グラフ理論 講義ノート #10

井上 純一
北海道大学 大学院情報科学研究科
URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成 19 年 6 月 25 日

目 次

演習問題 9 の解答例

G が点数 1 の孤立点の場合, $\chi(G)=1, \Delta(G)=0$ であるから, 問題の不等式は等号で成立する. 点数 $n-1$ のときに問題の不等式の成立を仮定すると, 点数 n のグラフ G の任意の点を v とし, この点を G から削除したグラフ $G-v$ に存在する点数は $n-1$ となるから

$$\chi(G-v) \quad \leq \quad 1+\Delta(G-n) \tag{343}$$

が成り立つ. つまり, $G-v$ の $1+\Delta(G-n)$-彩色が存在する. そのような $G-v$ の $1+\Delta(G-n)$-彩色を一つ与えたとき, G の中の点 v への接続辺は高々$\Delta(G)$ 個であるから, $G-v$ の彩色には $\Delta(G)$ 以上の色を必要としない. 従って, もし, $\Delta(G-v)=\Delta(G)$ であるならば (v が G の最大次数の点ではない場合), $G-v$ の彩色で使われている色を用いて v を彩色することができる ($\chi(G)=\chi(G-v) \leq 1+\Delta(G-v)=1+\Delta(G)$). また, $\Delta(G-v)<\Delta(G)$ であるならば (v が G の最大次数の点の場合), $G-v$ の彩色で用いられた色でない 1 色を用いて v を彩色すればよい以上をまとめると, 点数 n のグラフ G に対して

$$\chi(G) \quad \leq \quad 1+\Delta(G) \tag{344}$$

が成立する.

9.2 地図の彩色

この節では, ヨーロッパのように, 多くの国が屹立しているような地域の地図において, 隣り合う国を異なる色で区別するためには何色が必要か ? という素朴な質問から端を発した「地図の彩色」について, それにまつわる定理及び適用例を見てゆくことにする.

k-面彩色可能 : 地図の隣接する 2 つの面が同じ色にならないように k 色で彩色できる場合. 図 171 に 3-彩色可能なグラフの一例を載せる.

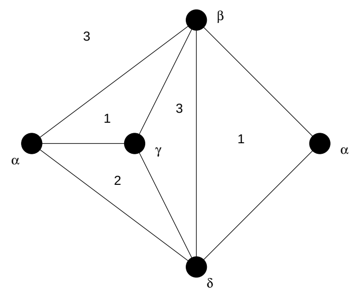

図 171: 3-面彩色可能なグラフの一例. 面に付された数字が色を表す.

定理 19.1
地図 G が 2 面彩色可能であるための必要十分条件は, G がオイラー・グラフであることである.

(証明)
必要性 :
G の各点 v を含む面は偶数でなければならないので,v の次数は偶数である. 従って, **定理 6.2**「連結グラフがオイラー・グラフであるための必要十分条件は, G の点の次数が全て偶数である」ことから, G はオイラー・グラフである.

十分性 :
任意の面 F を選び, それを赤で彩色する. F の中の任意の点 x から, 他の面 F' へ行く曲線を考える (図 172 参照).

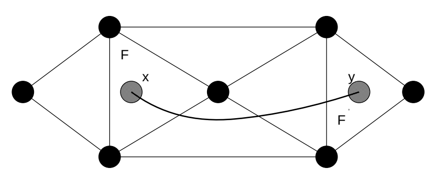

図 172: 2-色面彩色可能なグラフ G においては, x → y → x という任意の閉路は偶数回 G の辺と交差する.

$$\mathrm{F}' \quad \to \quad \text{赤 (曲線が偶数本の辺を交わる場合)}$$
$$\mathrm{F}' \quad \to \quad \text{青 (曲線が奇数本の辺を交わる場合)}$$

で色分けすると, x → y → x という任意の閉路は遇数回だけ辺を交差する (G の各点に接続する辺は偶数) のでこの彩色で矛盾はない. **(証明終わり)**.

定理 19.2
G はループの無い平面グラフとし, G^* は G の幾何学的双対であるとする. このとき, G が k-点彩色可能であるための必要十分条件は, G^* が k-面彩色可能であることである.

例として図 173 を見よ.

