グラフ理論 講義ノート #8

井上 純一
北海道大学 大学院情報科学研究科
URL：http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成 19 年 6 月 11 日

目 次

8 平面性 **132**
8.1 平面グラフとオイラーの公式 132
8.2 交差数と厚さ 137

演習問題 7 の解答例

ここでの最終的な目標は**葉数 n の 2 分木の総数 p_n を求める**ことにある (※ n は「葉数」であり, 「点数」でないことに注意). 次の手順に従って考察を進め, この総数を求めてみることにしょう.

(1) 葉数 3 の 2 分木の総数は $p_3 = 2$ であるが, これを実際に描いてみると図 138 のようになる.

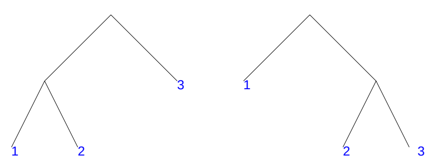

図 138: 葉数 3 の 2 分木.

(4) 葉数 4 の 2 分木の総数を数えることにする. 実際に描き出してみると, 図 139 のような 5 つの 2 分木が得られる. 従って, $p_4 = 5$ である.

(3) (1)(2) の結果から, 葉数 3,4 の 2 分木の総数がそれぞれ $p_3 = 2, p_4 = 5$ であることがわかったので, 問題に与えられた操作によって得られる 2 分木の総数は $p_3 \times p_4 = 10$ 個あるはずである. 実際に, この 2 分木の葉数は $3 + 4 = 7$ であることに注意して描きだしてみると図 140 のようになる.

(4) (3) で出来上がる 2 分木は葉数 7 のグラフであるが, 前問 (3) で考えた操作の「逆操作」つまり, 葉数 7 の 2 分木をその根から葉数 $3, 4$ の 2 つの 2 分木に分解する操作を考えると, 葉数 7 の 2 分木の総数のうち, 葉数 $3, 4$ へと分解されるものはその一部分であることがわかる. 実際, この逆操作における分解の仕方としては他に $(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (0,7), (7,0)$ があるからである. 従って, 問題に与えた「2 分木生成多項式」$P(x)$ の x に関する n 次の冪係数に「葉数 n の 2 分木の総数」という意味合いを持たせると, この多項式の 2 乗 $\{P(x)\}^2$ の中に現れる x^7 の係数には上に挙げた分解の仕方に対応した

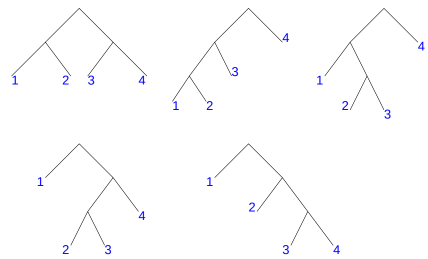

図 139: 葉数 5 の 2 分木.

$p_1p_6, p_6p_1, p_2p_5, p_5p_2, p_0p_7, p_7p_0, p_3p_4, p_4p_3$ が現れることになる.
ところで, ここで考えた操作「新しい根を介して 2 つの 2 分木をつなげて, サイズのより大きな 2 分木を作る」ことによって, 全ての葉数を持つ 2 分木が再生産できないかどうかを考えてみると, 明らかに葉数 1 の 2 分木を作ることはできない. これは葉数 1 の 2 分木からの逆操作で 2 つの 2 分木を作ることができないことを考えると明らかである. 従って, $\{P(x)\}^2$ は $P(x)$ の全ての冪 (2 分木) を再現できず, $\{P(x)\}^2$ に x を足すことで $P(x)$ が再現される (任意の葉数の 2 分木を作ることができる). よって, 次の関係式:

$$P(x) = x + \{P(x)\}^2 \tag{207}$$

が成り立つことになる.

(5) (4) で示された関係式に具体的に $P(x)$ の x に関する多項式を代入してみると

$$p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n + \cdots = x + \{p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n + \cdots\}^2 \tag{208}$$

が得られるが, この等式が成り立つためには全ての x の冪係数が一致することが必要である. この条件を x^0, x, x^2, x^3, x^4 の冪係数に対して書き下してみると

$$p_0 = p_0^2 \tag{209}$$

$$p_1 = 1 + 2p_1p_0 \tag{210}$$

$$p_2 = 2p_0p_2 + p_1^2 \tag{211}$$

$$p_3 = 2p_0p_3 + 2p_1p_2 \tag{212}$$

$$p_4 = 2p_0p_4 + 2p_1p_3 + p_2^2 \tag{213}$$

となるが, 自明な事実 $p_0 = 0$(「根」のみが存在し, 「葉」が一つも無い場合. つまり, 孤立点一個の場合) に注意すると, 逐次, この方程式を解くことにより, $p_1 = p_2 = 1, p_3 = 2, p_4 = 5$ が求められる. これは 2 分木を実際に描いた場合の考察結果と一致する.
そこで, (208) 式が任意の x に対して成り立つことを考えて, 形式的に (208) 式を $P(x)$ について解いてみると

$$P(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2} \tag{214}$$

が得られるが, $P(x)$ が x に関する冪級数で与えられたことを思い出し, $x \ll 1$ の下で $\sqrt{1-4x}$ をテーラー展開してみると

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2x - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{i}(2k-3)}{i!\,2^i}(4x)^i \tag{215}$$

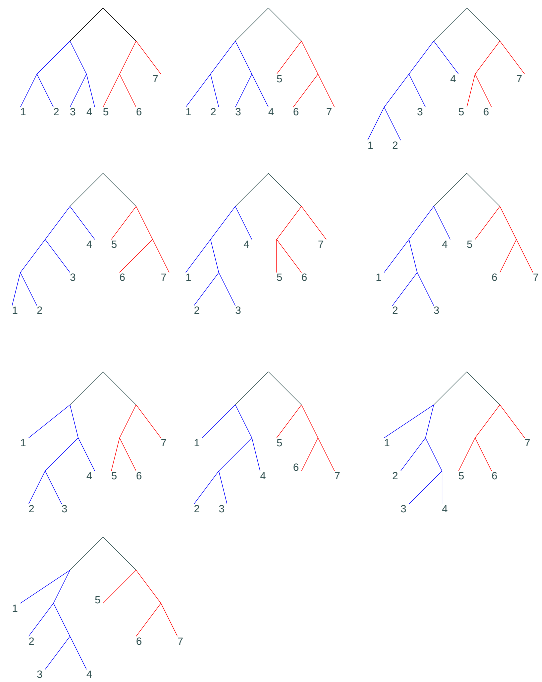

図 140: ここで考える操作によってできる葉数 7 の 2 分木. 根に接続する左側の 2 分木が葉数 4 からのものであり, 右側が葉数 3 からのもの.

