

グラフ理論 講義ノート #6

井上 純一

北海道大学 大学院情報科学研究科

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成 19 年 5 月 28 日

目次

7 木とその数え上げ	97
7.1 木の基本的な性質	97
7.2 全域木	99
7.3 基本閉路集合と基本カットセット集合	99

演習問題 5 の解答例

1. 既に見た **演習問題 2** では与えられた数列がグラフ G の次数列となるような状況, つまり「グラフ的」か否かを調べてもらった. 一般的に与えられたグラフの次数列を書き出すことは易しいが, 逆に具体的な数列が与えられた場合, それがグラフ的であるかどうかを判定することは難しい. そこで, 今回の演習問題では G が単純グラフである場合に対する判定条件を具体的にいくつかの数列に対して調べてもらった.

まずは点数の少ない簡単な $D_1 = (3, 2, 2, 1)$ に対して条件式の成立を確かめてみる. $d_1 = 3, d_2 = 2, d_3 = 2, d_4 = 1$ であるから, $\sum_{i=1}^4 d_i = 8$ であり偶数. また, $k = 1$ の場合には $i = 2, 3, 4$ に対して $\min\{1, d_i\} = 1$ であるから

$$\sum_{i=1}^1 d_i = 3 \leq 1 \cdot (1 - 1) + 1 + 1 + 1 = 3$$

となり, 成立. $k = 2, 3, 4$ の場合も同様にして

$$\sum_{i=1}^2 d_i = 5 \leq 2 \cdot (2 - 1) + 2 + 1 = 5$$

$$\sum_{i=1}^3 d_i = 7 \leq 3 \cdot (3 - 1) + 1 = 7$$

$$\sum_{i=1}^4 d_i = 8 \leq 4 \cdot (4 - 1) = 12$$

となり, 問題に与えられた不等式が全ての k について成立する. 従って, 数列 $D_1 = (3, 2, 2, 1)$ はグラフ的である. 実際にグラフを描いてみると図 112 のようになる.

この例を具体的にみたことで, ある程度は感じをつかんだので証明を試みよう. まずは図 112 のように考えるグラフを $|V_1| = k, |V_2| = n - k$ の 2 つの点集合に分ける. つまり, 証明すべき不等式の左辺

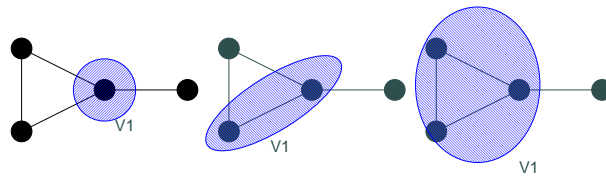


図 112: 次数列が $D_1 = (3, 2, 2, 1)$ で与えられるグラフ. 題意に与えられた不等式の証明を行うため, グラフを $|V_1| = k, |V_2| = n - k$ の部分に分ける. 左から右へ, $|V_1| = 1, 2, 3$ の場合.

に現れる和 $\sum_{i=1}^k d_i$ を構成する点集合を V_1 , 残りを V_2 とするわけである. すると例えば, 図 112 のグラフからも解るように, V_1 からなる部分グラフの次数 $\sum_{i=1}^k d_i$ は V_1 に属する辺を接続辺からの寄与によるものと, V_1 の各点へ V_2 の各点から向かう接続辺からの寄与によるものに分けることができる. 前者の辺数を ε_1 , 後者の辺数を ε_2 と名づけよう. このとき V_1 の次数と $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の間には, ε_1 に関しては「握手補題」が成り立つことを考慮すれば

$$\sum_{i=1}^k d_i = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{135}$$

なる関係が成り立つことがわかる. ここで V_1 中の辺数の上限は明らかに部分グラフ V_1 が「完全グラフ」となる場合であり, $\varepsilon_1 \leq {}_k C_2 = k(k-1)/2$ である. よって, (135) 式は

