

# グラフ理論 講義ノート #11

井上 純一

北海道大学 大学院情報科学研究科

URL : [http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

平成 19 年 7 月 2 日

## 目次

10 有向グラフ	186
10.1 有向グラフの定義・概念とその性質	187
10.2 オイラー有向グラフとトーナメント	191

### 演習問題 10 の解答例

(解答例)

彩色多項式を求める際のポイントは講義中にも言及したように、関係式:

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k) \quad (365)$$

を用いてグラフを「木」あるいは「完全グラフ」、または簡単にその彩色多項式が求まる形まで簡略化することであった。この問題もその通りにすればよい。例えば、問題のグラフ  $G$  の図 198 の辺  $e$  を選び、この辺

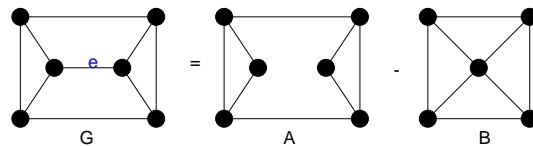


図 198: 問題のグラフ  $G$  の分解の第 1 ステップ.

に対して関係式 (365) を用いると、 $G$  は図 198 のように 2 種類のグラフ  $A, B$  の差で書けることになる。そこで、以下でははじめにグラフ  $A$ 、次にグラフ  $B$  という順番で、さらに分解公式 (365) を使うことにより、より単純なグラフに変形していくことにする。

まずはグラフ  $A$  に対して、図 199 の辺  $e$  で分解すると、グラフ  $A$  は図 199 右辺のようにグラフ  $G_1, G_2$  に分解される。そこで、さらにこのグラフ  $G_1, G_2$  をそれぞれ図 200 に与えた辺で分解すると、図 200 右辺のようになる。従って、グラフ  $G_1$  は 2 つの完全グラフ  $K_3$  とグラフ  $G_3$  へ、グラフ  $G_2$  はグラフ  $G_3$  と  $G_4$  へとそれぞれが分解されることになる。2 つの完全グラフの彩色多項式は既に見たように  $\{k(k-1)(k-2)\}^2$

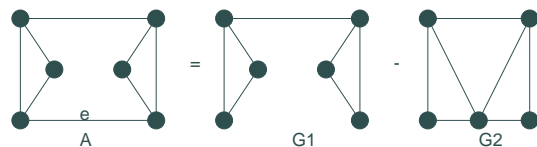


図 199: グラフ A の分解の第 1 ステップ. グラフ A はグラフ  $G_1, G_2$  に分解される.

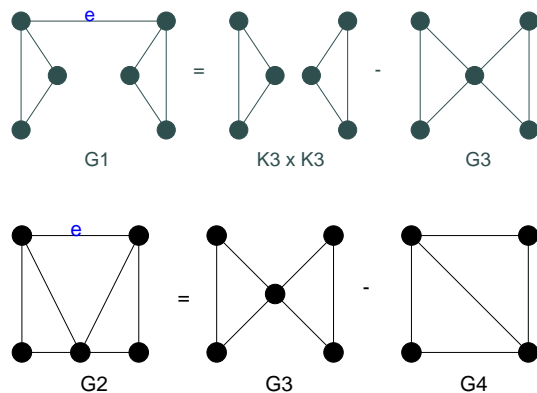


図 200: グラフ  $G_1, G_2$  の分解.

であるからこれはそのまま残しておくことにしよう. よって, あとは  $G_3, G_4$  をさらに分解し, より簡単なグラフにしていくことが目標となる.