となるので, 展開係数 (つまり, 2 分木の数) は全て正の値をとることに注意すれば, (214) の 2 つの解のうち $P(x) = (1-\sqrt{1-4x})/2$ のみが採用され

$$P(x) = x + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{i}(2k-3)}{i!\,2^i}(4x)^i \tag{216}$$

が得られる. これを少し整理すれば

$$P(x) = x + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{2^{i-1}\sum_{k=2}^{i}(2k-3)}{i!}x^i = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{i-1}(2i-3)!!}{i!}x^i \tag{217}$$

となる. ただし, ここでは $(2i-3)!! = (2i-3)(2i-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$, $(-1)!! = 1$ と定義したことに注意されたい. 従って n 個の葉からなる 2 分木の総数は, 上式右辺の和における $i=n$ の項の係数であり

$$p_n = \frac{2^{n-1}(2n-3)!!}{n!} \tag{218}$$

となる.

そこで早速, 具体的にはじめの数項を確かめてみると, $p_1 = 2^{1-1}(-1)!!/1! = 1, p_2 = 2^{2-1}(1)!!/2! = 1, p_3 = 2^{3-1}3!!/3! = 2, p_4 = 2^{4-1}5!!/4! = 5$ となり, 確かに前に求めた結果に一致する.

それでは $n=7$ の場合はどうであろうか? 具体的に上で求めた公式 (218) に $n=7$ を代入してみると

$$p_7 = \frac{2^{7-1}11!!}{7!} = \frac{2^6\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 12\cdot 11 = 132 \tag{219}$$

が得られる. 前に $n=3$ の 2 分木と $n=4$ の 2 分木を新しい根を介してつなげる操作で $p_3p_4 = 10$ 個の 2 分木ができることを見たが, 葉数が 7 である 2 分木の総数は 132 であることから, 確かにこの操作で作られる 2 分木は葉数 7 の 2 分木全体の「一部分」, つまり, 10/132 だけの割合となっている.

せっかくなので, ここで得られた結果 (218) を公式化しておこう.

> 葉数 n の 2 分木の総数は
> $$\frac{2^{n-1}(2n-3)!!}{n!}$$
> で与えられる. ただし, $(2n-3)!! = (2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1, (-1)!! = 1$ である.

既にみた **演習問題 3** では「歩道生成行列」を導入し, 任意のグラフの歩道の個数を隣接行列の冪乗の係数と歩道数を対応付けて計算したが, ここでも「2 分木生成多項式」を導入し, その冪展開係数に 2 分木の個数を対応付けさせて葉数が与えられた場合の 2 分木の総数を計算した. この手の方法は明らかにグラフを描いて数を数え上げるよりも効率が良い.

8 平面性

ここではグラフの平面性, つまり, 一般のグラフが平面内にどの辺も交差することなく描くことのできる条件について学ぶ. また, そのようにして描けるグラフ — 平面グラフ — の性質, 及び, 与えられたグラフの「平面への描きやすさ」を測る指標である「交差数」「厚さ」についても詳しく見て行くことにする.

8.1 平面グラフとオイラーの公式

平面グラフ (planar graph) : どの 2 つの辺も, それが接続する点以外では幾何学的に交差しないように描かれたグラフ (図 141 参照).

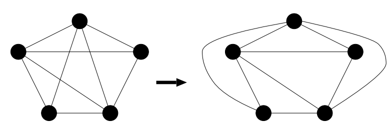

図 141: 平面グラフの例. 両者は位相同形であるが, 右のような描画において平面グラフとわかる.

面 (face) : 辺によって分割される領域
図 142 において, 非有界な面 f_4 は**無限面 (infinite face)** と呼ばれる.

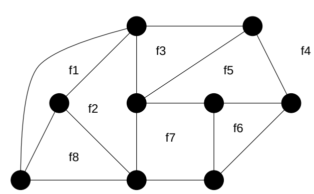

図 142: 8 つの領域に分割された平面グラフ. これら領域の中で, f_4 は無限面である.

与えられたグラフ G を点数 n, 辺数 m, 面数 f で特徴付けることにすると, これらの量の間にいかなる関係があるとき, グラフ G は平面へ埋め込み可能であり, 平面グラフとなりうるであろうか？ この答えはオイラーによって次の定理 (公式) としてまとめられている.

定理 13.1 (オイラーの公式)
グラフ G を連結な平面グラフとするとき, 次の公式が成り立つ.

$$n - m + f \quad = \quad 2 \tag{220}$$

(証明)
辺数 m に関する数学的帰納法で証明する.
$m = 0$ のとき, 点数が 1 つだけの素グラフであるから $n = 1$ であり, 面は無限面が 1 つ, つまり, $f = 1$ である. 従って

$$n - m + f \quad = \quad 1 - 0 + 1 = 2$$

となり, 関係式が成立する.

従って, 以下では $m \neq 0$ のときを考える. このとき帰納法の仮定として

「$m - 1$ 本以下の辺を持つ全てのグラフ G について (220) が成り立つ」

としてみよう. この仮定のもとで, 辺数 m のグラフに対しても関係式 (220) の成立が示せれば証明は終了である.

グラフ G が木の場合には, m 本の辺を持つとすると, 当然のことながら $m = n - 1$, $f = 1$(無限面) であるから, 関係式 (220) は

$$n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$$

となり, 辺数 m に対して成立する.