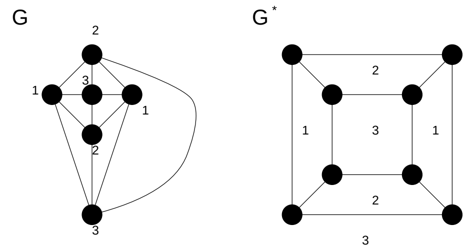

図 173: 3-点彩色可能なグラフ G (左) と, その幾何学的双対グラフ G*. グラフ G* は 3-面彩色可能である.

定理 19.4
G は各点が 3 次の地図であるとする. このとき, G が 3-面彩色可能であるための必要十分条件は, 各面が偶数本の辺で囲まれていることである.

(証明)

必要性：

図 174 のように, G の任意の面 F に対し, F を取り囲む G の面は 2 色によって彩色可能である. 従って, そのような面は偶数個なければならないので, 全ての面は偶数本の辺で囲まれている.

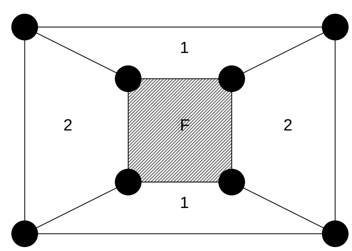

図 174: 面 F を取り囲むグラフ G の面は 2 色で彩色可能である.

十分性：

「G が単純連結グラフであり, G の各面が三角形であり, G の各点の次数が偶数 (オイラー・グラフ) ならば, G は 3-点彩色可能である」という双対な結果を示せばよい.
グラフ G はオイラー・グラフであるから, **定理 19.1** より, 図のように, G の面は 2 色, 赤と青によって彩色できる.

赤い面の 3 点を α, β, γ が時計回りにくるように彩色する.
青い面の 3 点を α, β, γ が反時計回りにくるように彩色する.

とすると, このような彩色はグラフ全体に拡張できる. **(証明終わり)**.

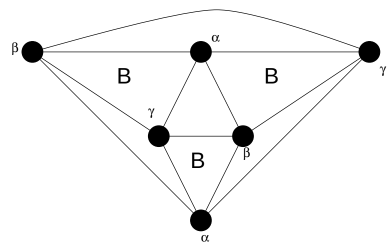

図 175: オイラー・グラフ G の面は赤と青 (B) で 2-面彩色可能である.

9.3 辺彩色

点彩色, 地図の彩色 (面彩色) とくれば, 次は辺彩色である.

k-辺彩色可能: グラフ G の隣接する辺は同じ色にならないように, G の辺を k 色で彩色できるとき.
彩色指数: G が k-辺彩色可能, $k-1$-辺彩色不可能なとき, 彩色指数 $\chi^{'}(\mathrm{G})$ を

$$\chi^{'}(\mathrm{G}) \quad = \quad k$$

で定義する. 図 176 に 4 辺彩色可能なグラフの一例を載せる.

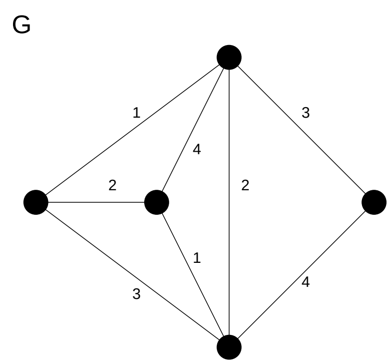

図 176: 4-辺彩色可能なグラフの一例. このグラフ G の彩色指数は $\chi^{'}(\mathrm{G}) = 4$ である.

定理 20.1
G は単純グラフであり, その最大次数が Δ ならば, $\Delta \leq \chi^{'}(\mathrm{G}) \leq \Delta + 1$ である.

ここでは具体的な証明を追うことはせず, いくつかの代表的なグラフに対して, 上記定理を確認することにとどめておく.

(例):

$$\chi^{'}(\mathrm{C}_n) \quad = \quad \begin{cases} 2 & (n : \text{偶数}) \\ 3 & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

$$\chi^{'}(\mathrm{W}_n) \quad = \quad n-1 \;\; (n \geq 4)$$

定理 20.2
$n(\neq 1)$ が奇数ならば, $\chi^{'}(\mathrm{K}_n) = n$ であり, 偶数ならば, $\chi^{'}(\mathrm{K}_n) = n-1$ である.