実際に図 201 に与えた辺  $e$  で  $G_3, G_4$  を分解すると図 201 の右辺のようになる. 従って, これらの図の右辺に現れた,  $G_5, G_6, G_7$  が, より簡単なグラフで書き換えることができれば, 図 199 のグラフ A の彩色多項式が得られることになる. もちろん, 図 201 の「右辺」の木  $T_3$  の彩色多項式は簡単に  $k(k-1)^2$  であることに注意しよう. 実際にグラフ  $G_5, G_6, G_7$  をそれぞれ該当する辺  $e$  で分解してみると図 202 の右辺のようになり, この段階では全てのグラフが「木」あるいは「完全グラフ」で書き直されていることに注意する. これらを式でまとめてみると, 図 199 のグラフ A の彩色多項式は

$$\begin{aligned}
 P_A(k) &= P_{G_1}(k) - P_{G_2}(k) \\
 &= P_{\{K_3\}^2}(k) - P_{G_3}(k) - \{P_{G_3}(k) - P_{G_4}(k)\} \\
 &= P_{\{K_3\}^2}(k) - 2P_{G_3}(k) + P_{G_4}(k) \\
 &= P_{\{K_3\}^2}(k) - 2\{P_{G_5}(k) - P_{G_6}(k)\} + \{P_{G_7}(k) - P_{T_3}(k)\} \\
 &= P_{\{K_3\}^2}(k) - 2\{P_{T_5}(k) - P_{T_4}(k)\} \\
 &+ 2\{P_{T_4}(k) - P_{T_3}(k)\} + P_{T_4}(k) - P_{K_3}(k) - P_{T_3}(k) \\
 &= P_{\{K_3\}^2}(k) - 2P_{T_5}(k) + 5P_{T_4}(k) - 3P_{T_3}(k) - P_{K_3}(k)
 \end{aligned} \tag{366}$$

と書ける.  $n$  点からなる完全グラフ, 木の彩色多項式がそれぞれ

$$P_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) \tag{367}$$

$$P_{T_n}(k) = k(k-1)^{n-1} \tag{368}$$

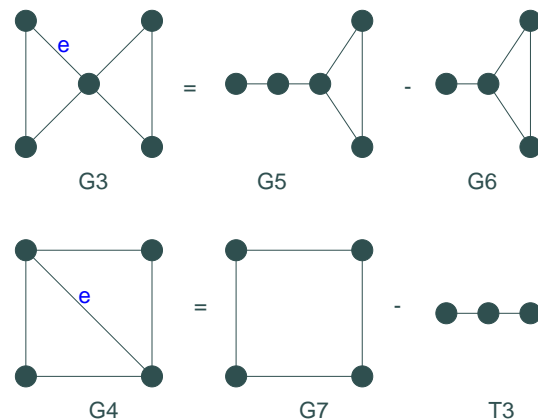


図 201: グラフ  $G_3, G_4$  の分解.

で与えられたことを思い出すと、グラフ  $A$  の彩色多項式は

$$\begin{aligned}
 P_A(k) &= \{k(k-1)(k-2)\}^2 - 2k(k-1)^4 + 5k(k-1)^3 - 3k(k-1)^2 - k(k-1)(k-2) \\
 &= k^6 - 8k^5 + 29k^4 - 39k^3 + 31k^2 - 10k
 \end{aligned}
 \tag{369}$$

となる.

次にグラフ  $B$  について考えよう. グラフ  $B$  を図 203 に示した辺  $e$  で分解すると, 図 203 の右辺に示したようにグラフ  $G_8$  と完全グラフ  $K_4$  で書き直すことができる. この図 203 右辺のグラフ  $G_8$  はさらに図 204 のように, 既に得られているグラフ  $G_3$  と新たに得られるグラフ  $G_9$  に分解できる. しかし, ここで新たに得られるグラフ  $G_9$  も更なる分解を施すことで図 204 のように既に得られている  $G_6$  と完全グラフ  $K_3$  に分解することができるので, これらを彩色多項式で書くと

$$\begin{aligned}
 P_B(k) &= P_{G_8}(k) - P_{K_4}(k) \\
 &= \{P_{G_3}(k) - P_{G_9}(k)\} - P_{K_4}(k) \\
 &= P_{G_3}(k) - \{P_{G_6}(k) - P_{K_3}(k)\} - P_{K_4}(k) \\
 &= P_{G_5}(k) - 2P_{G_6}(k) + P_{K_3}(k) - P_{K_4}(k) \\
 &= P_{T_5}(k) - P_{T_4}(k) - 2\{P_{T_4}(k) - P_{T_3}(k)\} + P_{K_3}(k) - P_{K_4}(k) \\
 &= P_{T_5}(k) - 3P_{T_4}(k) + 2P_{T_3}(k) + P_{K_3}(k) - P_{K_4}(k)
 \end{aligned}
 \tag{370}$$