一方, グラフ G が木ではない場合. グラフ G の任意の辺を削除した場合, 辺数, 点数, 面数はそれぞれど

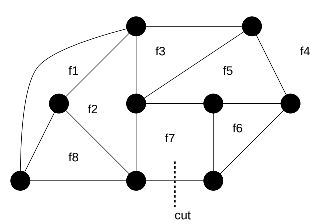

図 143: グラフの任意の辺を削除した場合の辺, 点, 面の数の変化量を考える. このグラフに関して言えば, **削除前**：$n = 9, m = 15, f = 8$ であり, $9 - 15 + 8 = 2$ としてオイラーの公式を満たし, **削除後**：$n = 9, m = 14, f = 7$ であり, $9 - 14 + 7 = 2$ としてオイラーの公式は満たされる.

のように変わるか, 調べると (例えば, 図 143 を参照)

$$\begin{cases} n & \Rightarrow & n \\ m & \Rightarrow & m - 1 \\ f & \Rightarrow & f - 1 \end{cases}$$

のように変化するから, $m-1$ 本の辺に対して (220) が成立, すなわち, 上の矢印の右側の量に対して (220) が成り立つわけであるから

$$n-(m-1)+f-1 \quad = \quad 2$$

が成立すべきであり, この式を変形すると

$$n-m+f \quad = \quad 2$$

となり, 変数 m のときの関係式が導かれ, この成立が言えたことになる. **(証明終わり)**.

まずはこの公式に慣れるため, 次に挙げる例題を考えてみよう.

例題 8.1
オイラーの公式を用いて, 次のグラフが平面的であるかどうか判別せよ.

(1) 完全グラフ K_4
(2) 完全グラフ K_5
(3) 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{3,3}$

(解答例)
このオイラーの公式をダイレクトに用いずに, 使いやすいように書き換えることから始めよう.

オイラーの公式の中には面数 f が入ってくるが, この f は考えるグラフ G に同形であるグラフの中で, どのグラフを採用するかによって曖昧性がある. つまり, 面の数は同形写像により変化する. 一方, 点, 辺の数は不変である. 従って, できることならば, この面数を他の量で置き換えて評価したい. この目的のために, まず, グラフ G に関していくつかの定義をしておく.

内周 κ : グラフ G の最短の閉路長.
$\mathrm{d}(F)$: グラフ G における面 F に含まれる点の次数和.

これらの定義のもとで, グラフ G の任意面 F に対して, 次の不等式が成り立つ.

$$\kappa \quad \leq \mathrm{d}(F) \tag{221}$$

例えば, 完全グラフ K_4 の描画としては図 144 に載せた 2 通りのどちらも正しいが (もちろん, 平面的なのは右側), 内周 κ はどちらも $\kappa = 3$ である. 従って, 直ちに

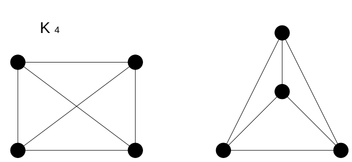

図 144: 完全グラフ K_4 の二つの描画法.

$$\kappa f \quad \leq \quad \sum_{F \in \boldsymbol{F}(\mathrm{G})} \mathrm{d}(F) = 2m \tag{222}$$

が成立する．ここで，$\boldsymbol{F}(\mathrm{G})$ はグラフ G に含まれる面の集合であり，上の関係式の最後の等式では前出の**握手補題**を用いた．この式とオイラーの公式から面数 f を消去すると

$$\kappa(2-n+m) \quad \leq \quad 2m \tag{223}$$

つまり，グラフ G が平面的となるためには，辺数 m が上から押さえられて (辺数が多くなると，辺と辺が交差する可能性も大きくなるので，平面グラフの辺数に上限があるのは自然である)

$$m \quad \leq \quad \frac{\kappa(n-2)}{\kappa-2} \tag{224}$$

なる不等式を満たさなければならない．以下ではこの不等式をもって，与えられたグラフに関する平面性の判別式としょう．

(1) 完全グラフ K_4：

このグラフにおいて，$n=4$, $m={}_4C_2=6$, $\kappa=3$ であるから，判別式 (223) は

$$6 \quad \leq \quad \frac{3\cdot(4-2)}{3-2}=6 \tag{225}$$

となり成立する．従って，**完全グラフ K_4 は平面的である**．

(2) 完全グラフ K_5：

このグラフにおいては，$n=5$, $m={}_5C_2=10$, $\kappa=3$ であるから，判別式 (223) は

$$10 \quad \leq \quad \frac{3\cdot(5-2)}{3-2}=9 \tag{226}$$

となり，不成立．従って，**完全グラフ K_5 は平面的ではない**．

(3) 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{3,3}$：

このグラフに関しては，$n=6$, $m=3^2=9$, $\kappa=4$ であるから，判別式 (223) は

$$9 \quad \leq \quad \frac{4\cdot(6-2)}{4-2}=8 \tag{227}$$

となり，不成立．従って，**完全二部グラフ $\mathrm{K}_{3,3}$ は平面的ではない**．

以上はグラフ G が連結グラフである場合の議論であった．しかし，グラフ G が非連結であり，k 個の成分を持つ場合，オイラーの公式がどのように修正されるのかを見ることは実用的にも意義深い．

系 13.3
平面グラフ G には，n 個の点，m 本の辺，f 個の面，k 個の成分があるとき

$$n-m+f \quad = \quad k+1 \tag{228}$$

である．

(証明)
グラフ G に k 個の成分がある場合には, 無限面を $k-1$ 回だけ余分に勘定するので, 面数は $f-(k-1)$ であり, これについてオイラーの公式を書き出してみると

$$n-m+\{f-(k-1)\} \quad = \quad 2 \tag{229}$$

となり, これを整理すると

$$n-m+f \quad = \quad k+1 \tag{230}$$

となり, 所望の関係式が得られる. **(証明終わり)**.

系 13.4

(1) 連結単純平面グラフ G が, $n(\geq 3)$ 個の点と m 本の辺を持つとき

$$m \quad \leq \quad 3n-6 \tag{231}$$

が成り立つ.

(2) さらに, G に三角形が無ければ

$$m \quad \leq \quad 2n-4 \tag{232}$$

が成立する.

