺数ではなく, 重みを付けた辺数の和となる. これをふまえて, 図 29 の重み付きグラフ G に対して隣接行列 A を求めよ.

(解答例)

重み付きグラフに対する隣接行列の定義に従えば, 問題文中の図 29 に与えられたグラフ G に対する隣接行

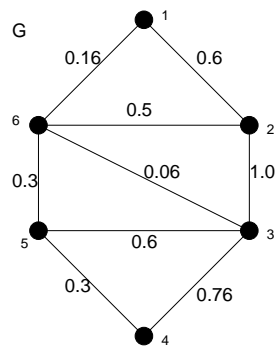


図 29: 図 28(右) のグラフの各辺に重みを付けたグラフ G.

列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.16 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.60 \\ 0.16 & 0.00 & 0.30 & 0.00 & 0.06 & 0.50 \\ 0.00 & 0.30 & 0.00 & 0.30 & 0.60 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.30 & 0.00 & 0.76 & 0.00 \\ 0.00 & 0.06 & 0.60 & 0.76 & 0.00 & 1.00 \\ 0.60 & 0.50 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{pmatrix} \tag{31}$$

となる.

例題 2.5-e (2004 年度情報工学演習 II(B) #2)

例題 2.5-d での隣接行列に対し, $X \equiv A/\eta$ とおこう ($\eta = 6$). このとき, 図 22 のグラフ G に対し

$$X^\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} X^r = \mathbf{0} \text{ (ゼロ行列)} \tag{32}$$

となることを示せ.

(解答例)

A^r の第 ij 要素は

$$[A^r]_{ij} = \sum_{l_1=1}^6 \sum_{l_2=1}^6 \cdots \sum_{l_{r-1}=1}^6 A_{il_1} A_{l_1 l_2} A_{l_2 l_3} \cdots A_{l_{r-2} l_{r-1}} A_{l_{r-1} j} \tag{33}$$

と書ける. ところで, 行列 A の要素が全て 1 である場合には

$$[A^r]_{ij} = \sum_{l_1=1}^6 \sum_{l_2=1}^6 \cdots \sum_{l_{r-1}=1}^6 1 = 6^{r-1} \tag{34}$$

となり ($\eta = 6$ であることに注意), 行列 $X = A/\eta$ の r 乗の第 ij 要素は

$$[X^r]_{ij} = \frac{6^{r-1}}{6^r} = \frac{1}{6} \tag{35}$$

となり, 有限値が残る. しかし, 今の場合, 各要素は 1 以下であるから, R を 1 以上の実数として $[A^r]_{ij}$ は次のように評価できる.

$$[A^r]_{ij} = \sum_{l_1=1}^6 \sum_{l_2=1}^6 \cdots \sum_{l_{r-1}=1}^6 A_{il_1} A_{l_1 l_2} A_{l_2 l_3} \cdots A_{l_{r-2} l_{r-1}} A_{l_{r-1} j} \leq 6^{r-1} \left(\frac{1}{R}\right)^r \quad (36)$$

従って, 行列 X^r の第 ij 要素は

$$[X^r]_{ij} \leq \frac{1}{6} \left(\frac{1}{R}\right)^r \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad (37)$$

となる. 従って

$$X^\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} X^r = 0 \quad (38)$$

が成立することがわかる.

例題 2.5-f (2004 年度情報工学演習 II(B) #2)

$X^\infty = 0$ となる (単位行列ではない) 正方行列 X に対し

$$X + X^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} X^k = (I - X)^{-1} - I \quad (39)$$

が成り立つことを示せ. ただし, I は単位行列である. また, この事実を用いて, 例題 2.5-d で求めた隣接行列に対し $W(\infty)$ を計算せよ.