となり, ここでも完全グラフと木の彩色多項式のみで書けるところまで変形できた. そこで,  $P_{K_n}(k), P_{T_n}(k)$  を代入すると

$$\begin{aligned}
 P_B(k) &= k(k-1)^4 - 3k(k-1)^3 + 2k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2) - k(k-1)(k-2)(k-3) \\
 &= k^5 - 8k^4 + 24k^3 - 31k^2 + 14k
 \end{aligned}
 \tag{371}$$

が得られる. よって, (369)(371) 式より, 求める彩色多項式は

$$\begin{aligned}
 P_G(k) &= P_A(k) - P_B(k) \\
 &= \{k^6 - 8k^5 + 29k^4 - 39k^3 + 31k^2 - 10k\} \\
 &\quad - \{k^5 - 8k^4 + 24k^3 - 31k^2 + 14k\} \\
 &= k^6 - 9k^5 + 37k^4 - 63k^3 + 62k^2 - 24k
 \end{aligned}
 \tag{372}$$

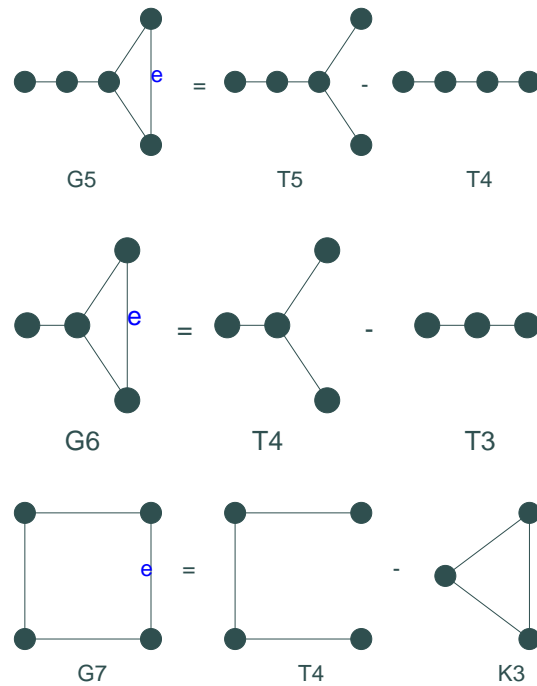


図 202: グラフ  $G_5, G_6, G_7$  の分解. 全てが木と完全グラフで表現できることに注意.

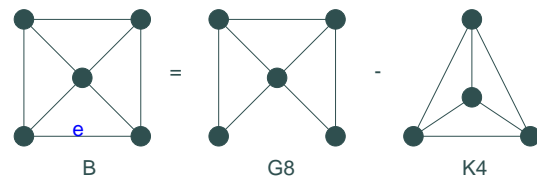


図 203: グラフ  $B$  の分解. グラフ  $G_8$  と完全グラフ  $K_4$  で書き直せる.

となる.

ちなみに、分解公式を使う際、ここで示した辺とは異なる辺  $e$  に対して (365) 式を用いても最終的には (372) 式に辿り着くことに注意 (途中の経路が異なっても、グラフ  $G$  の彩色多項式は一意に求まらなければならない).

また、この結果をよく見てみると、このグラフ  $G$  の点数  $n$ 、辺数  $m$  はそれぞれ  $n = 6, m = 9$  であるが、主要項は  $k^n$ 、そして  $k^{n-1}$  の係数は  $-m$  となり、各項の符号は正負が交互に現れている.