(証明)

(1) グラフ G に含まれる最小な面は, 3 点からなる閉路, すなわち, 三角形であるから

$$3 \quad \leq \quad \mathrm{d}(F) \tag{233}$$

が成り立つ. 従って, 握手補題により直ちに

$$3f \quad \leq \quad \sum_{F\in \boldsymbol{F}(\mathrm{G})} \mathrm{d}(F) = 2m \tag{234}$$

となり, これとオイラーの公式 : $f=2-n+m$ より, 面数 f を消去すると所望の不等式 :

$$m \quad \leq \quad 3n-6 \tag{235}$$

が得られる.

(2) 明らかに三角形が無い場合には, G に含まれる最小の面は 4 点からなる閉路であり, 不等式

$$4 \quad \leq \quad \mathrm{d}(F) \tag{236}$$

が成り立つ. 従って, 握手補題から直ちに

$$4f \quad \leq \quad \sum_{F\in \boldsymbol{F}(\mathrm{G})} \mathrm{d}(F) = 2m \tag{237}$$

が得られ, これとオイラーの公式から面数 f を消去することにより, 所望の不等式

$$m \quad \leq \quad 2n-4 \tag{238}$$

が得られる.

(証明終わり).

系 13.6
全ての単純平面グラフには次数 5 以下の点がある.

(証明)
グラフ G の任意の頂点 v に対して

$$\delta \quad \leq \quad \deg(v) \tag{239}$$

とすると, 握手補題と**系 13.4**(1) より

$$\delta n \quad \leq \quad \sum_{v \in V(\mathrm{G})} \deg(v) = 2m \leq 2(3n-6) = 6n-12 \tag{240}$$

すなわち

$$\delta \quad \leq \quad 6 - \frac{12}{n} \tag{241}$$

が成り立ち, 従って, 次数 δ に対して

$$\delta \quad \leq \quad 5 \tag{242}$$

が成立する. **(証明終わり)**[1] .

8.2 交差数と厚さ

グラフを 2 次元平面内に埋め込む場合, そのグラフがオイラーの公式より埋め込み不可能であるとわかったとしても, どの程度, 埋め込むことが困難であるのか, を定量的に測る指標が必要となる. そこで, ここでは**交差数**と**厚さ**という 2 つの指標について説明する.

交差数 (crossing number) cr(G) : グラフ G を平面描写した際に生じる, 辺の最小交差の数.
厚さ (thickness) t(G) : いくつかの平面グラフを重ね合わせてグラフ G を作るときに必要な平面グラフの数.

例題 8.2 (2003 年度 情報工学演習 II(B) #2)

r と s が偶数のとき

$$\mathrm{cr}(\mathrm{K}_{r,s}) \quad \leq \quad \frac{1}{16} rs(r-2)(s-2)$$

を示せ.

(解答例)
図 145(左) のように黒, 白丸を配置し, 黒丸と白丸を結んでできる線分の交差点を勘定すればよい. このような配置の仕方による交差数は明らかに図 142(右) のような場合よりも少ない.

[1] この系での結論は後に学ぶ「グラフの彩色」の節の**定理 17.2** の証明で用いることになります.

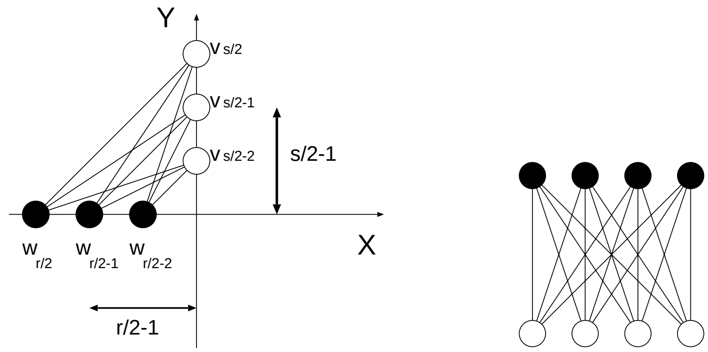

図 145: 線分の交点の個数を数える (左). 右図は $r = s = 4$ の場合の配置の一例.

さて, 対称性より, 図 145(左) の第 3 象限だけを考えればよい. Y 軸上の点を原点から近い順に $v_1, v_2, \cdots, v_{s/2}$ とし, X 軸上の点を原点から近い順に $w_1, w_2, \cdots, w_{r/2}$ と名前を付けることにする. すると, $v_{s/2}$ と $w_1, w_2, \cdots, w_{r/2}$ を結ぶ線分と, $v_{s/2-1}$ と $w_1, w_2, \cdots, w_{r/2}$ を結ぶ線分の交点の数 q_1 は

$$q_1 = \left(\frac{r}{2}-1\right)+\left(\frac{r}{2}-2\right)+\cdots+\left(\frac{r}{2}-\left(\frac{r}{2}-2\right)\right)+1 \tag{243}$$

である. 同様にして $v_{s/2}$ と $w_1, w_2, \cdots, w_{r/2}$ を結ぶ線分及び $v_{s/2-1}$ と $w_1, w_2, \cdots, w_{r/2}$ を結ぶ線分と $v_{s/2-2}$ と $w_1, w_2, \cdots, w_{r/2}$ とを結ぶ線分の交点の数 q_2 は

$$q_2 = 2\left(\frac{r}{2}-1\right)+2\left(\frac{r}{2}-2\right)+\cdots+2\left(\frac{r}{2}-\left(\frac{r}{2}-2\right)\right)+2 \tag{244}$$

となる. 同様の定義で q_3 は

$$q_3 = 3\left(\frac{r}{2}-1\right)+3\left(\frac{r}{2}-2\right)+\cdots+3\left(\frac{r}{2}-\left(\frac{r}{2}-2\right)\right)+3 \tag{245}$$

となり, v_1 と全ての線分の交点の個数 $q_{s/2-1}$ は

$$q_{s/2-1} = \left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-1\right)+\left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-2\right)+\cdots+\left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-\left(\frac{r}{2}-2\right)\right)+\left(\frac{s}{2}-1\right) \tag{246}$$

である.