(解答例)

次の恒等式に着目する.

$$\begin{aligned} I &= (I + X + X^2 + \cdots) - (X + X^2 + \cdots) \\ &= (I - X) + (I - X)X + (I - X)X^2 + \cdots \\ &= (I - X)(I + X + X^2 + \cdots) \end{aligned} \quad (40)$$

従って

$$I + X + X^2 + \cdots = (I - X)^{-1} \quad (41)$$

すなわち

$$X + X^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} X^k = (I - X)^{-1} - I \quad (42)$$

が成り立つ.

そこで, この結果を用いて $W(\infty)$ を計算することにしよう. やや面倒であるが, 決して難しくはない計算の結果

$$W(\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} X^k = (I - (A/\eta))^{-1} - I$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0117 & 0.0363 & 0.0038 & 0.0026 & 0.0190 & 0.1074 \\ 0.0363 & 0.0118 & 0.0541 & 0.0068 & 0.0319 & 0.0933 \\ 0.0038 & 0.0541 & 0.0714 & 0.0653 & 0.1146 & 0.0240 \\ 0.0026 & 0.0068 & 0.0653 & 0.0210 & 0.1400 & 0.0241 \\ 0.0190 & 0.0319 & 0.1146 & 0.1400 & 0.0597 & 0.1812 \\ 0.1074 & 0.0933 & 0.0240 & 0.0241 & 0.1812 & 0.0487 \end{pmatrix} \quad (43)$$

が得られるので、ターミナル容量は

$$C_{\infty}(1, \infty) = 0.1808$$

$$C_{\infty}(2, \infty) = 0.2341$$

$$C_{\infty}(3, \infty) = 0.2793$$

$$C_{\infty}(4, \infty) = 0.2598$$

$$C_{\infty}(5, \infty) = 0.5463$$

$$C_{\infty}(6, \infty) = 0.4786$$

のように求まる.

例題 2.5-g (2004 年度情報工学演習 II(B) #2)

例題 2.5-f の結果から図 29 の連結グラフ G で与えられた地下鉄路線図及び、各駅での乗客量等に関して何が言えるか？ また、ここでのグラフ理論的考察から、この地下鉄をより快適なものとするためにはどのような改善点が考えられるか、を自由に論じよ.

(解答例)

駅 5 をみると、例えば駅 3 と比べて駅 5 につながる各路線の非混雑度が小さいが、一方で、ターミナル容量は全ての駅で最大である。従って、このターミナル容量の値に従えば、駅 5 につながる路線を整備し(例えば、停車時間をうまく調節するなどして)、非混雑度を上げていく企業努力がこの地下鉄には必要であると言える。

例題 2.6 (2003 年度情報工学演習 II(B) #1)

グラフの隣接行列と接続行列に関して以下の問題 (1) ~ (5) に答えよ.

(1) 次の隣接行列 A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

を持つグラフを描け.

(2) 次の接続行列 G :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

を持つグラフを描け.

- (3) ループを持たないグラフの隣接行列における任意の行または列の要素和から該当するグラフに関して何がわかるか答えよ.
- (4) ループを持たないグラフの接続行列における任意の行の要素和から該当するグラフに関して何がわかるか答えよ.
- (5) ループを持たないグラフの接続行列における任意の列の要素和から該当するグラフに関して何がわかるか答えよ.

(解答例)

(1) 隣接行列の定義に従ってグラフを描くと, 図 30 のようになる.

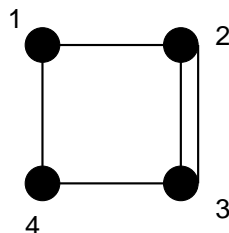


図 30: 問題の隣接行列を持つグラフ.

- (2) 与えられた接続行列の第 1 ~ 3 行のそれぞれの要素和は共に 1 であること, そして点 1, 2, 3 にはそれぞれ辺 1, 2, 3 が接続されていることから, まず, 図 31 の左側のような状況になっていることがわかる. 一方, 接続行列の第 4 列の要素和は $1 + 1 + 1 = 3$ であることから, 点 4 には辺 3 本が接続されていることもわかる. 以上を考慮すると図 31 の右側となり, これが求めるグラフとなる.
- (3) 1 つの点に入る, あるいは出る辺の本数.
- (4) 各点に入る辺の本数.