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \varepsilon_2 \tag{136}$$

と書き換えることができる. あとは辺数 ε_2 が評価できればよいが, V_2 から V_1 への接続辺は V_2 中の 1 点 (これを点 i としよう) から V_1 の全ての点へと接続辺が伸びる場合には k 本, V_1 中の部分集合のみに接続辺を伸ばす場合には点 i の次数 d_i 本だけ存在することになるので, この 2 つの場合をまとめて書けば, 点 i の接続辺は $\min\{k, d_i\}$ となる. 従って, ここで問題とする辺数 ε_2 は i に関して $\min\{k, d_i\}$ を $i = k+1$ から n まで足し上げた $\sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}$ に等しい. 従って (136) 式は結局

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\} \tag{137}$$

と書き直せ, これと握手補題から任意のグラフ G に対して成り立つべき条件: $\sum_{i=1}^n d_i = 2\varepsilon(G) =$ 偶数 をあわせて題意に与えられた条件式が示された. ここに示したグラフ的であるために数列に課せられる条件¹ は Erdős-Gallai の定理として知られている.

この定理を使って数列 D_2, D_3 がグラフ的かどうかを判定しよう. $D_2 = (4, 3, 3, 3, 3)$ に関しては, $d_1 = 4, d_2 = 3, d_3 = 3, d_4 = 3, d_5 = 3$ であり, $\sum_{i=1}^5 d_i = 16$ で偶数. $k = 1$ から逐次不等式の成立をチェックしていくと

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^1 d_i = 4 &\leq 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \\ \sum_{i=1}^2 d_i = 7 &\leq 2 \cdot (2 - 1) + 2 + 2 + 2 = 7 \\ \sum_{i=1}^3 d_i = 10 &\leq 3 \cdot (3 - 1) + 3 + 3 = 12 \end{aligned}$$

¹ この条件は必要十分である. 十分性のチェックをここでは省略する.

$$\sum_{i=1}^4 d_i = 13 \leq 4 \cdot (4 - 1) + 3 = 15$$

$$\sum_{i=1}^5 d_i = 16 \leq 5 \cdot (5 - 1) = 20$$

となり、全ての k に対して成立する。従って数列 D_2 はグラフ的である。実際にグラフを描くと図 113 のようになる。

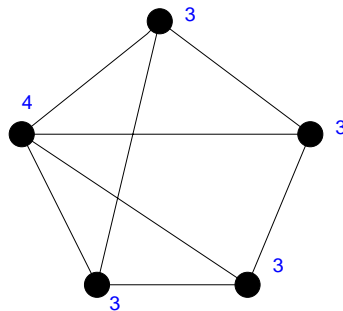


図 113: 次数列 $D_2 = (4, 3, 3, 3, 3)$ を持つグラフ.

最後に数列 $D_3 = (7, 6, 6, 6, 5, 5, 2, 1)$ を判定する。 $d_1 = 7, d_2 = 6, d_3 = 6, d_4 = 6, d_5 = 5, d_6 = 5, d_7 = 2, d_8 = 1$ であるから、 $\sum_{i=1}^8 d_i = 38$ となって偶数。また、条件式の成立を $k = 1$ から逐次確かめていくと

$$\sum_{i=1}^1 d_i = 7 \leq 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$$

$$\sum_{i=1}^2 d_i = 13 \leq 2 \cdot (2 - 1) + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 13$$

$$\sum_{i=1}^3 d_i = 19 \leq 3 \cdot (3 - 1) + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 = 18$$

$$\sum_{i=1}^4 d_i = 25 \leq 4 \cdot (4 - 1) + 4 + 4 + 2 + 1 = 23$$

$$\sum_{i=1}^5 d_i = 30 \leq 5 \cdot (5 - 1) + 5 + 2 + 1 = 28$$

$$\sum_{i=1}^6 d_i = 35 \leq 6 \cdot (6 - 1) + 2 + 1 = 33$$

$$\sum_{i=1}^7 d_i = 37 \leq 7 \cdot (7 - 1) + 1 = 43$$

$$\sum_{i=1}^8 d_i = 38 \leq 8 \cdot (8 - 7) = 8$$

となり、 $k = 3, 4, 5, 6$ に対して不等式は満たされない。従って D_3 はグラフ的ではない²。

² 「G は単純グラフ」であるという条件を緩めると、この数列 D_3 はグラフ的である (実際に多重辺を使って描いてみると良い)。しかし、この定理はその証明から (辺数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の評価の仕方を再度見よ)、単純グラフについての条件なので、数列 D_3 は単純グラフを作ることはできない。