(証明)
$n \geq 3$ とし, 以下では n が偶数の場合と奇数の場合に分けて考えることにする.

n が奇数のとき：
完全グラフ K_n の点を正 n 角形の形状に配置し, その外周の辺を各辺に異なる色を用いて彩色し, 次に残りの辺それぞれをそれと平行な外周の辺に用いられた色で彩色する (図 177 参照).

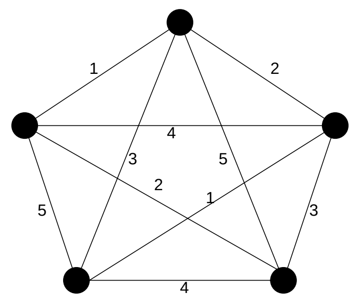

図 177: 完全グラフ K_5 の辺彩色. 外側の 5 つの辺にそれぞれ色を割り振ると, 各外辺に向かい合う辺に同色の色を割り当てれば, 5-辺彩色が完成する.

このとき, 同じ色で彩色できる辺の最大数は $(n-1)/2$ である. 従って, 彩色指数が $n-1$ とすると完全グラフ K_n の辺数は高々

$$\frac{1}{2}(n-1)\chi^{'}(\mathrm{K}_n) \quad = \quad \frac{1}{2}(n-1)^2 \neq {}_nC_2$$

となり, K_n の辺数 ${}_nC_2 = n(n-1)/2$ に反する. 従って, $\chi^{'}(\mathrm{K}_n) = n$ であり, このとき, 辺数は高々

$$\frac{1}{2}(n-1)\chi^{'}(\mathrm{K}_n) \quad = \quad \frac{1}{2}n(n-1) = {}_nC_2$$

となり, つじつまが合う. 従って, n が奇数のときは $\chi^{'}(\mathrm{K}_n) = n$ である.

n が偶数のとき：
K_n は完全グラフ K_{n-1} と 1 つの点の和とみなせる. K_{n-1} の辺は n が奇数の場合に述べた方法により, $n-1$ 色で彩色することができる. 従って, この方法で $(n-1)$-彩色すると, 完全グラフ K_{n-1} の各辺の次数は $n-2$ であるから, 各点には全 n 色のうち, 欠けている色が必ず 1 つ生じ, これらの欠色は全て異なる. よって, これらの欠色で残りの辺を彩色すれば, K_n の辺彩色が完成する (図 171 参照). 従って, n が奇数のとき, $\chi^{'}(\mathrm{K}_n) = n-1$ である. **(証明終わり)**.

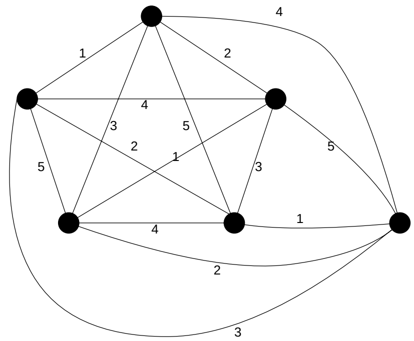

図 178: 完全グラフ K_5 の外部に点 v を配置し，この点と K_5 の各点での欠色で点 v を結べば，n が偶数 (この例では $n = 6$) の場合の n-辺彩色が完成する．

例題 9.5 (2003 年度 レポート課題 #9 **問題 1**)

グラフの辺彩色に関して以下の問い (1)〜(3) に答えよ．

(1) 図 179 のグラフ (a)(b) の彩色指数をそれぞれ求めよ．

(2) ピータースン・グラフの外側の 5-閉路の可能な 3-彩色を全て考えて，ピータースン・グラフの彩色指数は 4 であることを示せ．

(3) 「グラフ G が 3 次ハミルトングラフならばその彩色指数は 3 である」ことが知られている．この事実と (2) の結果を用いて，ピータースン・グラフはハミルトングラフでないことを示せ．

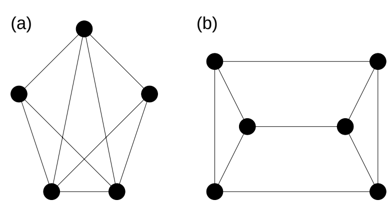

図 179: 彩色指数を求めるべきグラフ (a)(b).

