

# グラフ理論 講義ノート #4

井上 純一

北海道大学 大学院情報科学研究科

URL : [http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

平成 19 年 5 月 14 日

## 目次

5 道と閉路	58
5.1 連結性	58
5.2 非連結化集合と分離集合	64
5.2.1 非連結化集合	64
5.2.2 分離集合	64

### 演習問題 3 の解答例

- (1) まずは, 問題に与えられた左側のグラフで簡単に題意を確かめてみよう. 定義より, このグラフの隣接行列は次の  $2 \times 2$  の対称行列で与えられる.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (76)$$

よって

$$\mathbf{I} - x\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{pmatrix} \quad (77)$$

となるから, 問題の歩道生成行列は, この逆行列であり

$$(\mathbf{I} - x\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{1-x^2} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-x^2} & \frac{x}{1-x^2} \\ \frac{x}{1-x^2} & \frac{1}{1-x^2} \end{pmatrix} \quad (78)$$

である. そこで, この行列の各成分を  $x$  の冪で書き直してみると

$$[(\mathbf{I} - x\mathbf{A})^{-1}]_{1,1} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots = [(\mathbf{I} - x\mathbf{A})^{-1}]_{2,2} \quad (79)$$

$$[(\mathbf{I} - x\mathbf{A})^{-1}]_{1,2} = x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots = [(\mathbf{I} - x\mathbf{A})^{-1}]_{2,1} \quad (80)$$

である. ここで,  $(1,1)$  成分は点 1 から出発して, 点 1 へと戻る歩道であるから, そのような歩道の長さ  $k$  は必ず偶数でなければならず, 各  $k$  に対して各々 1 つの歩道が存在する. これが, (79) 式の  $x$  の冪に偶数次のみが現れ, その係数が全て 1 であることに反映している.

一方の  $(1,2)$  成分は点 1 から点 2 へ至る歩道であるから, そのような歩道の長さ  $k$  は必ず奇数でなければならず, 各  $k$  に対して各々 1 つの歩道が存在する. これが, (80) 式の  $x$  の冪に奇数次のみが現れ, その係数が全て 1 であることに反映している. 以上の考察より, 確かにこのグラフに対し, 歩道生成の行列要素は題意を満たしていることがわかる.

(2) (1) と同様に隣接行列を求めてみると, 次の  $4 \times 4$  の対称行列:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (81)$$

となる. よって

$$\mathbf{I} - x\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & -x \\ -x & 1 & -x & -x \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ -x & -x & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (82)$$

である. そこで, この逆行列である歩道生成行列を求めよう.

まずは行列式を求めたい. 第 4 列目で余因子展開すると, 次の行列式:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{I} - x\mathbf{A}) &= x \begin{vmatrix} -x & 1 & -x \\ 0 & -x & 1 \\ -x & -x & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ -x & -x & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ -x & 1 & -x \\ 0 & -x & 1 \end{vmatrix} \\ &= x \left\{ \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{vmatrix} \right\} - x \left\{ \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} -x & 0 \\ -x & 1 \end{vmatrix} \right\} \\ &\quad + \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} -x & 0 \\ -x & 1 \end{vmatrix} \right\} \\ &= x(-x^2 - x + x^3) - x(x + x^2) + 1 - 2x^2 = 1 - 4x^2 - 2x^3 + x^4 \end{aligned} \quad (83)$$

が得られる. 従って, 逆行列の成分が  $\tilde{a}_{ij}$  を行列  $\mathbf{I} - x\mathbf{A}$  の第  $(i, j)$  余因子行列として

$$[(\mathbf{I} - x\mathbf{A})^{-1}]_{ij} = \{\det(\mathbf{I} - x\mathbf{A})\}^{-1}(-1)^{i+j}\tilde{a}_{ij} \quad (84)$$

と書けることに注意すると, 各余因子行列  $\tilde{a}_{ij}$  が具体的に

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{1,1} &= \begin{vmatrix} 1 & -x & -x \\ -x & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2x^2 \\ \tilde{a}_{1,2} &= \begin{vmatrix} -x & -x & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} -x & -x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x - x^2 = \tilde{a}_{2,1} \\ \tilde{a}_{1,3} &= \begin{vmatrix} -x & 1 & -x \\ 0 & -x & 0 \\ -x & -x & 1 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 0 \\ -x & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 0 \end{vmatrix} = x^3 + x^2 = \tilde{a}_{3,1} \\ \tilde{a}_{1,4} &= \begin{vmatrix} -x & 1 & -x \\ 0 & -x & 1 \\ -x & -x & 0 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 - x = \tilde{a}_{4,1} \\ \tilde{a}_{2,2} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 0 & -x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{2,3} &= \begin{vmatrix} 1 & -x & -x \\ 0 & -x & 0 \\ -x & -x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} -x & 0 \\ -x & 0 \end{vmatrix} = x^3 - x = \tilde{a}_{3,2} \\ \tilde{a}_{2,4} &= \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ -x & -x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -x & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} -x & 0 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = x^2 + x = \tilde{a}_{4,2} \\ \tilde{a}_{3,3} &= \begin{vmatrix} 1 & -x & -x \\ -x & 1 & -x \\ -x & -x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} -x & -x \\ -x & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} -x & -x \\ 1 & -x \end{vmatrix} = 1 - 3x^2 - 2x^3 \\ \tilde{a}_{3,4} &= \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ -x & 1 & -x \\ -x & -x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 0 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} -x & -x \\ -x & 0 \end{vmatrix} = -x^3 - x^2 = \tilde{a}_{4,3} \\ \tilde{a}_{4,4} &= \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ -x & 1 & -x \\ 0 & -x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} -x & 0 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2x^2 \end{aligned}$$

で与えられるので、求める逆行列は対称行列であり、(84) 式より  $\tilde{a}_{i,j}$  に  $(-1)^{i+j}$  のファクタが付くことに注意して ((1, 1) 成分ならば、 $(-1)^{1+1} = 1$ , (1, 2) 成分であれば、 $(-1)^{1+2} = -1$  のようにファクタがかかる)

$$(I - xA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-2x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x+x^2-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} \\ \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{1-x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} \\ \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{1-3x^2-2x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} \\ \frac{x-x^2-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{1-2x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} \end{pmatrix} \quad (85)$$

が得られる。ここで、問題とするグラフの対称性より、(1, 2) 成分と (2, 4) 成分、(1, 1) 成分と (4, 4) 成分などが等しくなることに注意しよう。

さて、ここで各成分を  $x$  の幂で展開してみても、実際に題意が満たされることを確認してみよう。まずは、歩道生成行列の (1, 1) 成分について変数  $x$  で展開すると

$$\begin{aligned} [(I - xA)^{-1}]_{1,1} &\simeq (1 - 2x^2)\{1 + (4x^2 + 2x^3 - x^4) + (4x^2 + 2x^3 - x^4)^2 + \dots\} \\ &= 1 + (4x^2 - 2x^2) + 2x^3 + (-8x^4 - x^4 + 16x^4) + \mathcal{O}(x^5) \\ &= x^0 + 2x^2 + 2x^3 + 7x^4 + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned} \quad (86)$$

が得られる。ここで、 $\mathcal{O}(x^\alpha)$  は  $x^\alpha$  以上の幂を表すものと定義する。従って、点 1 から点 1 へ戻ってくる長さ 2 の歩道数は 2、長さ 3 の歩道数も 2 であり、図 64 のように確かにそれだけの場合の数があることが確かめられる。長さ 4 の歩道数は歩道生成行列の方法からは 7 と見積もられるが、実際にグラフ

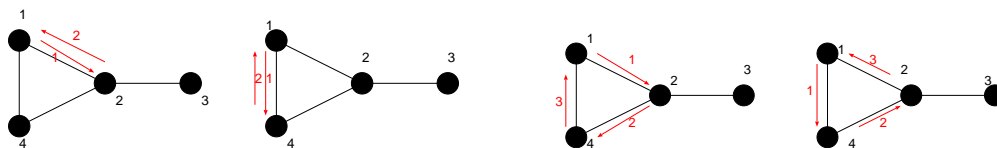


図 64: 与えられたグラフの点 1 から点 1 へと戻る長さ 2 の歩道 (左) と長さ 3 の歩道 (右)。

から見つけ出してみると

$$\begin{aligned}
 &1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1, & 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1, & 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \\
 &1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1, & 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1, & 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \\
 &1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1
 \end{aligned}$$

の7本が存在することがわかる (このような表記では矢印の本数が歩道の本数になることに注意).  
従って、確かに題意を満たしている.