2. 簡単なので手短かに書こう. 問題の $C_{m,n}$ の辺の数は完全グラフの辺数がどのように与えられたのかを思い出して

$$\begin{aligned} \varepsilon(C_{m,n}) &= m^2 + \frac{m(m-1)}{2} + m(n-2m) + \frac{(n-2m)(n-2m-1)}{2} \\ &= \frac{3}{2} \left\{ m + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - n \right) \right\}^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} - n \right)^2 + \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned} \quad (138)$$

従って, $\varepsilon(C_{m,n})$ を最小にする m の値は

$$m = \frac{n}{3} - \frac{1}{6} \quad (139)$$

であり, そのときの最小値は $n(n-1)/3 - 1/24$ となる. ただし, m, n は整数であるべきなので, n が与えられた場合の最小値を与える m は (139) に最も近い整数値となる.

7 木とその数え上げ

今回と次回の 2 回の講義では系統図や分子構造, あるいはコンピュータのファイルシステム等, 多くの現象/対象を表現することのできる, 簡単な構造ではあるが重要なグラフである「木」, 及び, その数え上げ法 (Cayley (ケイリー) の定理とその系) について学習する.

7.1 木の基本的な性質

ここでいう「木」とは次のようにグラフ「林」の特別な場合として定義される.

林 (forest) : 閉路を含まないグラフ.

木 (tree) : 連結な林.

例えば, 図 114 に載せたグラフが林であり, 3 つある成分のうちの各々が木である.

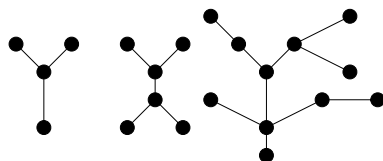


図 114: 林の例. 3 つある成分の各々が木に相当する.

これらの木の基本的な性質は次の定理によりまとめられている. 証明は教科書 p.61 を読んでもらうことにして, 講義では説明しない. 各命題を例に挙げた木に当てはめて確認されたい.

定理 9.1

点 n 個からなるグラフ T を考えるとき、次の各命題は同値である。

- (i) T は木である。
- (ii) T には閉路は無く、辺が $n - 1$ 本ある。
- (iii) T は連結であり、辺が $n - 1$ 本ある。
- (iv) T は連結であり、全ての辺は「橋」である。
- (v) T の任意の 2 点を結ぶ道はちょうど 1 本である。
- (vi) T に閉路は無いが、新しい辺をどのように付け加えても閉路ができ、しかも、1 個の閉路である。

ここで、上の定理の命題 (ii)(iii) より、林 G の辺の数に関して次の系が得られる。

系 9.2

林 G には n 個の点と k 個の成分があるとする。このとき、林 G には $n - k$ 本の辺がある。

(証明)

閉路が無く連結だとすると、 $n - 1$ 本の辺がある。これから辺を 1 本ずつ切断する操作を進めると

- 1 本辺を切断すると ⇒ 成分数 2, $n - 2$ 本の辺
- 2 本辺を切断すると ⇒ 成分数 3, $n - 3$ 本の辺
- 3 本辺を切断すると ⇒ 成分数 4, $n - 4$ 本の辺
- ...
- ...
- ...
- $k - 1$ 本辺を切断すると ⇒ 成分数 k , $n - k$ 本の辺

となる。(証明終わり)。

さらに、定理 9.1 の (ii) より木の端点数に関して次の系が得られる。

系 9.3

単点でない木は、少なくとも 2 点の端点を含む。

(証明)

木 $T : V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, $p \geq 2$, $E(T) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ とすると、定理 9.1(ii) より

$$q = p - 1$$

であり、辺の総数の 2 倍はグラフの次数に等しい (握手補題) :

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$$

から直ちに

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2(p - 1)$$

が得られる。従って、木の端点が 0, 1 だとすると、上式右辺が負またはゼロとなり、点の数が 2 以上のグラフに対する次数の定義に反する。(証明終わり)。

7.2 全域木

全域木 (spanning tree) : 連結グラフ G に対し, 閉路が無くなるまで辺を除去して残るグラフ (図 115 参照).