(解答例)

(1) 図 180 より，(a)(b) のそれぞれの彩色指数は

$$\chi'((\mathrm{a})) = 5 \quad (345)$$
$$\chi'((\mathrm{b})) = 3 \quad (346)$$

である．

(2) ピータースン・グラフは図 181 のように彩色できるので，その彩色指数は 4 である．

(3) ピータースン・グラフは 3 次グラフ，つまり，各点の次数が 3 であるが，この 3 次のグラフ G がハミルトングラフであるならば $\chi'(\mathrm{G}) = 3$ であるはずなので，(1) の結果より，ピータースン・グラフはハミ

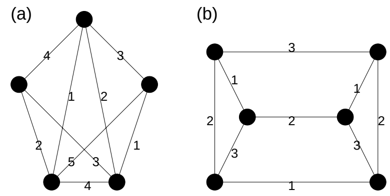

図 180: 辺に付された数字が各色を表す.

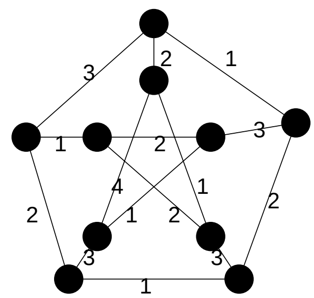

図 181: ピータースン・グラフの彩色. 辺に付された数字が各色を表す.

ルトングラフではないことがわかる.

9.4 彩色多項式

彩色多項式 $P_{\mathrm{G}}(k)$: G は単純グラフであるとし, k 色での点彩色の仕方が $P_{\mathrm{G}}(k)$ 通りあるとする. このとき, $P_{\mathrm{G}}(k)$ を彩色多項式と呼ぶ.

(例) :

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{G}}(k) &= k(k-1)^2 \quad \text{(図 182(左上) のような 3 点からなる木 G)} \\
P_{\mathrm{G}}(k) &= k(k-1)(k-2) \quad \text{(図 182(左下) のような三角形 G)} \\
P_{\mathrm{G}}(k) &= k(k-1)^{n-1} \quad \text{(図 182(右) のような } n \text{ 点からなる木 G)} \\
P_{\mathrm{G}}(k) &= k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) \quad \text{(完全グラフ } \mathrm{K}_n\text{)}
\end{aligned}
$$

明らかに

$$
\begin{aligned}
k < \chi(\mathrm{G}) &\Rightarrow P_{\mathrm{G}}(k) = 0 \\
k \geq \chi(\mathrm{G}) &\Rightarrow P_{\mathrm{G}}(k) > 0
\end{aligned}
$$

である.

次の定理は具体的にグラフ G の彩色多項式を導出する際に極めて重要である.

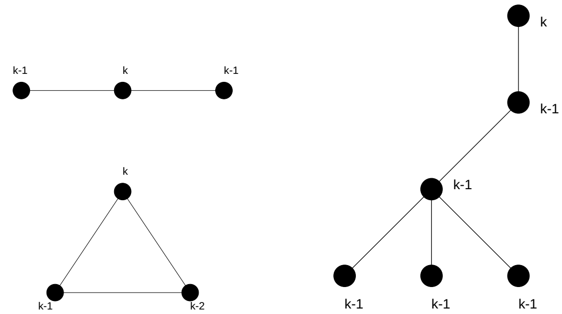

図 182: 左上から右へ $P_{\mathrm{G}}(k) = k(k-1)^2, k(k-1)(k-2), k(k-1)^n$ を彩色多項式として持つグラフ.

定理 21.1
単純グラフ G から辺 e を削除して得られるグラフを $\mathrm{G}-e$ とし, 縮約[a] して得られるグラフを G/e とする. このとき

$$P_{\mathrm{G}}(k) \;=\; P_{\mathrm{G}-e}(k) - P_{\mathrm{G}/e}(k) \tag{347}$$

が成立する.

[a] 再度確認するが, 「縮約」とは任意の 2 点 u, v を結ぶ辺 e を除去し, 点 u, v を同一視する操作である.

証明の前に, この定理の「使い方」を具体的に次の例を見てみよう.