次に、(1, 2) 成分を考えてみよう. 歩道生成行列のこの成分は変数  $x$  で展開して

$$\begin{aligned}
 [(I - xA)^{-1}]_{1,2} &\simeq (x^2 + x)\{1 + (4x^2 + 2x^3 - x^4) + (4x^2 + 2x^3 - x^4)^2 + \dots\} \\
 &= x + x^2 + 4x^3 + (4x^4 + 2x^4) + \mathcal{O}(x^5) \\
 &= x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 + \mathcal{O}(x^5)
 \end{aligned} \tag{87}$$

となる. 点1から点2へ至る長さ1の歩道は明らかに1本. 長さ2の歩道は  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$  のみであり, これも1本. 長さ3の歩道は図65に示した4本であり, 確かにこの本数は歩道生成行列の与える本数と一致している. また, 長さ4の歩道をグラフから探してみると

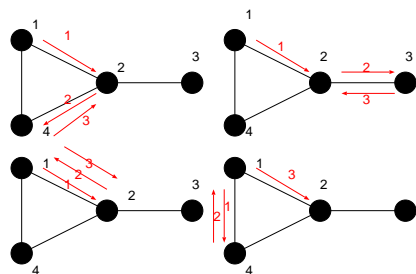


図 65: 与えられたグラフの点1から点2へと戻る長さ3の歩道.

$$\begin{aligned}
 &1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2, & 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2, & 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \\
 &1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2, & 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2, & 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2
 \end{aligned}$$

となり, これも確かに歩道生成行列の第 (1, 2) 成分の  $x^4$  の展開係数と一致している. 従って, この場合も題意を満たしている.

次に (1, 3) 成分を考える. 歩道生成行列のこの成分は変数  $x$  で展開することにより

$$\begin{aligned}
 [(I - xA)^{-1}]_{1,3} &\simeq (x^3 + x^2)\{1 + (4x^2 + 2x^3 - x^4) + (4x^2 + 2x^3 - x^4)^2 + \dots\} \\
 &= x^2 + x^3 + 4x^4 + \mathcal{O}(x^5)
 \end{aligned} \tag{88}$$

となる. グラフより, 点1と点3を結ぶ長さ2の歩道は  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  の1本. 長さ3の歩道も  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  の1本のみ. さらに, 長さ4の歩道をグラフから探してみると

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3, \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3, \quad 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3, \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

4本が存在する. 従って, この場合も, 歩道の数と歩道生成行列の各項の係数間の関係は成立している.

次に (1, 4) 成分は変数  $x$  で展開して

$$\begin{aligned} [(I - xA)^{-1}]_{1,4} &\simeq (x + x^2 - x^3)\{1 + (4x^2 + 2x^3 - x^4) + (4x^2 + 2x^3 - x^4)^2 + \dots\} \\ &= x + x^2 + (-x^3 + 4x^3) + (4x^4 + 2x^4) + \mathcal{O}(x^5) \\ &= x + x^2 + 3x^3 + 6x^4 + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned} \tag{89}$$

となる. 点 1 と点 4 を結ぶ長さ 1 の歩道は明らかに 1 本. 長さ 2 の歩道は  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$  の 1 本. 長さ 3 の歩道は  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 4$ ,  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ ,  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$  の 3 本ある. 長さ 4 の歩道は

$$\begin{aligned} &1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4, \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4, \quad 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \\ &1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4, \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 4, \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \end{aligned}$$

の 6 本であり, こららはいずれも歩道生成行列の各項の係数と一致する.

最後に歩道生成行列の (2, 2) 成分を確かめておこう. この成分を変数  $x$  の 4 次まで書き出してみると

$$\begin{aligned} [(I - xA)^{-1}]_{2,2} &\simeq (1 - x^2)\{1 + (4x^2 + 2x^3 - x^4) + (4x^2 + 2x^3 - x^4)^2 + \dots\} \\ &= 1 + (4x^2 - x^2) + 2x^3 + (-4x^4 - x^4 + 16x^4) + \mathcal{O}(x^5) \\ &= x^0 + 3x^2 + 2x^3 + 11x^4 + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned} \tag{90}$$

が得られる. 従って, 点 2 から点 2 へと戻る長さ 2 の歩道は  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$  の 3 本, 長さ 3 の歩道は  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2$  の 2 通り. 長さ 4 の歩道は少々多いがグラフから見つけて書き出してみると

$$\begin{aligned} &2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \\ &2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \\ &2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \\ &2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \end{aligned}$$

の 11 通りある. 従って, この成分の場合も歩道数と展開係数との間の関係は成立しており, 題意を満たしている.

参考のため, 各成分を  $x$  の 4 次の項まで書き下して歩道生成行列を書き直したものを載せておこう.

$$\begin{aligned} &(I - xA)^{-1}_{x \text{ の 4 次まで}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2x^2 + 2x^3 + 7x^4 & x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 & x^2 + x^3 + 4x^4 & x + x^2 + 3x^3 + 6x^4 \\ x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 & 1 + 3x^2 + 2x^3 + 11x^4 & x + 3x^3 + 2x^4 & x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 \\ x^2 + x^3 + 4x^4 & x + 3x^3 + 2x^4 & 1 + x^2 + 3x^4 & x^2 + x^3 + 4x^4 \\ x + x^2 + 3x^3 + 6x^4 & x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 & x^2 + x^3 + 4x^4 & 1 + 2x^2 + 2x^3 + 7x^4 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{91}$$

この演習問題で見たように, 歩道の長さが長くなればなるほど, グラフに存在する歩道の計数に対し, 歩道生成行列の方法が威力を発揮するようになる.

注意: 数学的にみると, 前回の配布資料 (24) 式が対称である隣接行列に対して一般に成立することがわかった段階で, それが個別の単純グラフに対しても成り立つのは明らかである. しかし, 実際に歩道を数え上げる場合には, この演習でみたように歩道生成行列の各成分を個別のグラフに対して具体的に計算しなければならない. 特に道のりが長い歩道を数え上げる場合には変数  $x$  についての高次の展開係数が必要になるが, ここでみたように, その係数を求めることはグラフ上で実際に可能な道を数え上げていくより容易な作業である.

## 5 道と閉路

ここでは、「道」及び「閉路」に関し、その概念・諸定理、及び、応用例を具体例をあげて説明する。

### 5.1 連結性

連結：グラフの各 2 点の間に道がある。

歩道：  $v_i (i = 1, \dots, m) \in G$  に対し、辺列  $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$  を歩道 (walk) という。

⇒ 別の表現： $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$  ( $v_0$  : 始点,  $v_m$  : 終点)

小道：全ての辺  $v_0v_1, \dots, v_{m-1}v_m$  が異なる歩道

道：点  $v_0, v_1, \dots, v_m$  が全て異なる歩道 ( $v_0 = v_m$  であっても良いとする)

閉路：少なくとも 1 本辺を持つ閉じた道

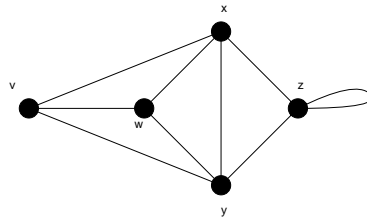


図 66: このグラフにおいて、閉路は  $x \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x$

#### 例題 4.1 (2003 年度 レポート課題 #3 問題 1)

連結単純グラフ  $G$  の点集合は  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  であり、 $m$  本の辺および  $t$  個の三角形があるとす。以下の (1) ~ (3) に答えよ。