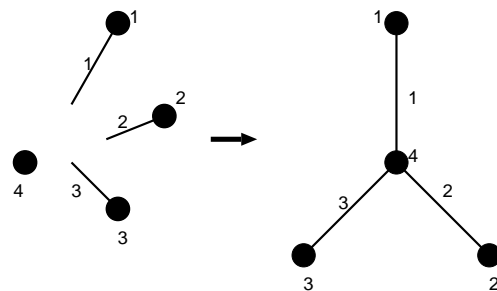


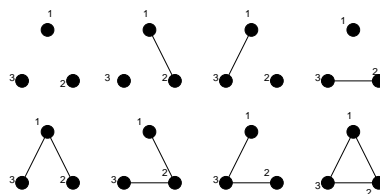
図 31: 点 1, 2, 3 に接続されている辺の本数がそれぞれ 1 本ずつであることから, まず左図までわかる. ついで, 接続行列の第 4 行の要素和が 3 であることから, 右図が最終的な答えとなる.

(5) 1 つの辺に付いた点の数. 従って, 各列の要素和は最小で 1, 最大でも 2 である.

例題 2.7 (2003 年度情報工学演習 II(B) #1)

ラベル付き単純グラフについて以下の問題 (1) ~ (3) に答えよ.

(1) 3 点のラベル付きグラフは以下の図のように描かれ, その総数は 8 である.



これを踏まえて, 4 点のラベル付きグラフを列挙して描き, その総数を求めよ.

(2) 一般に n 点のラベル付きグラフの総数 $\mathcal{N}(n)$ は

$$\mathcal{N}(n) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{46}$$

であることを示せ. ただし, 必要であれば公式:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^k b^{n-k} \tag{47}$$

を用いること.

(3) n 点のラベル付きグラフの中でちょうど m 本の辺を持つグラフの総数を求めよ.

(解答例)

(1) 省略.

(2) n 点のラベル付き単純グラフにおいて可能な辺の本数は, n 点の中から任意の 2 点を選ぶ方法の数であるから

$${}_n C_2 = \frac{n(n-1)}{2} \tag{48}$$

である. 従って, n 点のラベル付き単純グラフの総数 $\mathcal{N}(n)$ は, 総数 $n(n-1)/2$ 本の辺の中から, 1 本,

2 本, ..., $n(n-1)/2$ 本の辺を選んでグラフを作る場合の数であるから

$$\mathcal{N}(n) = \frac{n(n-1)}{2}C_0 + \frac{n(n-1)}{2}C_1 + \frac{n(n-1)}{2}C_2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}C_{\frac{n(n-1)}{2}} = \sum_{k=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n(n-1)}{2}C_k \quad (49)$$

ところで, 2 項定理 :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^k b^{n-k} \quad (50)$$

で $a=b=1$ とおけば

$$2^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \quad (51)$$

が得られるが, (49) は上式で $n \rightarrow n(n-1)/2$ としたものに他ならないので

$$\sum_{k=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n(n-1)}{2}C_k = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (52)$$

であり, これが n 点からなる単純グラフの総数である.

(3) $n(n-1)/2$ の全ての辺の可能な中で, m 本のみを選ぶ場合の数なので

$$\frac{n(n-1)}{2}C_m = \frac{\left\{ \frac{n(n-1)}{2} \right\}!}{m! \left\{ \frac{n(n-1)}{2} - m \right\}!} \quad (53)$$

となる.

演習問題 2

次の問い (1)(2) に答えよ.

- (1) $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$ はグラフ的か? 理由とともに示せ. また, このグラフの隣接行列, 接続行列を書け.
- (2) 完全 2 部グラフ $K_{3,3}, K_{4,4}$ を異なる 2 通りに描き, その両者が同型であることを例題 2.2 の 1. に従って示せ.

(注意) 今回の **演習問題 2** のレポート締め切りは次回 5 月 7 日講義開始時までです.