(例)：図 183 の例で考えると, 関係式 (347) は

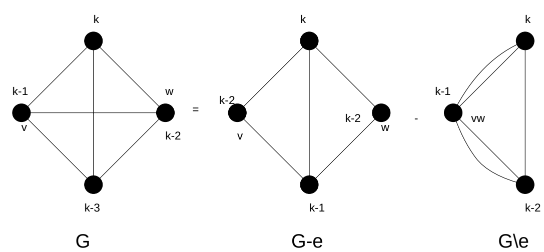

図 183: 関係式 (347) を示すグラフの一例.

$$k(k-1)(k-2)(k-3) \;=\; [k(k-1)(k-2)^2] - [k(k-1)(k-2)]$$

となる.

(証明)：
$e = vw$ とする. v と w が異なる色になるような $\mathrm{G}-e$ の k-彩色の個数は v と w を結ぶ辺 e を描いても変化しない (図 183 のグラフ G, 及び, G-e を参照). 従って, $P_{\mathrm{G}}(k)$ に等しい. 一方, v と w が同じ色になるような $\mathrm{G}-e$ の k-彩色の個数は v と w を同一視しても変わらない (図 183 のグラフ G-e と G/e を参照). 従っ

て, $P_{\mathrm{G}/e}(k)$ に等しい. 以上より

$$P_{\mathrm{G}-e}(k) \quad = \quad P_{\mathrm{G}}(k) + P_{\mathrm{G}/e}(k)$$

が成り立つ. **(証明終わり)**.

彩色多項式を求める際のポイントは, グラフ G の辺数を関係式 (347) を用いて段階的に削減して行き, 「木」まで到達した時点で, n 点からなる木の彩色多項式が $P_{\mathrm{G}}(k) = k(k-1)^{n-1}$ である事実を用いて求める, あるいは, 簡単に彩色多項式が求まるグラフまで辺数を落として, その簡単なグラフに対して彩色多項式を求めることにある.

この方法に慣れるためにいくつかの例題を見ておこう.

例題 9.6 (2003 年度 レポート課題 #9 $\boxed{\textbf{問題 2}}$)

4 つの点からなる単純連結グラフを全て挙げ, それら全てに対して彩色多項式を見つけ, これらの多項式は全て

$$k^4 - mk^3 + ak^2 - bk$$

なる形で書けることを示せ. ただし, m は辺数, a, b はともに正の定数である.

(解答例)
まず, 4 つの点からなる単純連結グラフを全て描いてみると, 図 184 の A〜F の 6 つのグラフが得られる.

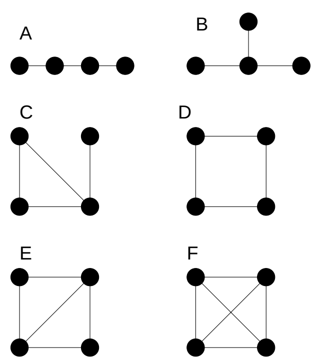

図 184: 4 つの点からなる単純連結グラフ A〜F.

まず, $n = 4$ の「木」である A,B の彩色多項式は図 185 より直ちにわかり

$$P_{\mathsf{A}}(k) = P_{\mathsf{B}}(k) \quad = \quad k(k-1)^3 = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \tag{348}$$

である.
次に, C は公式 :

$$P_G(k) \quad = \quad P_{G-e}(k) - P_{G\backslash e}(k) \tag{349}$$

をグラフ C に適用すると, 図 186 より

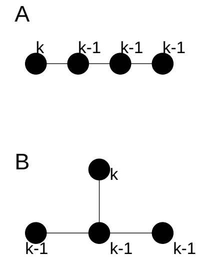

図 185: A,B は $n = 4$ 点からなる「木」であるから, その彩色多項式はどちらも $k(k-1)^3$.

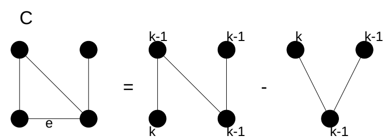

図 186: グラフ C は辺 e に関して図のように分解できる.

$$P_{\mathsf{C}}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)^2 = k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 2k \tag{350}$$

となる.

次にグラフ D は辺 e に関して図 187 のように分解できるので

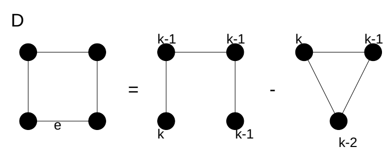

図 187: グラフ D は辺 e に関して図のように分解できる.

$$P_{\mathsf{D}}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k \tag{351}$$

が得られる.