- (1)  $G$  の隣接行列を  $A$  とすると、行列  $A^2$  の  $ij$  要素は  $v_i$  と  $v_j$  間の長さ 2 の歩道の個数に等しいことを示せ。
- (2) 行列  $A^2$  の対角要素の総和は  $2m$  であることを示せ。
- (3) 行列  $A^3$  の対角要素の総和は  $6t$  であることを示せ。

(解答例)

- (1) これは前回の演習問題 3 の復習でもある。連結グラフ  $G$  に関する  $n \times n$  の隣接行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{92}$$

と置くと隣接行列の自乗  $A^2$  は

$$A^2 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{kn} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \equiv B \tag{93}$$

と書け,  $A^2$  の  $ij$  要素である  $b_{ij}$  は

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} \tag{94}$$

である. ところで, 隣接行列の定義から  $a_{ik}$  は点  $v_i$  と点  $v_k$  を結ぶ辺の本数,  $a_{kj}$  は点  $v_k$  と点  $v_j$  を結ぶ辺の本数であるから, 積  $a_{ik}a_{kj}$  は点  $v_i$  から点  $v_k$  を経由して点  $v_j$  に至る長さ 2 の歩道の数に相当する (図 67 参照). 経由点  $v_k (k = 1, \dots, n)$  の選び方の可能性 ( $i = k, j = k$  の場合には「ループ」があると

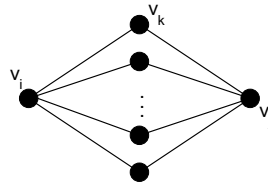


図 67: 点  $v_k$  は点  $v_i$  から点  $v_j$  へ至る経由点.

考える) に関し, この積  $a_{ik}a_{kj}$  を足し上げた

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} = b_{ij} \tag{95}$$

は  $v_i$  から  $v_j$  へ至る長さ 2 の歩道の数である. すなわち,  $A^2$  の  $ij$  要素  $b_{ij}$  は  $v_i$  から  $v_j$  へ至る長さ 2 の歩道の数に等しい.

(2) (1) の結果を考慮すると, 行列  $B = A^2$  の対角成分

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki} \tag{96}$$

は点  $v_i$  から点  $v_k$  を経由して  $v_i$  へ戻る長さ 2 の歩道の数であるから, これは  $v_i$  と  $v_k$  を結ぶ辺の数の 2 倍になっている (図 68 参照). 従って, 行列  $A^2$  の対角和

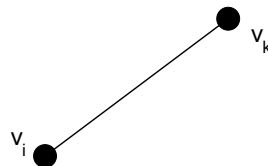


図 68: 中継点  $v_k$  を経て,  $v_i$  へ戻る経路.

$$\sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki} \tag{97}$$

は連結グラフ  $G$  に含まれる辺の本数の 2 倍, すなわち  $2m$  である.

(3)  $A^3$  を計算すると

$$A^3 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{1k}a_{kl}a_{l1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{1k}a_{kl}a_{ln} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{nk}a_{kl}a_{l1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{nk}a_{kl}a_{ln} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = C \quad (98)$$

であるから、 $A^3$  の  $ij$  成分は

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik}a_{kl}a_{lj} \quad (99)$$

と書ける.

ところで、隣接行列の定義から  $a_{ik}$  は点  $v_i$  と点  $v_k$  間の辺の本数、 $a_{kl}$  は点  $v_k$  と点  $v_l$  間の辺の本数、 $a_{lj}$  は点  $v_l$  と点  $v_j$  間の辺の本数であるから、これらの積  $a_{ik}a_{kl}a_{lj}$  は点  $v_i$  から点  $v_k$  及び点  $v_l$  を経由して点  $v_j$  へ至る歩道の数である. 従って、経路点  $\{v_k, v_l\}$  の可能性について足し合わせた

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik}a_{kl}a_{lj} = c_{ij} \quad (100)$$

つまり、行列  $A^3$  の  $ij$  要素は点  $v_i$  から点  $v_j$  へ至る長さ 3 の歩道の数に等しい (図 69 参照). また、

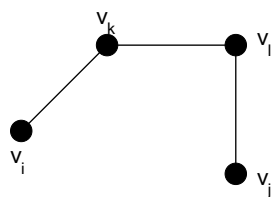


図 69: 点  $v_i$  から経路点  $\{v_k, v_l\}$  を経て  $v_j$  へと至る経路.

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik}a_{kl}a_{li} \quad (101)$$

は点  $v_i$  から点  $v_k$  及び点  $v_l$  を経由して  $v_i$  へ至る長さ 3 の閉路の数であるから. これは点  $v_i, v_k$  及び点  $v_l$  を結ぶ三角形の数である. 従って、これを経路点  $\{v_k, v_l\}$  の可能性について足し上げた

$$\sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik}a_{kl}a_{li} \quad (102)$$

は連結グラフ  $G$  に含まれる三角形の個数の 6 倍 ( $i, k, l$  の並べ方  $3! = 6$  通りに縮退) に等しい (図 70 参照). すなわち

$$\sum_{i=1}^n c_{ii} = 6t \quad (103)$$

に等しい.

**定理 5.2**

グラフ  $G$  は  $n$  個の点を持つ単純グラフであるとする.  $G$  には  $k$  個の成分があるとき、 $G$  の辺の本数  $m$  は次式を満たす.

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1) \quad (104)$$



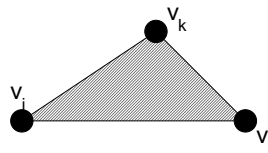


図 70: 点  $v_i$  を出発し, 点  $\{v_k, v_l\}$  を経て点  $v_i$  へと戻る閉路は三角形を形成する.

(証明)

まず, (104) における下界を表す不等式:  $m \geq n - k$  について示す. 空グラフ  $m = 0$  のときは自明であり,  $n = k$  より,  $0 \leq 0 - 0 = 0$  で成立する. 従って, 以下ではこの場合を除外して考える. 方針としては, 辺数が  $m_0 - 1$  のときに不等式の成立を仮定し,  $m_0$  のときの成立を示すという数学的帰納法により証明することにしよう.

このために, 単純グラフ  $G$  から任意の辺を 1 本削除した場合, 成分数, 点数, 辺数はどのように変化するかを考察すると

$$\text{成分数} : k \rightarrow k + 1$$

$$\text{点数} : n \rightarrow n$$

$$\text{辺数} : m_0 \rightarrow m_0 - 1$$

となるから, 上の矢印の右側のそれぞれの量  $(k + 1, n, m_0 - 1)$  に関して不等式を作ると

$$m_0 - 1 \geq n - (k - 1)$$

が成立する. 従って, この辺数  $m_0 - 1$  に関する不等式の成立を仮定し, これから辺数  $m_0$  についての不等式の成立を導けばよいわけであるが, これは上不等式を書き直せば直ちに

$$m_0 \geq n - k$$

が得られるので, 帰納法により, 全ての  $m$  に対して不等式:  $m \geq n - k$  の成立が示された.

次に, (104) の上界を示す不等式:  $m \leq (n - k)(n - k + 1)/2$  についての成立を示す. 辺の数の上界を考えるわけであるから, グラフ  $G$  を成分数が  $k$  のグラフで, 辺の数が一番多いものとすれば, このグラフ  $G$  の各成分は完全グラフであるとしてよい. そこで, この成分の中で任意の 2 成分  $C_i, C_j$  を選び,  $C_i$  には  $n_i$  個,  $C_j$  には  $n_j$  個の点があったとする ( $n_i \geq n_j$ ). つまり,  $C_i + C_j$  の辺の総数  $\mathcal{N}'_{ij}$  はそれぞれが完全グラフであることを考慮すると (図 71 を参照).

$$\mathcal{N}'_{ij} = \frac{1}{2}n_i(n_i - 1) + \frac{1}{2}n_j(n_j - 1) \tag{105}$$

となる. さて, ここで次の操作を考える.