## 10 有向グラフ

今まで扱ってきたグラフは各辺に向きは無く、例えば、オイラー小道などを考える際には、辺のどちら向きに進んで道を作っても構わなかった. これに対し、この節からは各辺がそれぞれ向きを持っている「有向グラフ」について、その性質を調べて行くことにする.

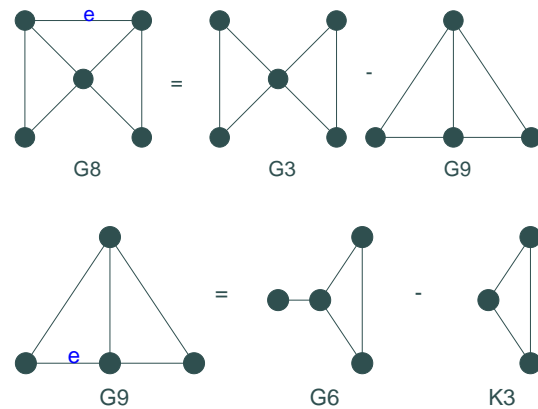


図 204: グラフ  $G_8$  の分解. 既に得られているグラフ  $G_3$  と新たに得られるグラフ  $G_9$  で書き直せる. しかし, このグラフ  $G_9$  も既に得られているグラフ  $G_6$  と完全グラフ  $K_3$  に分解できる.

### 10.1 有向グラフの定義・概念とその性質

弧集合 (arc family)  $A(D)$  : 点集合  $V(D)$  の元の順序対からなる有限族.

有向グラフ (digraph)  $D$  :  $V(D)$  と  $A(D)$  からなるグラフ (図 205 参照).

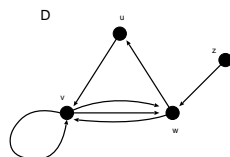


図 205: 有向グラフ  $D$  の一例.  $V(D) = \{u, v, w, z\}, A(D) = \{\overline{uv}, \overline{vu}, \overline{vw}, \overline{wv}, \overline{wu}, \overline{zw}\}$ .

$D$  の基礎グラフ (underlying graph) : 有向グラフ  $D$  の矢印を取り除いたグラフ (図 205 参照).

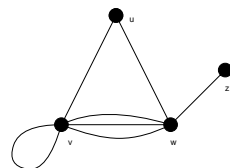


図 206: 図 205 の有向グラフに対する基礎グラフ.

単純有向グラフ (simple digraph) :  $D$  の弧が全て異なり, ループが無いグラフ.

(注) : 単純有向グラフの基礎グラフは必ずしも単純グラフではない (図 207 参照).

有向グラフの同形 : 基本グラフの間に同形写像があり, 各点の順序を保存する写像になっているとき.

例えば, 図 208 のグラフ  $A$  と  $B$  は同形ではない.  $\overline{wz}$  の向きが異なるからである.

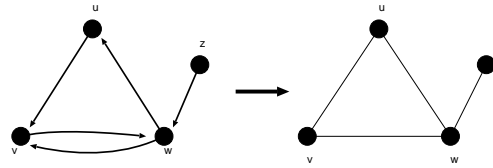


図 207: 図 205 の単純有向グラフの基礎グラフは必ずしも単純グラフではない.

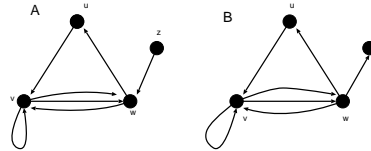


図 208: これら有向グラフ A と B は同形ではない. 辺 wz の向きが異なるからである.

有向グラフ D の隣接行列  $A = (a_{ij})$  : 要素  $a_{ij}$  が  $v_i$  から  $v_j$  への「弧」の本数を表す, サイズ  $n$  のグラフに対して  $n \times n$  の行列.

(注) : 無向グラフの場合と異なり, 行列  $A$  は非対称であることに注意されたい.

図 209 の有向グラフ D の隣接行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる.

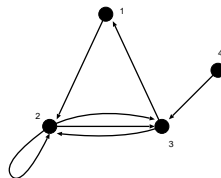


図 209: その隣接行列が で与えられる有向グラフ D.