従って, 第 3 象限内に現れる交点の個数 Q は

$$\begin{aligned}
Q &= q_1+q_2+\cdots+q_{s/2-1} \\
&= \left(\frac{r}{2}-1\right)+\left(\frac{r}{2}-2\right)+\cdots+\left(\frac{r}{2}-\left(\frac{r}{2}-2\right)\right)+1 \\
&+ 2\left(\frac{r}{2}-1\right)+2\left(\frac{r}{2}-2\right)+\cdots+2\left(\frac{r}{2}-\left(\frac{r}{2}-2\right)\right)+2 \\
&+ 3\left(\frac{r}{2}-1\right)+3\left(\frac{r}{2}-2\right)+\cdots+3\left(\frac{r}{2}-\left(\frac{r}{2}-2\right)\right)+3 \\
&+ \cdots \\
&+ \cdots \\
&+ \left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-1\right)+\left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-2\right)+\cdots+\left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-\left(\frac{r}{2}-2\right)\right)+\left(\frac{s}{2}-1\right) \\
&\equiv p_1+p_2+\cdots+p_{s/2-1}
\end{aligned} \tag{247}$$

となる.

ここで

$$
\begin{aligned}
p_1 &\equiv \left(\frac{r}{2}-1\right)+2\left(\frac{r}{2}-1\right)+\cdots+\left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-1\right) \\
&= \left(\frac{r}{2}-1\right)\sum_{k=1}^{s/2-1} k = \left(\frac{r}{2}-1\right)\frac{1}{2}\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}-1\right) = \frac{s}{4}\left(\frac{r}{2}-1\right)\left(\frac{s}{2}-1\right) \qquad (248)
\end{aligned}
$$

$$
p_2 \equiv \left(\frac{r}{2}-2\right)+2\left(\frac{r}{2}-2\right)+\cdots+\left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-2\right) = \left(\frac{r}{2}-2\right)\sum_{k=1}^{s/2-1} k = \frac{s}{4}\left(\frac{r}{2}-2\right)\left(\frac{s}{2}-1\right) \qquad (249)
$$

そして

$$
p_{s/2-1} = \sum_{k=1}^{s/2-1} k = \frac{s}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right) \qquad (250)
$$

である. 従って Q は

$$
\begin{aligned}
Q &= p_1+p_2+\cdots+p_{s/2-1} \\
&= \frac{s}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-1\right)+\frac{s}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-2\right)+\cdots+\frac{s}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right)\left\{\frac{r}{2}-\left(\frac{r}{2}-2\right)\right\}+\frac{s}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right) \\
&= \frac{s}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right)\sum_{k=1}^{r/2-1}\left(\frac{r}{2}-k\right) \\
&= \frac{s}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right)\frac{r}{2}\sum_{k=1}^{r/2-1} - \frac{s}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right)\sum_{k=1}^{r/2-1} k \\
&= \frac{s}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right)\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}-1\right)-\frac{s}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right)\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}-1\right)\frac{1}{2} \\
&= \frac{sr}{8}\left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-1\right)\left\{1-\frac{1}{2}\right\} = \frac{sr}{16}\left(\frac{s}{2}-1\right)\left(\frac{r}{2}-1\right) = \frac{sr}{16\cdot 4}(s-2)(r-2) \qquad (251)
\end{aligned}
$$

よって, 結局, 第 1〜第 4 象限に現れる交点の総数 Q_{total} は

$$
Q_{\text{total}} = 4\times Q = \frac{sr}{16}(s-2)(r-2) \qquad (252)
$$

となる. これから交差数 $\mathrm{K}_{r,s}$ の上限が

$$
\mathrm{cr}(\mathrm{K}_{r,s}) \leq \frac{1}{16}rs(r-2)(s-2) \qquad (253)
$$

で与えられる. つまり, $\mathrm{K}_{r,s}$ を平面に描いたときの交差数の最小値は $rs(r-2)(s-2)/16$ を超えることはない.

例題 8.3

単純グラフ G に $n(\geq 3)$ 個の点, 及び, m 本の辺があるとき, G の厚さ $t(\mathrm{G})$ は不等式 :

$$
t(\mathrm{G}) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil \qquad (254)
$$

$$
t(\mathrm{G}) \geq \left\lfloor \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rfloor \qquad (255)
$$

を満たすことを示せ[a] .

[a] $\lceil x \rceil$ は x 以上の最小の整数. $\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数を表す.

(解答例)

厚さは整数でなければならないことと, **系 13.4** (1) より

$$t(\mathrm{G}) \quad \geq \quad \left\lceil \frac{\text{辺の総数}}{\text{平面グラフとなるための辺の上限}} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil \tag{256}$$

が成り立つ.

一方, この結果と正の整数 a, b に対して成り立つ関係式：

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil \quad = \quad \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor \tag{257}$$

を用いることにより, $a=m$, $b=3n-6$ として直ちに (255) の成立が言える.

※ **注：** $\lceil a/b \rceil = \lfloor (a+b-1)/b \rfloor$ の証明に関して

正の定数 a, b に関する等式：

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil \quad = \quad \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor \tag{258}$$

の証明.

(a/b) が整数の場合とそうでない場合に分けて証明する.

(i) (a/b) が整数のとき

$a/b=M$ であるとき

$$(\text{与式の左辺}) = \frac{a}{b} \quad = \quad M \tag{259}$$

である. また,

$$(\text{与式の右辺}) = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} + 1 - \frac{1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor M - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = M \tag{260}$$

であるから, (i) のとき関係式は成立.