(操作)

$C_i \Rightarrow n_i + 1$  個の点を持つ完全グラフ

$C_j \Rightarrow n_j - 1$  個の点を持つ完全グラフ

この置き換えにより,  $C_i + C_j$  の点数は不変であるが, 辺数  $\mathcal{N}'_{ij}$  は

$$\mathcal{N}'_{ij} = \frac{1}{2}n_i(n_i + 1) + \frac{1}{2}(n_j - 1)(n_j - 2) \tag{106}$$

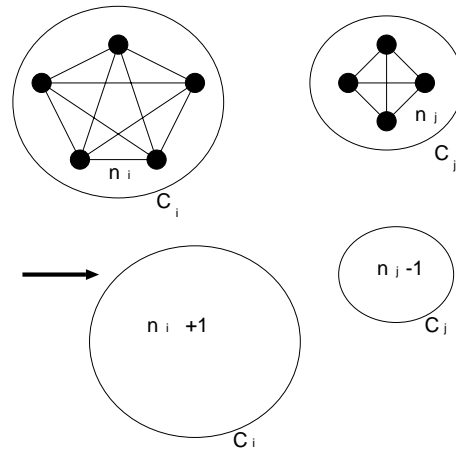


図 71: 完全グラフ  $C_i$  に点を一つ足して完全グラフを作り, 完全グラフ  $C_j$  から点を一つ引き, 完全グラフを作る.

のように変化する. 従って, この (操作) により, 辺の数は

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{N}_{ij} &= \mathcal{N}'_{ij} - \mathcal{N}_{ij} \\ &= \frac{1}{2}n_i(n_i + 1) + \frac{1}{2}(n_j - 1)(n_j - 2) - \left\{ \frac{1}{2}n_i(n_i - 1) + \frac{1}{2}n_j(n_j + 1) \right\} = n_i - n_j + 1 > 0 \end{aligned} \tag{107}$$

だけ増加する.

この議論を進めると, 結局, 成分数が  $k$  であるグラフで最も辺数が多いグラフ  $G$  は点の数が  $n - (k - 1) = n - k + 1$  個の完全グラフと  $k - 1$  個の孤立点 (空グラフ) からなるグラフであると結論付けられるので, 辺数  $m$  の上限は不等式:

$$m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1) \tag{108}$$

を満たすことがわかる (証明終わり).

**例題 4.2** (2003 年度 情報工学演習 II(B) #2)

連結グラフにおいて, 点  $v$  から  $w$  への距離  $d(v, w)$  は  $v$  から  $w$  への最短路の長さである. このとき, 以下の問い (1)(2) に答えよ.

(1)  $d(v, w) \geq 2$  ならば

$$d(v, z) + d(z, w) = d(v, w) \tag{109}$$

なる点  $z$  が存在することを示せ.

(2) ピーターソン・グラフにおいて, 任意の異なる 2 点  $v$  と  $w$  に対して  $d(v, w) = 1$  または  $d(v, w) = 2$  であることを示せ.

(解答例)

(1) 図 72 のような状況を考える. 点  $v$  から  $w$  への最短路を  $C$  とする.  $C$  の全長は  $d(v, w)$  である. この経路  $C$  上に任意の点  $z$  をとり, この点  $z$  を中継点として経路  $C$  を 2 つの部分に分けて, 部分路  $v \rightarrow z$  を  $C^1$ , 部分路  $z \rightarrow w$  を  $C^2$  とする.

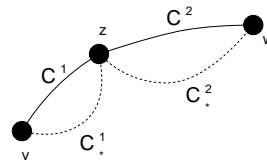


図 72:  $v \rightarrow z \rightarrow w$  の経路  $C = C^1 + C^2$  は  $v$  から  $w$  への最短路であり, その長さは  $d(v, w)$  で与えられる.

この点  $z$  に対し,  $C^1$  は  $v$  と  $z$  を結ぶ全ての経路のうちで最短路である. なぜならば, もし  $v$  と  $z$  を結ぶ別の経路の中で  $C^1$  よりも短いものが存在するとすれば, その経路  $C^1_*$  と  $C^2$  を合わせた新しい経路  $C^1_* + C^2$  が  $v$  と  $w$  を結ぶ全ての経路の中で最短となり, 仮定に反する. 従って, 経路  $C^1$  が点  $v$  と  $z$  を結ぶ全ての経路の中で最短であり,  $C^1$  の全長が  $d(v, z)$  である.

次に,  $z$  と  $w$  を結ぶ経路の中で最短のものであるが, これが  $C^2$  であることは明らかである. なぜならば, この経路と別な経路  $C^2_*$  が存在するとすれば,  $C^1$  と  $C^2_*$  を足し合わせた経路  $C^1 + C^2_*$  が  $v$  と  $w$  を結ぶ全経路の中で最短となり, 仮定に反する. 従って,  $C^2$  が  $z$  と  $w$  を結ぶ全経路のうちで最短であり, その全長は  $d(z, w)$  である. 従って, 考えるグラフは連結であるから, 経路  $C$  上に中継点  $z$  をいつでも任意にとることができ, この点  $z$  に対して

$$d(v, z) + d(z, w) = d(v, w) \tag{110}$$

が成り立つ.

(2) 図 73 のように, ピータースン・グラフの各点に番号を付ける. ピータースン・グラフの対称性から, 点

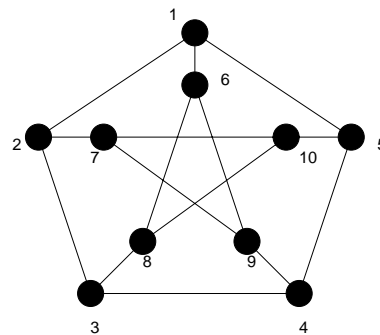


図 73: ピータースン・グラフ

1, 6 をスタート地点に選んだ場合の各他点への最短路を考えれば十分である (括弧内は長さ  $d$  を与える経路).

$$\begin{aligned} d(1, 2) &= 1 (1 \rightarrow 2), & d(1, 3) &= 2 (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3), & d(1, 4) &= 2 (1 \rightarrow 5 \rightarrow 4) \\ d(1, 5) &= 1 (1 \rightarrow 5), & d(1, 6) &= 1 (1 \rightarrow 6), & d(1, 7) &= 2 (1 \rightarrow 2 \rightarrow 7), \\ d(1, 8) &= 2 (1 \rightarrow 6 \rightarrow 8), & d(1, 9) &= 2 (1 \rightarrow 6 \rightarrow 9), & d(1, 10) &= 2 (1 \rightarrow 5 \rightarrow 10) \\ d(6, 1) &= 1 (6 \rightarrow 1), & d(6, 2) &= 2 (6 \rightarrow 1 \rightarrow 2), & d(6, 3) &= 2 (6 \rightarrow 8 \rightarrow 3) \\ d(6, 4) &= 2 (6 \rightarrow 9 \rightarrow 4), & d(6, 5) &= 2 (6 \rightarrow 1 \rightarrow 5), & d(6, 7) &= 2 (6 \rightarrow 9 \rightarrow 7) \\ d(6, 8) &= 1 (6 \rightarrow 8), & d(6, 9) &= 1 (6 \rightarrow 9), & d(6, 10) &= 2 (6 \rightarrow 8 \rightarrow 10) \end{aligned}$$

以上より, ピーターソン・グラフの任意の 2 点  $v, w$  に対して  $d(v, w) = 1$  または  $d(v, w) = 2$  であることが示せた.

## 5.2 非連結化集合と分離集合

ある連結グラフを「どの程度つながったグラフであるか」という観点から調べる際, 「そのグラフから何本の辺を取り去ったら非連結グラフになるか?」「そのグラフから何個の点を取り去ったら非連結グラフになるか?」という指標を用いることが多い. 前者を非連結化集合 (disconnecting set), 後者を分離集合 (separating set) と呼ぶ. ここではそれぞれを例を取りあえて見てゆくことにしよう.