次いで E であるが, これは図 188 のようにグラフ D と $n = 3$ の木に分解でき, グラフ D の彩色多項式 $P_{\mathsf{D}}(k)$ は (351) で既に求めているので, これを用いて

$$\begin{aligned} P_{\mathsf{E}}(k) &= P_{\mathsf{D}}(k) - k(k-1)^2 \\ &= k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k - (k^3 - 2k^2 + k) = k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k \end{aligned} \tag{352}$$

が得られる.

最後にグラフ F であるが, これは図 189 のようにグラフ E と三角形に分解でき, グラフ E の彩色多項式は (352) で既に求めたので, これを用いて

$$\begin{aligned} P_{\mathsf{F}}(k) &= P_{\mathsf{E}} - k(k-1)(k-2) \\ &= k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k - (k^3 - 3k^2 + 2k) = k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k \end{aligned} \tag{353}$$

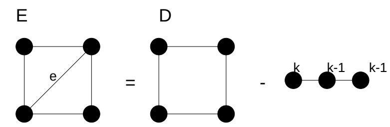

図 188: グラフ E は辺 e に関して図のように分解できる.

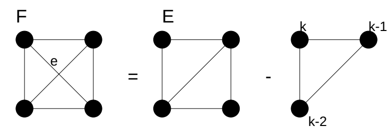

図 189: グラフ F は辺 e に関して図のように分解できる.

が得られる.

以上をまとめると

$$P_{\mathsf{A}}(k) = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \tag{354}$$

$$P_{\mathsf{B}}(k) = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \tag{355}$$

$$P_{\mathsf{C}}(k) = k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 2k \tag{356}$$

$$P_{\mathsf{D}}(k) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k \tag{357}$$

$$P_{\mathsf{E}}(k) = k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k \tag{358}$$

$$P_{\mathsf{F}}(k) = k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k \tag{359}$$

となり, いずれの場合も

$$P_G(k) = k^4 - mk^3 + ak^2 - bk \tag{360}$$

となり, m は辺数, a, b は正の定数となっていることがわかる.

例題 9.7 (2004 年度 **演習問題 10**)

完全二部グラフ, 及び, 閉路グラフの彩色多項式に関して以下の問いに答えよ.

(1) 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{2,3}$ の彩色多項式 $P_{\mathrm{K}_{2,3}}(k)$ を求めよ.
(2) 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{2,s}$ (s : 任意の自然数) の彩色多項式 $P_{\mathrm{K}_{2,s}}(k)$ を求めよ.
(3) 閉路グラフ C_4, 及び, C_5 の彩色多項式 $P_{\mathrm{C}_4}(k), P_{\mathrm{C}_5}(k)$ を求めよ.
(4) 数学的帰納法を用いて, 閉路グラフ C_n に対する彩色多項式 $P_{\mathrm{C}_n}(k)$ が

$$P_{\mathrm{C}_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

で与えられることを証明せよ.

(解答例)

(1) 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{2,3}$ は図 190(左) のとおりである. 以下, 点 a と点 b が同色の場合と異色の場合に分

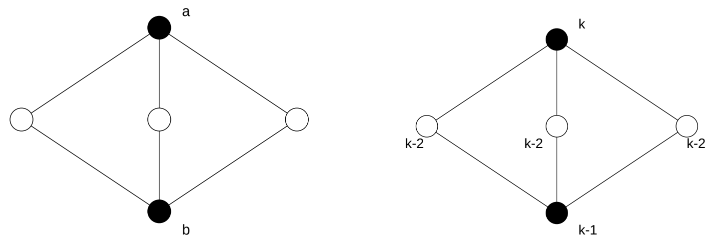

図 190: 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{2,3}$(左) とその彩色の仕方 (右).

けて考える.

(i) 点 a と点 b が同色の場合, 彩色の方法は $k(k-1)^3$ 通りある.
(ii) 点 a と点 b が異色の場合, 彩色の方法は $k(k-1)(k-2)^3$ 通りがある (図 190(右) 参照).

従って, 求める彩色多項式はこの両者の和として

$$P_{\mathrm{K}_{2,3}}(k) \quad = \quad k(k-1)^3 + k(k-1)(k-2)^2$$

で与えられる.