これを一般化すると

全域林 (spanning forest) : n 個の点と m 本の辺, k 個の成分があるとして, G の各成分に対して, 閉路が無くなるまで辺を除去する操作を繰り返して得られるグラフ.

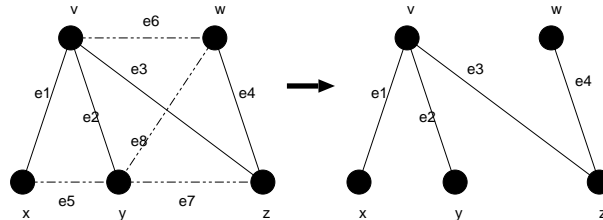


図 115: 連結グラフから生成された全域木の一例.

閉路階数 (cycle rank) $\gamma(G)$: 全域林を得るまでに切断しなければならない辺の本数.

$$\begin{aligned} \gamma(G) &= (G \text{ の辺数}) - (n \text{ 個の点, } k \text{ 成分からなる林 } G \text{ の辺数}) \\ &= m - (n - k) \text{ (系 9.2 より)} = m - n + k \end{aligned}$$

カットセット階数 (cutset rank) $\xi(G)$: 全域木の辺数

$$\xi(G) = n - k$$

当然, $\gamma(G)$ と $\xi(G)$ の間には $\gamma(G) + \xi(G) = m$ の関係がある.

7.3 基本閉路集合と基本カットセット集合

木 T に関連した基本閉路集合 : T に含まれない G の任意の辺を一つ T に付加すると, 閉路が一つできる. この操作によりできる閉路の集合を基本閉路集合と呼ぶ (その一例として図 116(左) 参照).

木 T に関連した基本カットセット集合 : T の各辺を除去して得られるカットセット集合 (その一例を図 116(右) に載せる).

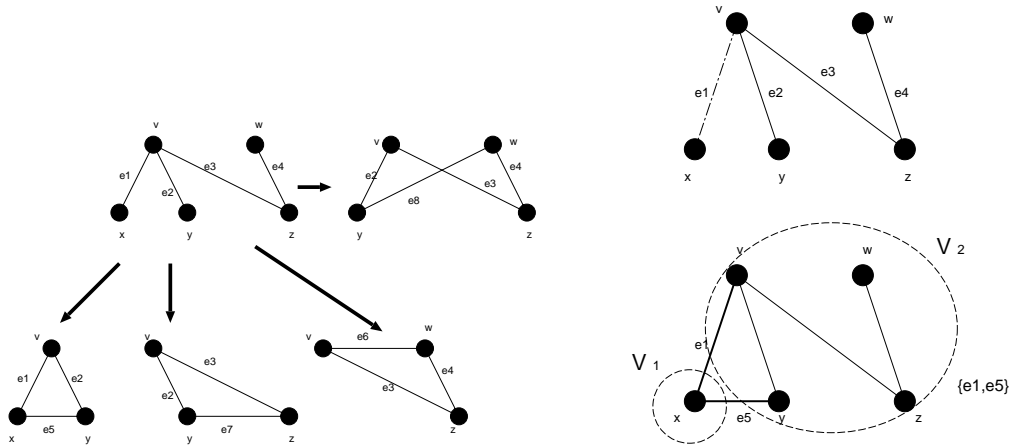
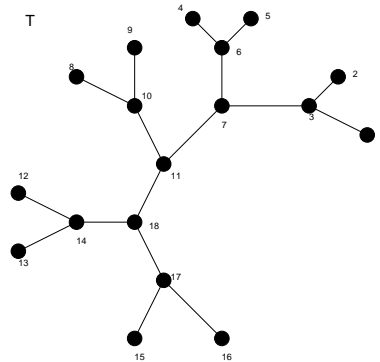


図 116: 基本閉路集合の一例 (左) と基本カットセット集合の一例 (右).