### 5.2.1 非連結化集合

非連結化集合: それを除去するとグラフが非連結となる辺の集合.

カットセット: そのような真部分集合も非連結化集合でない, 非連結化集合<sup>1</sup>. 図 74 の非連結化集合  $\{e_1, e_6, e_7, e_8\}$  はカットセットでもある.

辺連結度 (edge-connectivity)  $\lambda(G)$ : 連結グラフ  $G$  の最小なカットセットの大きさ. 図のグラフでは  $\lambda(G) = 2$  である.

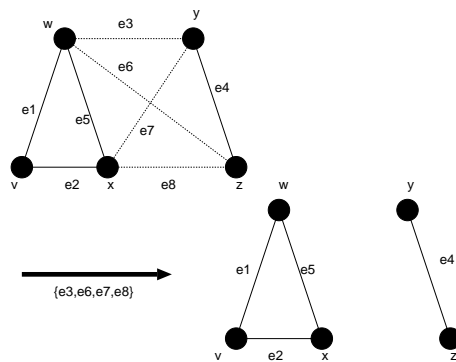


図 74: カットセット  $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$  を選ぶと図のような非連結グラフが得られる.

$\lambda(G) \geq k$  のとき, グラフ  $G$  は  $k$ -辺連結であるという.

### 5.2.2 分離集合

分離集合: それを除去するとグラフが非連結となる点の集合 (辺を除去するときにはその接続辺も除去することに注意).

カット点: 1 個の点だけからなる分離集合.

連結度  $\kappa(G)$ <sup>2</sup>: グラフ  $G$  の最小な分離集合の大きさ.

<sup>1</sup> 「それを除去するとグラフの成分数が増える辺の集合」として定義し直せば, 「非連結化集合」, 「カットセット」はそれぞれ非連結グラフにも適用できる概念であることに注意しよう.

<sup>2</sup> この連結度は, 前出の辺連結度と区別するために「点連結度」と呼ばれることもある.

$\kappa(G) \geq k$  のとき、グラフ  $G$  は  $k$ -連結であるという。

(注)

連結度  $\kappa(G)$  とは通信系のネットワーク (インターネットを思い出して頂ければよいと思います) を構築する際に便利な量である。つまり、グラフの各点を「交換局」あるいは「サーバ」とするとすれば、そのグラフ (ネットワーク)  $G$  の連結度が  $\kappa(G)$  であるということは、 $\kappa(G)$  未満の交換局 (サーバ) が故障しても、残りの交換局 (サーバ) の連結性が保障されていることになる。

⇒ 連結度  $\kappa(G)$  はネットワークの信頼度を反映し、 $\kappa(G)$  が大きなネットワークほど、その信頼性が高い。

一方、前出の「辺連結度」 $\lambda(G)$  をこのネットワークに当てはめて考えれば、 $\lambda(G)$  未満の伝送路が故障しても、交換局 (サーバ) の連結性が保障されていることになるので、 $\lambda(G)$  も一つのネットワークの信頼度の尺度として用いることができる。

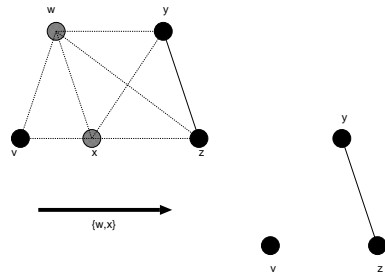
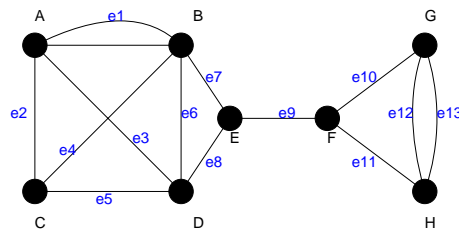


図 75: 分離集合  $\{w, x\}$  によってできる非連結グラフ。

**例題 4.3** (2003 年度 情報工学演習 II(B) #2)

図に与えられたグラフ  $G$  について以下の問い (1) ~ (5) に答えよ。



- (1)  $G$  の非連結化集合を一つ挙げよ。
- (2)  $G$  のカットセットを一つ挙げよ。
- (3)  $G$  の橋を挙げよ。
- (4)  $G$  の分離集合を一つ挙げよ。
- (5)  $G$  のカット点を一つ挙げよ。

(解答例)

- (1) グラフ  $G$  の非連結化集合は例えば、 $\{e_7, e_8\}$ ,  $\{e_{10}, e_{11}\}$ ,  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  などである。

- (2) グラフ  $G$  のカットセットは例えば,  $\{e_7, e_8\}, \{e_{10}, e_{11}\}, \{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$  などである.  
(カットセット)  $\subseteq$  (非連結化集合) であることに注意.
- (3) グラフ  $G$  の橋は  $e_9$  である.
- (4) グラフ  $G$  の分離集合は  $\{B, D, E\}$  などである.
- (5) グラフ  $G$  のカット点は  $E, F$  である.

**例題 4.4** (2004 年度 演習問題 4)

前回の講義では隣接行列, 接続行列と呼ばれる行列を用いてグラフを表現する方法を学んだが, これら 2 つの行列の他にもグラフを表現するための行列は存在し, それらを用いることにより, より有効にグラフについての考察を進めることができる. ここでは, そのような行列であるタイセット行列, 及び, カットセット行列についての演習問題を解くことにより, これら行列に関する理解を深めることにしよう.

無向グラフ  $G$  のタイセット行列 (tie-set matrix)  $B$  とは, 各行が  $G$  の閉路  $L_i$  に, 各列  $j$  が枝  $j \in E(G)$  に対応し, 行列要素  $b_{ij}$  が

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & (L_i \text{ が枝 } j \text{ を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (111)$$

と表される行列である.

一方, グラフ  $G$  のカットセット行列 (cut-set matrix)  $C$  とは, 各行  $i$  が  $G$  のカットセット  $C_i$  に, 各列  $j$  が枝  $j \in E(G)$  に対応し, 各行列要素がそれぞれ

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & (C_i \text{ が枝 } j \text{ を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (112)$$

で与えられる. 例えば, 図 76 のグラフ  $G$  においては, タイセット行列, カットセット行列はそれぞれ

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (113)$$

となる. これを踏まえて以下の問いに答えよ.

- (1) 図 77 のグラフ  $G$  の閉路を全て求めよ (それぞれに  $L_1, L_2, \dots$  のようなラベルを付けよ).
- (2) グラフ  $G$  のカットセットを全て求めよ (それぞれに  $C_1, C_2, \dots$  のようなラベルを付けよ).
- (3) グラフ  $G$  のタイセット行列  $B$  を求めよ.
- (4) グラフ  $G$  のカットセット行列  $C$  を求めよ.
- (3) タイセット行列  $B$  とカットセット行列  $C$  の間に次の関係式が成り立つことを示せ.

$$BC^T \equiv \mathbf{0} \pmod{2} \quad (114)$$

ただし,  $C^T$  は行列  $C$  の転置行列を表し,  $\mathbf{0}$  は全ての成分がゼロである行列として定義される.

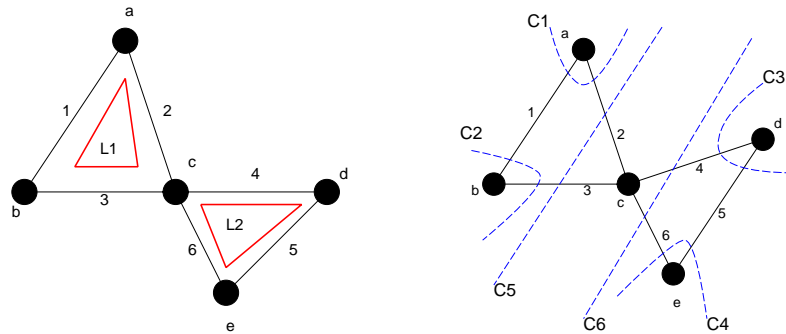


図 76: グラフ G の閉路 (左) とカットセット (右).