強連結 (strongly connected) : 任意の 2 点,  $v, w$  の間に  $v$  から  $w$  への道がある.

向き付け可能 (orientable) : グラフ G の全ての辺を方向付けて強連結有向グラフが得られるとき (例として図 210 参照).

**定理 22.1**  
 連結グラフ G が向き付け可能であるための必要十分条件, グラフ G の各辺が少なくとも 1 つの閉路に含まれていることである.

(証明)

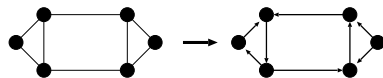


図 210: 向き付け可能なグラフの一例.

必要性は明らかなので十分性を示す.

まず, グラフ  $G$  の全てが閉路が含まれている場合には証明は終わる. 従って, 以下ではこれ以外の場合を考える.

さて, 閉路  $C$  には含まれないが,  $C$  の各辺に隣接している辺  $e$  を選ぶ (図 211 参照). 「グラフ  $G$  の各辺

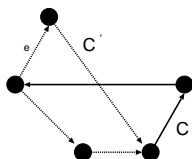


図 211: 閉路  $C$  と  $C'$ .

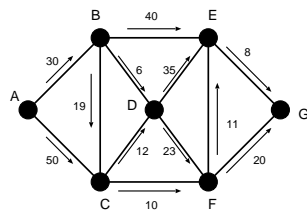
が少なくとも 1 つの閉路に含まれている」のであるから,  $e$  はある閉路  $C'$  に含まれている.  $C'$  の辺を  $C$  にも含まれている  $C'$  の辺の向きは変えないで向き付ける. この操作でできる有向グラフは強連結である.

従って, この操作を続けて, 各ステップで少なくとも 1 つの辺を向き付ける. 各ステップで有向グラフは強連結なので, グラフ全体を向き付けた後にできるグラフは強連結である. (証明終わり).

有向グラフの応用問題として, 次の例題を見ておこう.

**例題 10.1** (2003 年度 レポート課題 #10 問題 2)

図のネットワークで点  $A$  から点  $G$  への最長路を見つけよ.



(解答例)

点  $A$  からの各点  $V$  への最長路の長さを示す数値  $l(V)$  計算すると

- $A : 0$
- $B : l(A) + 30 = 30$
- $C : l(A) + 50 = 50$
- $D : \max\{l(B) + 6, l(C) + 12\} = \max\{36, 62\} = 62$
- $F : \max\{l(D) + 23, l(C) + 10\} = \max\{85, 60\} = 85$
- $E : \max\{l(B) + 40, l(D) + 35, l(F) + 11\} = \max\{70, 97, 96\} = 97$

$$G : \max\{l(E) + 8, l(F) + 20\} = \max\{105, 105\} = 105$$

となるから、最長路の長さは 105 であり、最長路を図 212 に載せる。

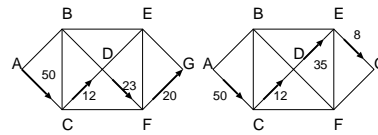


図 212: 最長路を与える 2 通りの経路。どちらも最長路の長さは 105 である。

**例題 10.2** (2003 年度 レポート課題 #10 問題 1)

有向グラフ  $D$  の逆  $\bar{D}$  は  $D$  の辺の向きを反転して得られる。以下の問題に答えよ。

- (1) その逆と同形であるような有向グラフの一例を描け。
- (2)  $D$  と  $\bar{D}$  の隣接行列の間にはどんな関係があるか、答えよ。

(解答例)

- (1) 互いに同形であるような有向グラフ  $D$  及び、その逆  $\bar{D}$  を図 213 に描く。

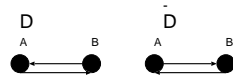


図 213: 互いに同形であるような有向グラフ  $D$  及び、その逆  $\bar{D}$  の一例。

- (2) 図 214 に載せた基礎グラフ  $G$  に対して有向グラフ  $D$  及び、その逆  $\bar{D}$  を作り、それぞれの隣接行列  $A_G, A_D, A_{\bar{D}}$  を書き下してみると