(ii) (a/b) が整数でないとき

a/b の整数部分を C, 少数部分を D とすれば

$$(\text{与式の左辺}) = \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = C+1 \tag{261}$$

である. また

$$(\text{与式の右辺}) = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} + 1 - \frac{1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor C + D - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 \tag{262}$$

であるが, D は a/b の少数部分であるから

$$D \quad = \quad \frac{a-bC}{b} \tag{263}$$

であり, a, b, C は整数なので, $a - bC$ も整数であり, $a > bC$ より

$$a - bC \quad \leq \quad 1 \tag{264}$$

である. 従って

$$D \quad > \quad \frac{1}{b} \tag{265}$$

なので, $D - (1/b) = \varepsilon$ $(0 \leq \varepsilon < 1)$ とおくと

$$(\text{与式の右辺}) = \lfloor C + \varepsilon \rfloor + 1 = C + 1 \tag{266}$$

となり, (ii) の場合も関係式が成り立つ. 従って

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil \quad = \quad \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor \tag{267}$$

が示せた. **(証明終わり)**

例題 8.4 (2003 年度 レポート課題 #6 **問題 1**)

(1) 完全グラフ K_n の厚さ $t(\mathrm{K}_n)$ は次不等式を満たすことを示せ.

$$t(\mathrm{K}_n) \quad \geq \quad \left\lfloor \frac{1}{6}(n+7) \right\rfloor \tag{268}$$

(2) 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{r,s}$ の厚さ $t(\mathrm{K}_{r,s})$ が次不等式を満たすことを示せ.

$$t(\mathrm{K}_{r,s}) \quad \geq \quad \left\lceil \frac{rs}{2(r+s)-4} \right\rceil \tag{269}$$

(解答例)

(1) 完全グラフ K_n の辺の数は $n(n-1)/2$ であるから, 不等式 :

$$t(\mathrm{G}) \quad \geq \quad \left\lfloor \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rfloor \tag{270}$$

に代入して

$$t(\mathrm{K}_n) \quad \geq \quad \left\lfloor \frac{\frac{n(n-1)}{2}+3n-7}{3n-6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2+5n-14}{2(3n-6)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor \tag{271}$$

となり, 題意の不等式は満たされることがわかる.

(2) $\mathrm{K}_{r,s}$ においては, A グループの点が r 個, B グループの点が s 個で, A グループのそれぞれの点が B グループのそれぞれの点と結ばれるので, 辺の数 m 及び点の数 n は

$$m \quad = \quad rs \tag{272}$$

$$n \quad = \quad r+s \tag{273}$$

で与えられる. また, $\mathrm{K}_{r,s}$ には三角形が含まれないので, $\mathrm{K}_{r,s}$ の辺の数の上限は

$$m \quad \leq \quad 2n-4 \equiv m_0 \tag{274}$$

で与えられる．従って, 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{r,s}$ の厚さ $t(\mathrm{K}_{r,s})$ は

$$t(\mathrm{K}_{r,s}) \quad \geq \quad \left\lceil \frac{m}{m_0} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{2n-4} \right\rceil = \left\lceil \frac{rs}{2(r+s)-4} \right\rceil \tag{275}$$

となり, 確かに題意の不等式を満たしている．

例題 8.5 (2004 年度 $\boxed{\textbf{演習問題 8}}$)

1. 閉路行列式法を用いて完全グラフ K_4 の全域木の総数 $\tau(\mathrm{K}_4)$ を求めよ．
2. オイラーの公式を用いてピーターソン・グラフは平面描写可能かどうかを判定せよ．

3. 講義中に見た**系 13.4** を参考にして以下の問いに答えよ．
   (1) 連結グラフ G に三角形, 四角形, 及び, 五角形が無い場合, グラフ G が平面的となるために辺数 m が満たすべき不等式を求めよ．
   (2) (1) の議論を一般化し, グラフ G に K 角形まで無い場合, グラフ G が平面的となるために辺数 m が満たすべき不等式を求めよ．
   (3) (2) の結果で $K \to \infty$ の極限をとった場合に辺数 m の満たすべき不等式を求め, この結果が何を意味するのかを簡単に説明せよ．

(解答例)

1. 図 146(左) のように 3 つの閉路を $\mathsf{c}_1 = 1231, \mathsf{c}_2 = 1241, \mathsf{c}_3 = 1341$ と定める．すると, 閉路行列 $\boldsymbol{R}$ は

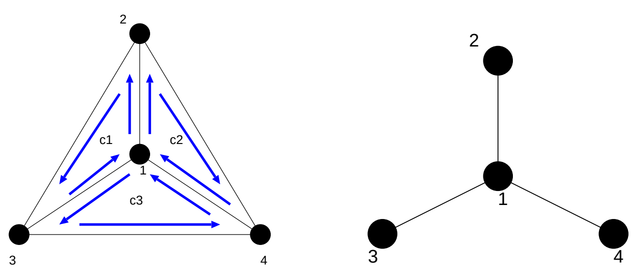

図 146: 完全グラフ K_4 とその基本閉路 $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2, \mathsf{c}_3$(左)．右図は完全グラフ K_4 の全域木．

$$\boldsymbol{R} \quad = \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{276}$$

として与えられる．

ところで, 図のように閉路を選んだとき, 一番外側の 234 なる三角形を 4 番目の閉路として選んではいけないのか, あるいは, 閉路の選び方に任意性がある場合にはどうするのか, が問題になるのだが, その際は**基本閉路**を選ぶことにする．基本閉路とは例えば図 146(右) のような完全グラフ K_4 の全域木に対し, これに 1 つずつ辺を付加してできる閉路のことである．図 146(右) の全域木に辺 23 を付加すると閉路が一つでき, それが c_1 である．また, 辺 24 を付加すれば閉路 c_2 が, 辺 34 を付加すれば閉路 c_3 ができることになり, これらは全て基本閉路である．閉路行列法を用いるときには基本閉路を選べば十分

である. その際, 上述のように一番外側の三角形を 4 番目の閉路としてカウントしてもよいが, 結果として得られる全域木の総数は同じになる (各自が実際に余因子展開を用いて確かめてみること).
さて, このようにして定義される基本閉路に対し, 閉路行列 (276) を作れば, 完全グラフ K_4 の全域木の総数 $\tau(\mathsf{K}_4)$ は

$$\tau(\mathsf{K}_4) = |\boldsymbol{R}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 16 \tag{277}$$

となり, 計 16 個の全域木が存在することがわかる.

2. ピーターソン・グラフの場合には, 点数 n, 辺数 m, 及び内周の長さ κ はそれぞれ $n = 10, m = 15, \kappa = 5$ であるから, これらを判別式 :

$$m \leq \frac{\kappa(n-2)}{\kappa-2} \tag{278}$$

に代入し,

$$15 \leq \frac{5\cdot(10-2)}{5-2} = \frac{40}{3} = 13.3.... \tag{279}$$

となるので不成立. 従って, **ピーターソン・グラフは平面的ではない**と結論つけられる.

3.