例題 7.1 (2004 年度 演習問題 6)

G が連結グラフであるとき, G の中心 (centre) とは次のような点 v のことである: v と G の他の点との距離の最大値ができるだけ小さい. このとき, 以下の問いに答えよ.



- (1) 端点を除去する操作を続けて行くことにより, 図の木 T の中心を求めよ.
- (2) どんな木でも中心は 1 つか 2 つであることを示せ.
- (3) 木の中心が 2 つある場合, それらの 2 点は隣接していることを示せ.
- (4) 7 点からなる木で, 中心が 1 つの木と, 2 つの木をそれぞれ一つずつ例示せよ.

(解答例)

- (1) 問題文中に与えられた木 T に対し, 「端点を除去する操作」³ を行くと, 1 回目に削除される端点グループは $\{1, 2, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 15, 16\}$ であり, 2 回目に削除される端点グループは $\{3, 6, 10, 14, 17\}$. そして, 最後に削除される端点グループは $\{7, 18\}$ である. 従って, これら一連の操作により最後まで生き残る木 T の中心は 11 である.
- (2) 仮に木の中心が 3 つあるとする. このとき, 定理 9.1 (iv) から, 木の全ての辺は橋になっていることが

³ ここで言う「端点を除去する操作」とはもう少し正確に言うと, この解答に示したように「端点のグループを除去する操作」のことです.

ら、端点を除去していく操作により、残る木としては図 117 の場合しかない。この場合に対して、さら

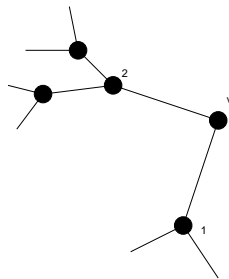


図 117: 端点を削除することによってできるグラフの一例.

に次の 2 通りの可能性があり得る.

- (I) 点 1 と点 2 に結合している成分の大きさが等しい場合
- (II) 点 1 と点 2 に結合している成分の大きさが異なる場合

(I) の場合について考えると、点 1 と点 2 と v に接続する 2 つの辺を除去することにより、唯一の中心 v が得られる.

(II) の場合に関して、点 2 に結合している成分の方が大きいとすると、点 1 と点 v を結ぶ辺を除去することにより、 $(v, 2)$ という 2 つの中心が得られる.

従って、(I)(II) のいずれの場合にしても、木の中心が 3 つあるという可能性はあり得ず、必ず、引き続く除去のプロセスにより、1 つまたは 2 つの中心に行き着くことになる.

- (3) もしも仮に、木の中心が 2 つあり、それらが隣接していないとすると、その場合には定理 9.1 (iv) により、木の全ての辺は橋であり、中心である点 1, 2 は次数が 2 の点 v を介して結合しているはずである (図 118 参照). 従って、点 1, 2 とこの v との接続辺を除去すると中心が 1 つとなってしまう、中心が 2 つあ

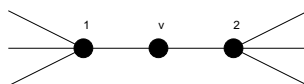


図 118: 木では全ての辺が橋である.

るという仮定に反する. よって、木の中心が 2 つある場合には、それらは必ず隣接していると結論付けられる.

- (4) 点が 7 つで、中心が 1 つまたは 2 つのグラフの一例をそれぞれ図 119 に載せる.

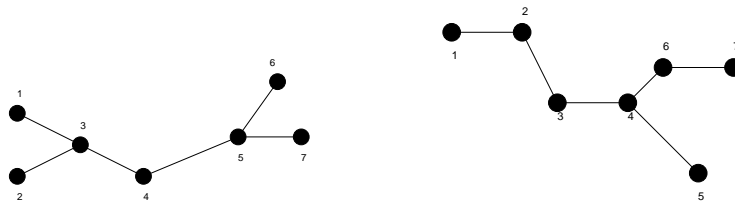
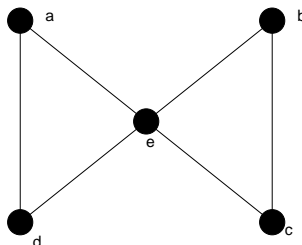


図 119: 7点からなる木で中心が1つのもの(左)と中心が2つのものの一例.