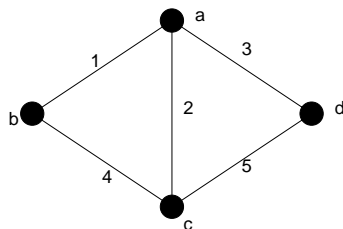


図 77: 問題のグラフ G.

(解答例)

(1) (2) 図 78 を参照のこと.

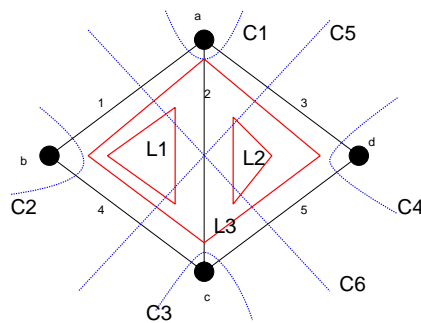


図 78: 問題のグラフ及び、閉路  $L_1, L_2, L_3$ , そして、カットセット  $C_1, C_2, \dots, C_6$ .

(3) 閉路行列の列の増える方向に  $L_1, L_2, L_3$ , 行の増える方向に辺の番号  $1, 2, \dots, 5$  のようにラベル付けするように決めると行列  $B$  は

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{115}$$

となる.

- (4) カットセット行列の列の増える方向にカットセットの番号  $C_1, C_2, \dots, C_6$ , 行の増える方向に辺の番号  $1, 2, \dots, 6$  を割り振ることに決めれば, 行列  $C$  は

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (116)$$

となる.

- (5) 両行列の積  $BC^T$  を作ると

$$\begin{aligned} BC^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 & 1+1 & 0 & 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 0 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod{2} \end{aligned}$$

となり, 題意が満たされる.

**例題 4.5** (2005 年度 演習問題 4)

1. 完全グラフ  $K_3$  に関し, その各点がサーバに対応し,  $K_3$  のつながり方をした「ネットワーク」をなしているものとする. このネットワークの各辺が確率  $q$  で断線する場合, グラフが依然として連結グラフである場合に限り, このネットワークは正常に機能することがわかっている. このとき, このネットワークが正常である確率 (ネットワークの信頼度)  $R$  を  $q$  の関数として求め, 図示せよ.
2. 今回の講義で学んだ「閉路」「カットセット」に関して以下の問いに答えよ.
  - (1) グラフの中に辺  $e$  を含む閉路が 2 つある場合,  $e$  を含まない閉路があることを例を挙げて示せ.
  - (2) グラフの中に辺  $e$  を含むカットセットが 2 つある場合,  $e$  を含まないカットセットがあることを例を挙げて示せ.

(解答例)

1. 完全グラフ及び, 辺が 1 本断線したグラフ (3 種類), 辺が 2 本断線したグラフ (3 種類), 辺が全て断線したグラフ (1 種類) のそれぞれのグラフを図 79 に示す. ここで注意すべきなのは, 各点はネットワークのサーバに対応するので, このような問題においては, グラフはラベル付きのものを考えるべきである. 従って, この図からネットワークが正常に動作するのは完全グラフの場合, 及び, 辺が 1 本だけ断線する場合に限り, それぞれの確率は  $(1-q)^3, 3q(1-q)^2$  で与えられるので, ネットワークの信頼度  $R$  はこれら両者の和で与えられる. 従って,  $q$  の関数としての  $R$  は

$$R(q) = (1-q)^3 + 3q(1-q)^2 \quad (117)$$

となる. これを図 80 に描く.



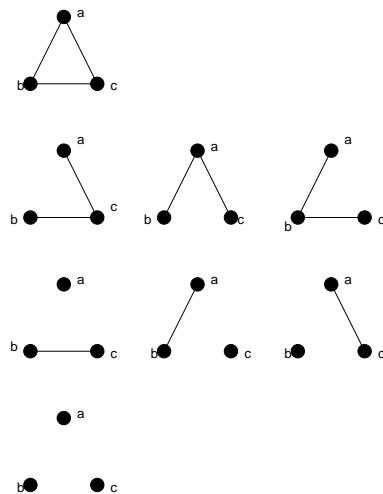


図 79: ここで考えられるネットワークの状態. 上から, 断線ゼロ, 1 本断線, 2 本断線, 全部断線のグラフ. ネットワークとして正常であるのは, 断線ゼロ, 及び, 1 本断線の場合のみ.

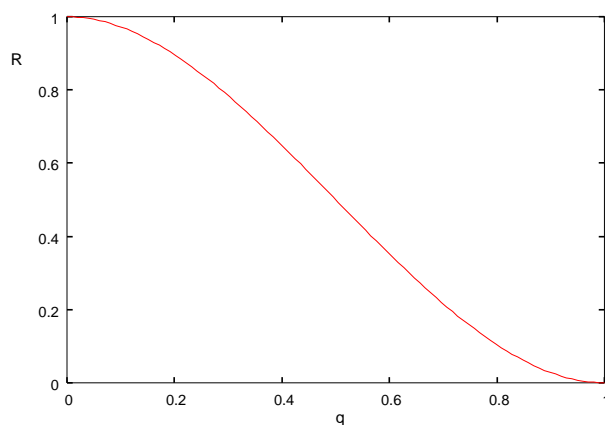


図 80: ネットワークの信頼度  $R$  の各辺の断線確率  $q$  依存性.

2. (1)(2) に該当するケースをそれぞれ図 81, 及び, 図 82 に描く. 図 81 に示したように, 辺  $e$  を含む閉路として  $L_1, L_2$  を選ぶと,  $e$  を含まない閉路として, いつでも  $L_1, L_2$  の和から  $e$  を削除したものを第 3 の閉路  $L_3$  としてとることができる.

図 82 のように辺  $e_1, e_2$  が三角形をなしている場合には, カットセット  $\{e, e_1\}$  によって, グラフ  $G$  は部分グラフ  $G_1$ , 及び,  $G_2 + G_3$  に分離し, カットセット  $\{e, e_2\}$  によって部分グラフ  $G_1 + G_2$ , 及び,  $G_3$  に分離するが,  $e$  を含まないカットセットとして  $\{e_1, e_2\}$  をいつでもとることができて, この場合にはグラフ  $G$  が部分グラフ  $G_1 + G_3$ , 及び,  $G_2$  に分離する.

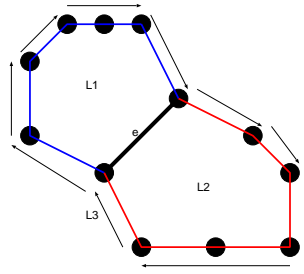


図 81: 辺  $e$  を含む閉路としては,  $L_1, L_2$  があるが,  $e$  を含まない閉路として, いつでも  $L_1, L_2$  の和から  $e$  を削除したものを第 3 の閉路  $L_3$  としてとることができる.

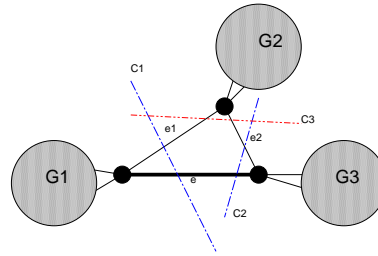
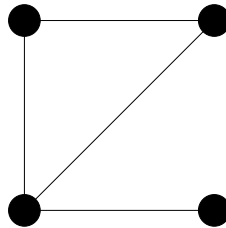


図 82: 図のように辺  $e$ , 及び, 辺  $e_1, e_2$  が三角形をなしている場合には, カットセット  $\{e, e_1\}, \{e, e_2\}$  以外に必ず,  $\{e_1, e_2\}$  を選ぶことができる.

**例題 4.6** (2004 年度 情報工学演習 II(B)#1)

図のグラフ  $G$  の各点はネットワーク  $G$  内のサーバを表すとして.