(2) 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{2,s}$ は図 191 のようなグラフである. この図 191 では「中間層」の点の個数が s であ

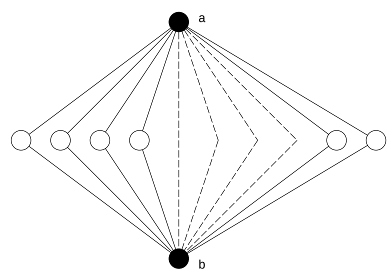

図 191: 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{2,s}$. 「中間層」は s 個の白丸からなる.

ることに注意しよう. このとき, やはり, 点 a と点 b が同色/異色の場合に分けて考える.

(i) 点 a と点 b が同色の場合 : $k(k-1)^s$ 通り.
(ii) 点 a と点 b が異色の場合 : $k(k-1)(k-2)^{s-}$ 通り.

従って, 求める彩色多項式はこれら 2 つの場合の和として

$$P_{\mathrm{K}_{2,s}}(k) \quad = \quad k(k-1)^s + k(k-1)(k-2)^{s-1}$$

で与えられる.

(3) 公式 :

$$P_{\mathrm{G}}(k) \quad = \quad P_{\mathrm{G}-e}(k) - P_{\mathrm{G}/e}(k) \tag{361}$$

を用いると, C_4 は図 192 のように「分解」することができるので, 求める彩色多項式は

$$P_{\mathrm{C}_4}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k^2-3k+3)$$

となる. 一方, C_5 は, 図 193 のように分解できるので, 求める彩色多項式 $P_{\mathrm{C}_5}(k)$ は $P_{\mathrm{C}_4}(k)$ の結果を用

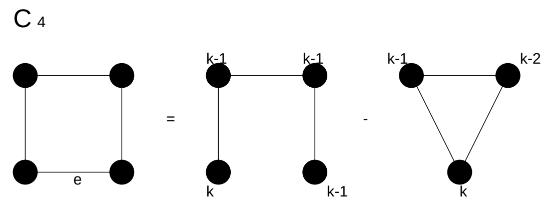

図 192: 閉路 C_4 はこの図のように木と三角形 (C_3) へと分解できる.

いて

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{C}_5}(k) &= k(k-1)^4 - P_{\mathrm{C}_4}(k) \\ &= k(k-1)^4 - k(k-1)(k^2-3k+3) = k(k-1)(k^3-4k+6k-4) \end{aligned}$$

と求まる.

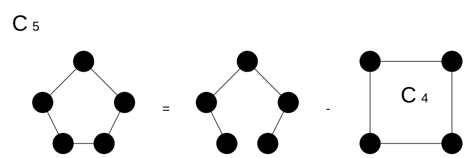

図 193: 閉路 C_5 はこの図のように木と C_4 へと分解できる.

(4) 閉路であるから, $n \geq 2$ として考える. $n=2$ のときには, 図 194 より, $P_{\mathrm{C}_2}(k) = k(k-1)$ となるが, これは証明すべき関係式で $n=2$ と置いたものに等しい. そこで, 点の数が $n-1$ のとき, 関係式 :

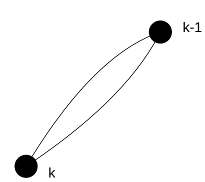

図 194: 閉路 C_2 とその彩色方法.

$$P_{\mathrm{C}_{n-1}}(k) = (k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1) \tag{362}$$

が成立すると仮定する.
このとき, 図 195 の辺 e で, 公式 (361) を用いると

$$P_{\mathrm{C}_n}(k) = k(k-1)^{n-1} - P_{\mathrm{C}_{n-1}}(k)$$

$$
\begin{aligned}
&= k(k-1)^{n-1} - \{(k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1)\} \\
&= k(k-1)^{n-1} - (k-1)^{n-1} + (-1)^{n}(k-1) \\
&= (k-1)^{n} + (-1)^{n}(k-1)
\end{aligned}
$$

となる. 従って, 数学的帰納法により, 全ての n に対して

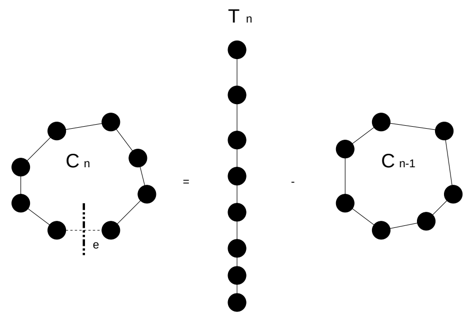

図 195: 閉路 C_n を辺 e において分解すると, n 点からなる木 T_n と閉路 C_{n-1} へと分解される.

$$
P_{\mathrm{C}_n}(k) \;=\; (k-1)^n + (-1)^n(k-1)
$$

が成り立つ. **(証明終わり)**.