例題 7.2 (2005年度 演習問題 6)

(1) 図に示したグラフの全域木を全て描け.



(2) グラフ G の辺のある集合を C^* とする. どの全域林にも C^* と共通な辺があるならば, C^* にはカットセットが含まれることを例を挙げて示せ.

(解答例)

(1) 図 120 のように問題のグラフの各辺に番号をふると, 辺集合 $I : \{1, 2, 3\}$, 辺集合 $II : \{4, 5, 6\}$ のそれぞれから, 要素を1つずつ取り出し, その辺を削除すれば全域木が得られる. 従って, 考える全域木

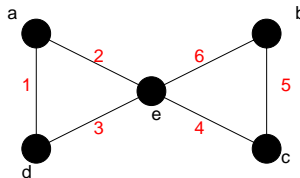


図 120: 問題のグラフの各辺に番号をふる.

の数は $3 \times 3 = 9$ 通りである. それぞれの全域木と削除する辺の組み合わせは $A : (1,4)$, $B : (1,5)$, $C : (1,6)$, $D : (2,4)$, $E : (2,5)$, $F : (2,6)$, $G : (3,4)$, $H : (3,5)$, $I : (3,6)$ であり, それぞれを描くと図 121 のようになる.

(2) 例として図 122(左) のようなグラフを考える. このとき, 辺 e はカットセットになっており (この場合は「橋」とも言える), この辺を削除すると, 連結グラフは点と三角形に分離する. そこで, このグラフの全域木を作るためには, 三角形の各辺を1辺だけ削除すればよいので, 可能な全域木は図 122(右) のようになり, 辺 e は全ての全域木に共通に含まれることになる. 従って, このグラフに関しては題意が満たされていることになる.

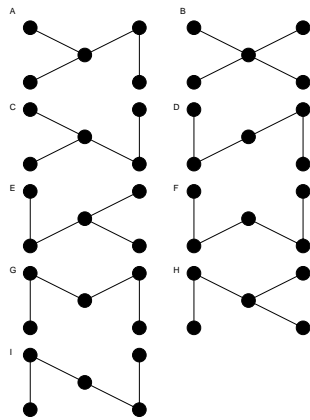


図 121: 可能な全域木.

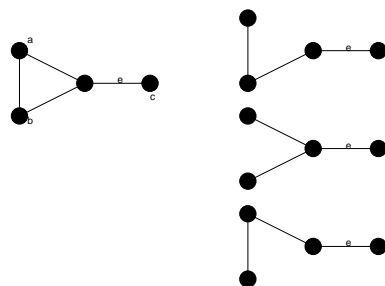


図 122: ここで考える連結グラフ G (左) とその全域木 (右).

例題 7.3 (2006 年度 演習問題 6)

T_1, T_2 は連結グラフ G の全域木であるとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) e が T_1 の任意の辺であるとき, T_1 の辺 e を辺 f で置き換えたグラフ $(T_1 - \{e\}) \cup \{f\}$ も全域木になるような, T_2 の辺 f が存在することを例を挙げて示せ.
- (2) (1) での操作を繰り返すことにより, T_1 は T_2 に「変換」できることを例を挙げて示せ. ただし, T_1 の辺の一つを T_2 の辺で置き換える各段階において, 全域木になっているものとする.

(解答例)

- (1) 図 123 に載せたグラフ G とその 2 つの全域木 T_1, T_2 を考えよう. ここで, 問題文に与えられている全域木 T_1 の辺 e を 3 に, 全域木 T_2 の辺 f を 5 とすると (今後このような対応づけを $e = 3, f = 5$ と書くことにする), 全域木 T_1 から e を削除し, 代わりに全域木 T_2 の辺 f を加えたもの: (以下では一連のこの作業を「操作」と呼ぶ) はグラフ G の全域木となっている. 従って

$$T_1 - \{e\} \cup \{f\} \simeq \text{グラフ } G \text{ の全域木}$$

が成立していることがわかる (この操作で得られる具体的な全域木は図 124 の t_1). 全域木の定義より, T_1, T_2 ともに辺 g を一つ加えるごとに閉路ができるが (このようにできるグラフ G の辺 2, 3, 5 からなる閉路を便宜上 $C = 235$ と呼ぶことにする. また, 辺 g はこの全域木を作る際に削除された辺であること