(1) 三角形, 四角形, 及び五角形が無いならば $\mathrm{d}(F)$ は

$$6 \leq \mathrm{d}(F) \tag{280}$$

を満たす. 従って, この不等式は握手補題により

$$6f \leq \sum_{F\in\boldsymbol{F}(\mathrm{G})} \mathrm{d}(F) = 2m \tag{281}$$

と書き直すことができるから, これとオイラーの公式 : $f = 2 - n + m$ より, 面数 f を消去し, 辺数 m についての不等式 :

$$m \leq \frac{3}{2}(n-2) \tag{282}$$

が成り立つ.

(2) 一般に K 角形まで無い場合, $\mathrm{d}(F)$ は

$$K+1 \leq \mathrm{d}(F) \tag{283}$$

を満たす. 従って, 握手補題から

$$(K+1)f \leq \sum_{F\in\boldsymbol{F}(\mathrm{G})} \mathrm{d}(F) = 2m \tag{284}$$

と書き直せるので, これとオイラーの公式 $f = 2 - n + m$ から f を消去し, m に関する不等式 :

$$m \leq \left(\frac{K+1}{K-1}\right)(n-2) \tag{285}$$

が成り立つ.

(3) (2) の結果で, $K \to \infty$ の極限をとる. しかし, **必ず** $K \le n$ **であるから, この場合には** $K = n$ **という条件下で** $n, K \to \infty$ **の極限を考えなければならない**点に注意する. すると次の不等式が得られる.

$$m \le \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(n-2) = n-2+2\left\{1+\frac{1}{n-1}\right\} = n \;\; (n \to \infty) \tag{286}$$

つまり, $K(\infty)$ 角形まで無いということは, グラフ G は n 角形 (ただし n も無限大なので, いわば「無限角形」)1 個からなるグラフである.

ちなみに, n が有限のまま (285) の右辺で $K \to \infty$ の極限をとってしまうと $m \le n-2$ なる不等式が得られるが, 閉路が全く無い「木」の場合の辺数が $n-1$ であることを考えると (ある意味で「無限角形」まで無い状況だと言える), $n-1 \le n-2$ となり (もちろん矛盾), この場合, 「一つだけ成分を持つ n 点からなるグラフ」としては描きようがなくなってしまう. 従って, 極限をとる際には $K = n$ の条件の下で n を無限大に飛ばす必要があるわけである.

※ **注:** $K = n$ とおいて $n \to \infty$ の極限をとらずに, n が有限のまま $K \to \infty$ を考えてもうまくいかない. もちろん, これは必ず満たさしていなければならない条件 $K \le n$ を満たしていないのですが, この場合に得られる $m \le n-2$ とオイラーの公式を組んで面数 f に関する不等式を作れば $f \le 0$ が得られる. 面数の最小値はグラフが木である場合の $f = 1$ なので, これは不適切である. 正しい不等式 $m \le n$ とオイラーの公式を組んで f に関する不等式を作れば $f \le 2$ が得られる. これは $f = 2$ ($K(\infty)$ 角形の内部の面と外部の無限面), $f = 1$ (木) の場合にそれぞれが対応していることになる (図 147 参照).

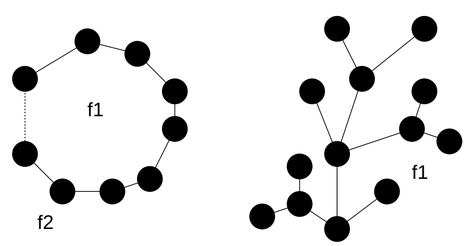

図 147: $f \le 2$ が意味する内容は, $K(\infty)$ 角形の内部 (f1) と外部 (f2) の計 $f = 2$ 面 (左図), 木の無限面 (f1) の計 $f = 1$ 面 (右図).

例題 8.6　(2005 年度 $\boxed{\textbf{演習問題 8}}$)

「平面グラフ (地図) においては隣り合う 5 つ以下の隣接面 (隣接国) しかもたない面 (国) が存在する (*)」という命題を証明することを考えよう.

(1) 考えるグラフの点数を n, 辺数を m とすると

$$n \leq \frac{2}{3}m$$

が成り立つことを示せ.

(2) (*) の逆：「どの面 (国) も少なくとも 6 つの隣接面 (国) に囲まれている (**)」という仮定の下では, 考えるグラフの面数を f とすると

$$f \leq \frac{1}{3}m$$

でなければならないことを示せ.

(3) (1)(2) とオイラーの公式より, 仮定 (**) の矛盾を引き出し, 命題 (*) の成立を示せ.

(解答例)

(1) 図 148 のように, 地図では任意の点 v に接続する辺は 3 つ以上である. 従って, グラフ G には点が n 個

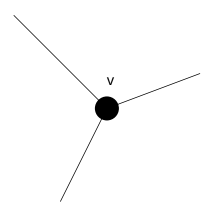

図 148: 地図では任意の点に接続する辺は 3 以上である.

あるので, 辺数は $m \geq 3n$ となりそうであるが, しかし, 辺の両端には必ず点が 2 つあるので, これでは数えすぎであり, 正しくは $m \geq 3n/2$, つまり

$$n \leq \frac{2m}{3} \tag{287}$$

が成り立つ.

(2) 仮定より, 一つの面 F は少なくとも 6 本の境界線で囲まれているので (図 149 参照), グラフ G の中に面が f 面あれば, $m \geq 6f$. しかし, これは数えすぎであり, 任意の境界線の両側には必ず 2 つの面があるので, $m \geq 6f/2 = 3f$, すなわち

$$f \leq \frac{m}{3} \tag{288}$$

が成り立つ.

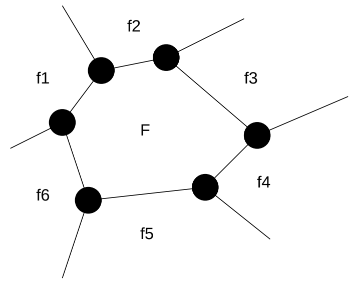

図 149: 一つの面 F は少なくとも 6 本の境界線で囲まれている.