例題 9.8 (2005 年度 **演習問題 10**)

グラフ G が非連結な単純グラフならば, 彩色多項式 $P_{\mathrm{G}}(k)$ はその成分の彩色多項式の積で与えられることを示せ.

(解答例)

例えば, 三角形を G_1 とし, 2 個の点からなる木を G_2 とする. このとき, 3 色が使うことのできる色数とすれば, $P_{\mathrm{G}_1}(3) = P_{\mathrm{G}_2}(3) = 6$ である. 具体的に三色を R,B,G として彩色を図示すると図 196 のようになる. これから明らかに, この G_1, G_2 をグラフ G の 2 つの成分としたとき, この 2 つの成分は非連結であるから, G_1 の彩色の仕方は G_2 の彩色の仕方に影響を与えない. 従って, 非連結グラフ G を 3 色で色分けする場合, 出来上がるグラフの個数は $P_{\mathrm{G}_1}(3) \times P_{\mathrm{G}_2}(3) = 36$ 通りある. この考察を押し進めてグラフの成分数が増えた場合を考えても, 個々の彩色多項式の積で非連結グラフの彩色の仕方の数が決まるのは明らかなので, 題意が言えることになる.

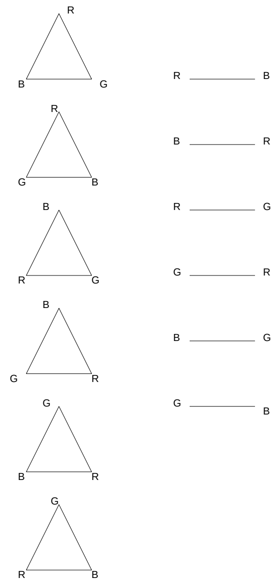

図 196: G_1, G_2 の 3 色での彩色の仕方．それぞれ 6 通りある．

例題 9.9　(2006 年度 **演習問題 10**)

点数 n の一般グラフ: G, 木: T_n, 完全グラフ: K_n の彩色多項式間には次の不等式が成立することを示せ.

$$P_{K_n}(k) \le P_G(k) \le P_{T_n}(k)$$

(解答例)

まず, 点数が 4 の完全グラフ K_4 を考え, この完全グラフから辺を 1 本ずつ削減していった場合, 彩色多項式はどのように振舞うのかを調べてみよう．図 197 に載せるように, 辺を削除していくことにより, 彩色多

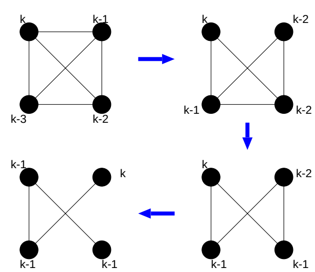

図 197: 完全グラフから辺を 1 本ずつ削除していくと最後には木が得られる．

項式は $k(k-1)(k-2)(k-3) \to k(k-1)(k-2)^2 \to k(k-1)^2(k-2) \to k(k-3)^3$ のように単調に増加し, 最終的に得られるグラフは点数 4 からなる木 T_4 である．また, 完全グラフは全ての点が互いにつながっているので, 点彩色においては全ての点の色を他のどの全ての点の色とも異なる色で彩色しなければならず, 従って, 明らかに与えられた色の数 k に対し, 完全グラフの点彩色の仕方の数は連結グラフ中で最も少ない．また, 上記の操作を繰り返して最終的にできあがる連結グラフは木であり, この事実は点数 n によら

ない. 従って

$$P_{K_n}(k) \le P_G(k) \le P_{T_n}(k) \tag{363}$$

すなわち

$$k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) \le P_G(k) \le k(k-1)^{n-1} \tag{364}$$

が成り立つ.

演習問題 10

図 179 の (b) に与えられたグラフの彩色多項式を求めよ.