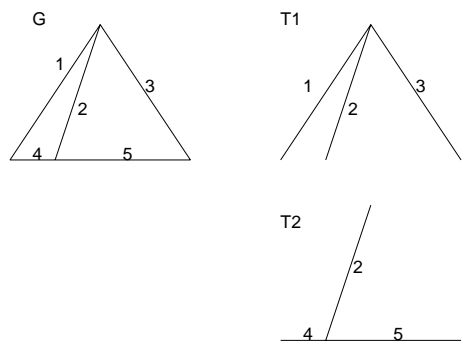


図 123: ここで考えるグラフ G とその全域木 T_1, T_2 .

に注意), T_1 において削除された辺 $f = 3$ が属するこの閉路 $C = 235$ には辺 f とは異なる辺 $2, 5 (= g)$ があるため, 全域木 T_2 においてこの $g = 5$ が存在すれば f が削除された木に T_2 からこの $g = 5$ を e として付け加えることによって再びグラフ G の全域木ができる. 全域木の作り方から明らかに, どのように T_2 を選ぼうが, その木には $2, 3, 5$ のうちのいずれか 2 つの辺が存在するわけだから, 常にこのような辺 e を選ぶことができる. これはここで調べたグラフ G に限らず, 任意のグラフ G およびその全域木に対して成立するのは明らか.

- (2) 図 123 に与えられたグラフの全域木 T_1, T_2 に対して問題に与えられた操作を辺 $e = 3, f = 2$ について行った全域木を $t_1 = T_1 - \{e\} \cup \{f\}$ とし, この木 t_1 に対して操作を辺 $e = 3, f = 5$ について行った木を考えると

$$t_2 = t_1 - \{e\} \cup \{f\} \simeq T_2$$

となり, T_2 が得られる. これらの 2 回の操作過程を図示すると図 124 のようになる. また, 明らかにこ

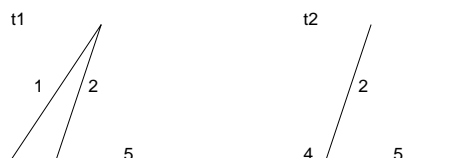


図 124: 全域木 T_1 から $e = 3, f = 5$ の操作でできる木 t_1 と t_1 から $e = 1, f = 4$ の操作によってできる t_2 . 明らかに t_2 は T_2 と同形である. また, t_1, t_2 とともにグラフ G の全域木である.

の移行: $T_1 \rightarrow T_2$ の過程で得られる木 t_1 はグラフ G の全域木である.

例題 7.4 (2005 年度情報工学演習 II(B) #1)

次の各グラフの閉路階数 $\gamma(G)$, カットセット階数 $\xi(G)$ を求めよ.

- (1) K_5 (2) $K_{3,3}$ (3) W_5 (4) N_5 (5) ピーターズン・グラフ

(解答例)

答えのみ書く. (1) $\gamma(K_5) = 6, \xi(K_5) = 4$ (2) $\gamma(K_{3,3}) = 5, \xi(K_{3,3}) = 4$ (3) $\gamma(W_5) = 5, \xi(W_5) = 5$, (4)

$\gamma(N_5) = 0, \xi(N_5) = 0$ (5) $\gamma(\text{ピーターソン}) = 6, \xi(\text{ピーターソン}) = 9$.

演習問題 6

- (1) ピーターソン・グラフの全域木を一つ描け.
- (2) グラフ G は ε の辺数と $|G|$ 個の点を含むとする. このとき, G の任意の全域木に対し, $\varepsilon - |G| + 1$ 個の基本閉路が存在することを (1) の $G \equiv \text{ピーターソン・グラフ}$ に関して示し, 次いで, 任意のグラフ G に対して示せ.