(3) (1)(2) の結果とオイラーの公式から

$$2 \;=\; n - m + f \le \frac{2m}{3} - m + \frac{m}{3} = 0 \tag{289}$$

従って, $2 \le 0$ となってしまうので, 明らかに矛盾. よって, 仮定は間違っており, 「平面グラフにおいては隣り合う 5 つ以下の隣接面しか持たない面が存在する」ことが示された.

例題 8.7 (2006 年度 $\boxed{\textbf{演習問題 8}}$)

全ての点の次数が 4 である単純平面グラフ G には必ず三角形が 8 個以上含まれることを示せ.

(解答例)

まず, 全ての点の次数が 4 であるから

$$4n \;=\; \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \tag{290}$$

が成り立つべきである. ここで最後の等式は握手補題を用いたことに注意しよう. この式 (290) と考えるグラフが平面グラフであることからオイラーの公式 : $n = 2 + m - f$ を用いて点数 n を消去すると

$$2m + 8 \;=\; 4f \tag{291}$$

が得られる.

ところで, 題意では「三角形の個数」に関する条件を問題にしているわけであるから, 一般に k 角形の個数を φ_k とし, この φ_k を用いて等式 (291) はどのように書き直すことができるかに着目する. このとき, (291) 式を書き直すためには m, f を φ_k を用いて書き直す必要があるが, これらの間には

$$f \;=\; \sum_{k=3} \varphi_k \tag{292}$$

$$2m \;=\; \sum_{k=3} k\varphi_k \tag{293}$$

なる関係がある ((293) 左辺が $2m$ となる理由は, 各辺の両側には必ず面が 2 つあるためである. m ではなく, $2m$ となることに注意 !). そこで, これら (292)(293) 式を (291) 式に代入して, はじめの数項を実際に書き出してみれば

$$3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + 6\varphi_6 + 7\varphi_7 + \cdots + 8 \;=\; 4\varphi_3 + 4\varphi_4 + 4\varphi_5 + 4\varphi_6 + 4\varphi_6 + 4\varphi_7 + \cdots \tag{294}$$

が成り立ち,

$$\varphi_3 - (\varphi_5 + 2\varphi_6 + 3\varphi_7 + \cdots) \quad = \quad 8 \tag{295}$$

つまり

$$\varphi_3 - (\varphi_5 + 2\varphi_6 + 3\varphi_7 + \cdots) - 8 \quad = \quad 0 \leq \varphi_3 - 8 \tag{296}$$

であるから三角形の個数 φ_3 は $\varphi_3 \geq 8$ を満たすことになり,「全ての点の次数が 4 である平面グラフには三角形が 8 個以上存在する」という題意が証明された.

例題 8.8　(2004 年度情報工学演習 II(B) #1)

グラフ G (点の数 : $n \geq 4$) を三角形のみを含む平面グラフであるとする. G に含まれる次数 k の点の個数を n_k とするとき

(1) G の辺数 m が

$$m = 3n - 6$$

で与えられることを示せ.

(2) 次の関係式 :

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \cdots = 12$$

が成り立つことを示せ.

(3) G は次数 5 以下の点を 4 つ以上含むことを示せ.

今度はグラフ G は全ての点の次数が 3 である平面グラフであり, φ_k 個の k 角形を含むとしよう. このとき

(4) G の辺数 m, 面数 f の間には

$$m + 6 = 3f$$

なる関係が成立することを示せ.

(5) 次の関係式 :

$$3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - \cdots = 12$$

が成り立つことを示せ.

(6) G には 5 角形以下の面が 4 つ以上含まれることを示せ.

(解答例)

(1) 全ての辺は 3 本の辺で囲まれており, 全ての辺は 2 つの面の境界となっているので, 面数 f, 辺数 m の間には

$$3f \quad = \quad 2m \tag{297}$$

が成り立つ．これとオイラーの公式：$n-m+f=2$ から面数 f を消去すれば

$$m = 3n-6 \tag{298}$$

が得られる．

(2) (298) を 2 倍したものに

$$n = \sum_{k=3} n_k \tag{299}$$

$$2m = \sum_{k=3} kn_k \tag{300}$$

を代入すれば

$$\sum_{k=3} kn_k = 6\sum_{k=3} n_k - 12 \tag{301}$$

が得られるが, 和の中のはじめの数項を書き出してみると

$$3n_3+4n_4+5n_5+6n_6+7n_7+8n_8+\cdots = 6(n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+n_8+\cdots)-12 \tag{302}$$

すなわち

$$3n_3+2n_4+n_5-n_7-2n_8-\cdots = 12 \tag{303}$$

が成り立つ．

(3) (2) で得られた関係式から

$$3n_3+2n_4+n_5-n_7-2n_8-\cdots-12=0 \leq 3n_3+2n_4+n_5-12 \tag{304}$$

であるから

$$3n_3+2n_4+n_5 \geq 12 \tag{305}$$

である．また, 明らかに $(3n_3+3n_4+3n_5) \geq 3n_3+2n_4+n_5$ であるから, これらの不等式から直ちに

$$n_3+n_4+n_5 \geq \frac{1}{3}(3n_3+2n_4+n_5) \geq \frac{1}{3}\times 12 = 4 \tag{306}$$

従って, **グラフ G には次数が 5 以下の点が 4 つ以上含まれる**ことが示せた．

(4) 握手補題から $3n=2m$ が成り立つが, これとオイラーの公式から n を消去して

$$6+m = 3f \tag{307}$$

が成り立つ．

(5) (307) 式を 2 倍したものに

$$f = \sum_{k=3} \varphi_k \tag{308}$$

$$2m = \sum_{k=3} k\varphi_k \tag{309}$$

を代入し, 和の中のはじめの数項を書き出してみると

$$3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - \cdots \quad = \quad 12 \tag{310}$$

が成り立つことがわかる.

(6) (3) と同様にして

$$\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 \quad \geq \quad \frac{1}{3}(3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5) \geq \frac{1}{3} \times 12 = 4 \tag{311}$$

すなわち, **グラフ G には 5 角形以下の面が 4 つ以上含まれる**ことがわかる.

演習問題 8

次数 k の点の個数を n_k とする. 次数 1, または 2 の点を含まない平面グラフに対し

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \cdots$$

が成り立つことを示せ.