各サーバは確率  $p$  で故障する. 故障したサーバは他のサーバと情報のやりとりができないので, ネットワークから除去する.  $k$  個のサーバが故障したとき, ネットワーク内に残るサーバからなる部分ネットワークが正常である (連結である) 確率  $p_k$  を求めよ. ただし, 1つのサーバだけからなる「ネットワーク」は正常であるとは言わないことにする. また, システムの信頼度:

$$R(G) = \sum_k p_k$$

を計算し,  $p$  の関数として図示せよ.

(解答例)

故障したサーバ数が  $k = 0, 1, 2$ , のときに生き残るサーバからなる正常なネットワークを描くと図 83 のようになる ( $k = 3, 4$  の場合は問題外なことは明らか). 従って, 求める確率  $p_k$  は

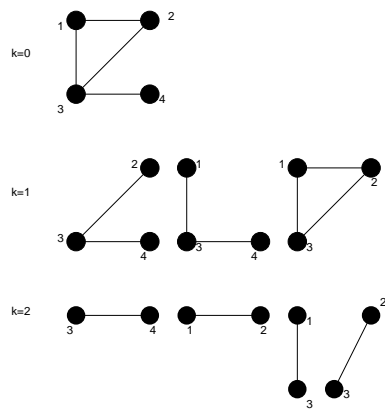


図 83: 正常なネットワーク.

$$p_0 = (1 - p)^4 \tag{118}$$

$$p_1 = 3p(1 - p)^3 \tag{119}$$

$$p_2 = 4p^2(1 - p)^2 \tag{120}$$

$$p_3 = 0, p_4 = 0 \tag{121}$$

であり, この結果からシステムの信頼度  $R(G)$  は

$$R(G) = \sum_{k=0}^4 p_k = (1 - p)^4 + 3p(1 - p)^3 + 4p^2(1 - p)^2 \tag{122}$$

となる. これを  $p$  の関数としてプロットしたものを図 84 に載せる.

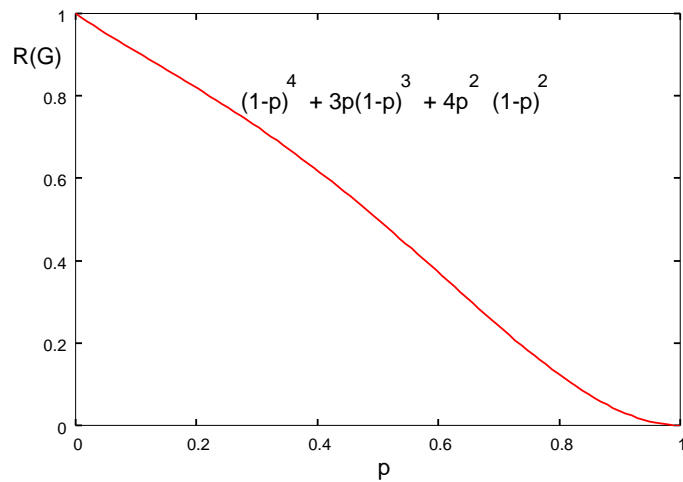


図 84: 信頼度 :  $R(G) = (1 - p)^4 + 3p(1 - p)^3 + 4p^2(1 - p)^2$

例題 4.7 (2006 年度 演習問題 4)

グラフ  $G_1$  と  $G_2$  の結び:  $G = G_1 + G_2$  とは点集合:  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ , および, 辺集合:  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ かつ } v \in V(G_2)\}$  を持つグラフのことである. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 完全グラフ  $K_2$  と  $K_3$  の結びを図示せよ.
- (2) 点集合が  $n$  個の部分集合  $V_i (i = 1, \dots, n)$  に分割され,  $G$  のどの辺もその端点を異なる部分集合内にあるようにできるものを  $n$  部グラフと呼ぶが, この  $n$  部グラフが特に, 分割の任意の部分集合内にある各点が, その他の部分集合内にある全ての点と結びつけられるとき, そのグラフを完全  $n$  部グラフと呼び,  $K_{p_1, p_2, \dots, p_n} (p_i = |V_i|)$  と書く. このとき,

$$K_{p_1, p_2, \dots, p_n} = \bar{K}_{p_1} + \bar{K}_{p_2} + \dots + \bar{K}_{p_n} \tag{123}$$

が成り立つことを示せ. ただし,  $\bar{G}$  はグラフ  $G$  の補グラフを表すものとする. ( わかりにくければ, 実際に  $K_{2,2,2}$  の場合を図示してみよ.)

(解答例)

- (1)  $K_2, K_3$  はそれぞれ点数が 2,3 の完全グラフであり, 「線分」と「三角形」がこれに相当する. ここで問題となっているこの両者の「結び」 $K_2 + K_3$  は, 問題文に定義されているように  $K_2, K_3$  の辺はそのまま残され, かつ,  $K_2$  内の点は  $K_3$  内の点と結びつくことによってできる辺から成るグラフであるから, 図 85 のようなグラフが問題の結びである.

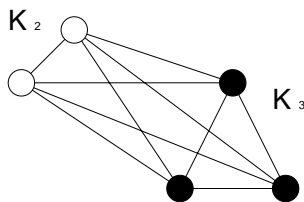


図 85:  $K_2$  と  $K_3$  の結び.

- (2) はじめに, 完全三部グラフ  $K_{2,2,2}$  に対して関係式は

$$K_{2,2,2} = \bar{K}_2 + \bar{K}_2 + \bar{K}_2 \tag{124}$$

と書けるが, この両辺の意味するグラフを具体的に描き, 両者が同形であるか否かを確認してみよう. はじめに左辺は完全三部グラフの定義より, 図 86(左) のように A,B,C グループにそれぞれ 2 点ずつ属する点のそれぞれを自分のグループ以外に属する点の全てと結びつけることによりできる. 一方の右辺の 3 つの  $\bar{K}_2$  は, 完全グラフが全ての点どうしを結んでできるグラフであったことを考えると, これは 2 個の孤立点からなる「空グラフ」ということになる. 従って, この 3 つのグラフの各々に対して, 辺は存在しないので, この 3 つの空グラフを A,B,C のように名づけ, 各々の空グラフの点を  $u_A$  等と呼ぶことに約束すると (つまり,  $u_A \in V(A)$  等), (124) 式の右辺は辺集合:

$$\begin{aligned} E(\bar{K}_2 + \bar{K}_2 + \bar{K}_2) &= \{u_A u_B | u_A \in V(A) \text{ かつ } u_B \in V(B)\} \\ &\cup \{u_B u_C | u_B \in V(B) \text{ かつ } u_C \in V(C)\} \\ &\cup \{u_C u_A | u_C \in V(C) \text{ かつ } u_A \in V(A)\} \end{aligned} \tag{125}$$

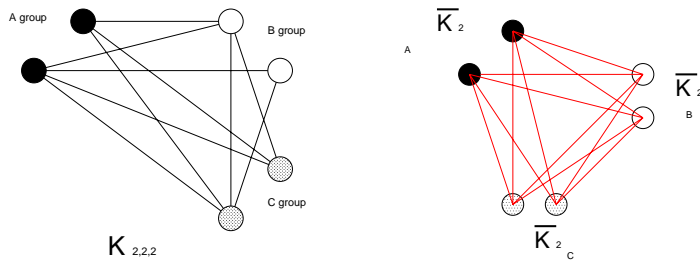


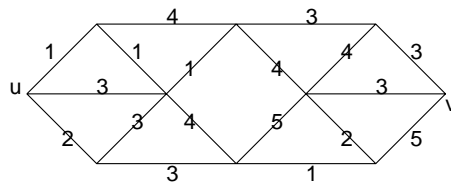
図 86:  $K_{2,2,2}$ (左) と  $\bar{K}_2 + \bar{K}_2 + \bar{K}_2$ (右).

となり, これを図示すると図 86(右) のように,  $K_{2,2,2}$  と同形なグラフが出来上がる.

以上の議論は直ちに一般の完全  $n$  部グラフに拡張することができる.  $K_{p_i}$  の補グラフ  $\bar{K}_{p_i}$  は  $p_i$  個の孤立点からなる空グラフであり, この点集合を  $V(i)$  とすれば, 結び:  $\bar{K}_{p_1} + \dots + \bar{K}_{p_n}$  は  $n$  個のグループの中から任意の異なる 2 グループ  $V(i), V(j)$  に属する点どうしを結んでできる全ての辺集合であるから, これはまさに完全  $n$  部グラフ  $K_{p_1, \dots, p_n}$  の描き方そのものである. 従って, 題意の関係式は成立する.

**例題 4.8** (2004 年度情報工学演習 II(B) #1)

図に与えたグラフの始点  $u$  から終点  $v$  へ至る全ての経路の中で最短のものを求めよ.



なお, グラフの各辺に記された数字はその区間の距離であるものとする. なお, 同じ最短距離を与える経路が複数存在する場合には, それら全てを答えること.

(解答例)

図 87 のように各点に  $A \sim H$  の名前を付ける. 各点  $x$  までの最短路を  $l(x)$  と書くことにすれば, これらは順

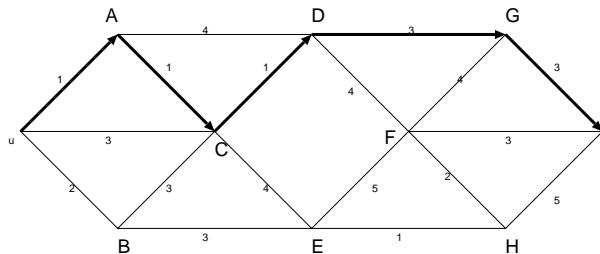


図 87: 図のように各点に名前を付ける. 太線矢印が求める最短路である.

次に求めることができ

$$\begin{aligned}
 l(u) &= 0 \\
 l(A) &= l(u) + 1 = 1 \\
 l(B) &= l(u) + 2 = 2 \\
 l(C) &= \min\{l(u) + 3, l(A) + 1, l(B) + 3\} = \min\{3, 2, 5\} = 2 \\
 l(D) &= \min\{l(A) + 4, l(C) + 1\} = \min\{5, 3\} = 3 \\
 l(E) &= \min\{l(C) + 4, l(B) + 3\} = \min\{6, 5\} = 5 \\
 l(F) &= \min\{l(D) + 4, l(F) + 5\} = \min\{7, 10\} = 7 \\
 l(G) &= \min\{l(D) + 3, l(F) + 4\} = \min\{6, 11\} = 6 \\
 l(H) &= \min\{l(F) + 2, l(E) + 1\} = \min\{9, 6\} = 6 \\
 l(v) &= \min\{l(G) + 3, l(H) + 5, l(F) + 3\} = \min\{9, 11, 10\} = 9
 \end{aligned}$$

のようになる. 従って, 最短路は  $u \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow v$  であり, そのときの最短路長は 9 である.

**例題 4.9** (2005 年度情報工学演習 II(B) #1)

グラフ  $G$  は  $n = 2k$  個の点を持つ単純グラフで三角形は持たないものとする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1)  $k = 3$  のとき  $G$  の辺数  $m$  の上界  $m^+ (\geq m)$  を求め, その上界  $m^+$  を与えるグラフ  $G$  の例を一つ描け.
- (2)  $G$  の辺数は  $k^2$  以下である ( $m \leq m^+ = k^2$ ) ことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

注: 数学的帰納法を用いないやり方でも証明できるという場合にはそれを解答としても良い.

(解答例)

- (1)  $k = 3$  であるから, 点数は  $n = 2 \times 3 = 6$  である. このとき, グラフ  $G$  が三角形を持たないように描くと図 88(左) のようになり, このときの辺数は  $m^+ = 9 = 3^2 = k^2$  となり, この図 88 に 1 本でも辺を加えると三角形ができてしまうので, これが辺の上限を与える.

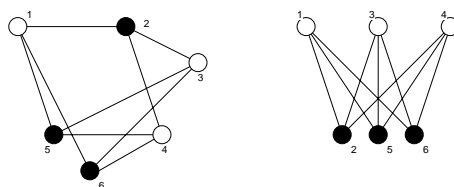


図 88:  $k = 3, n = 2k = 6$  の場合の三角形を持たない最大の辺を与えるグラフの例 (左). このグラフは完全二部グラフ  $K_{3,3}$  と同型である (右).

- (2) 数学的帰納法で示す.

$k = 1$  のとき,  $n = 2 \times 1 = 2, k^2 = 1 = m^+$  の成立は明らか (グラフ  $G$  は 2 点からなる「木」である).  
 そこで,  $k$  のときに題意の成立を仮定する. つまり,  $n = 2k$  のとき,  $m \leq m^+ = k^2 \equiv m^+(k)$  とする.  
 このとき, (1) の結果より, 三角形を持たない辺数最大のグラフは完全二部グラフと同型であり,  $K_{s,t}$

の点数が  $s+t$ , 辺数が  $s \times t$  で与えられることを考えると,  $s=t=k$  の場合には点数は  $n=2k$ , 辺数は  $k^2$  であり, 題意を満たしていることに注目する (図 88(右) 参照). この完全二部グラフ  $K_{k,k}$  に点を 2 つ加え (A,B とする), A と二部グラフの白丸を結び (辺が新たに  $m$  本できる), B と二部グラフの黒丸を結び (辺が新たに  $m$  本できる). そして最後に A,B どうしを結び (辺が新たに 1 本できる) と点数は  $2k+2=2(k+1)$  であり, このときの辺数は

$$m^+(k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \tag{126}$$

となり, 上記のようにしてでき上がるグラフに任意の 1 辺を加えると三角形ができてしまうのは明らかなので, これが上限であり,  $k+1$  のときに題意の成立が言える. 以上により, G の辺数は  $k^2$  以下であることが示せた.

**例題 4.10** (2006 年度情報工学演習 II(B) #1)

$n$  をグラフの点数,  $m$  を辺数とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 関係式:

$$m > {}_{n-1}C_2$$

を満たす単純グラフは連結であることを示せ.

(2)  $n > 1$  に対して

$$m = {}_{n-1}C_2$$

である非連結グラフの例を一つ挙げよ.

(解答例)

(1)  $n$  が一定である場合, グラフの成分数  $k$  が多くなればその分の辺数が少なくなることは明らか. 従って, ここでは点数  $n$  からなる非連結グラフのうち最小の成分を持つもの, すなわち,  $k=2$  の場合を考える. このとき, 辺数を最大化するグラフは  $n-1$  個の点からなる完全グラフ  $K_{n-1}$  と孤立点 1 点からなるグラフであるから, その辺数は  ${}_{n-1}C_2$  である. この孤立点と  $K_{n-1}$  の任意の 1 点を結びと単純連結グラフが得られることになるので, これが単純連結グラフの辺数  $m$  の下限を与えることになる. つまり

$$m \geq {}_{n-1}C_2 + 1 \tag{127}$$

である. これは辺数  $m$  は整数であることを考えると次のように書き換えることができる.

$$m > {}_{n-1}C_2 \tag{128}$$

以上より, 単純グラフの辺数は  $m > {}_{n-1}C_2$  を満たすという題意を示すことができた.

(2)  $n=4$  とすると,  $K_3$ (三角形) と孤立点 1 点ができる. この辺数は  ${}_3C_2 = 3$  である.

**演習問題 4**

- (1) 任意のグラフ  $G$  において, 次数が奇数である点の個数は必ず偶数個あることを関係式:

$$\sum_{u \in V(G)} \deg(u) = 2\epsilon(G)$$

を用いて示せ.

- (2) 単純グラフ  $G$  の点の個数が 2 以上ならば,  $G$  には必ず同じ次数を持つ 2 つの点が存在することを示せ.

注意: 完全には証明できない場合でも, 自分の考察過程を全てレポートに書くこと.