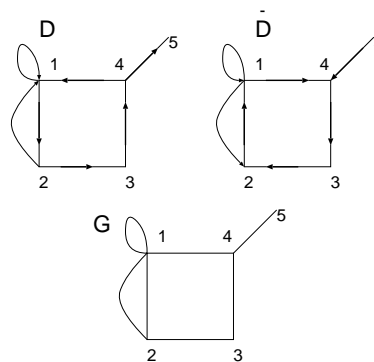


図 214: 例として考える基礎グラフ  $G$ , 有向グラフ  $D$  及び、その逆  $\bar{D}$ 。



$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{\bar{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (373)$$

となる.  $A_D + A_{\bar{D}}$  を作ってみると

$$A_D + A_{\bar{D}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (374)$$

が得られるが, これは一行一列成分 ( $[A_D + A_{\bar{D}}]_{11}$ ) だけが異なる以外は基礎グラフの隣接行列と一致する. この食い違いが生じた成分は基礎グラフの「ループ」に相当する. 従って, ループが無い基礎グラフに関しては関係式:

$$A_G = A_D + A_{\bar{D}} \quad (375)$$

が成立することがわかる. ループを含むグラフに関しても, 非対角成分に限れば上関係式が成り立つ.

ここでは図 214 に載せた特定のグラフに関して議論したが, これが一般のグラフに関しても成り立つのは明らかである. グラフの逆は辺の向きを逆転してできるわけであるから, 一方のグラフで弧  $vw$  が存在するならば, その逆のグラフでは  $wv$  は存在しない. 従って, ループが無い場合には関係式 (375) の非対角成分に関して  $[A_G]_{vw} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vw}$  が成り立つ. ループがある場合には各隣接行列に対して  $[A_D]_{vv} = [A_{\bar{D}}]_{vv}$  が成り立つわけであるから, 関係式 (375) の対角成分に関して  $2[A_G]_{vv} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vv}$  が成り立つ. ループが無い場合には隣接行列の対角成分はゼロであるから, 関係式 (375) を成分で書けば全ての場合に関して, 異なる任意の 2 点  $v, w$  に対し

$$[A_G]_{vw} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vw} \quad (376)$$

$$2[A_G]_{vv} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vv} \quad (377)$$

が成り立つ.

## 10.2 オイラー有向グラフとトーナメント

連結有向グラフ  $D$  の全ての弧を含む閉じた小道が存在する場合, その有向連結グラフ  $D$  をオイラーであると言う. 図 215 に載せた例は, オイラーではないが, その基礎グラフはオイラーである場合である.

出次数 (out-degree)  $\text{outdeg}(v)$ :  $vw$  の形をした有向グラフ  $D$  の弧数.

入次数 (in-degree)  $\text{indeg}(v)$ :  $wv$  の形をした有向グラフ  $D$  の弧数.

握手有向補題

有向グラフ  $D$  の全点についての入次数の合計と出次数の合計は等しい.

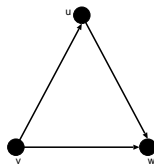


図 215: オイラー有向グラフではないが, その基礎グラフはオイラーであるグラフの一例.

**定理 23.1**

連結有向グラフ  $D$  がオイラーであるための必要十分条件は,  $D$  の各点で  $\text{outdeg}(v) = \text{indeg}(v)$  が成立することである.

ハミルトン有向グラフ (Hamiltonian digraph) : 全ての点を含む閉路がある有向グラフ.

半ハミルトン有向グラフ (semi-Hamiltonian digraph) : 全ての点を通る道があるグラフ.

**定理 23.2**

$D$  は強連結有向グラフであり, 点が  $n$  個あるとする. 各点  $v$  に対し,  $\text{outdeg}(v) \geq n/2$ , かつ,  $\text{indeg}(v) \geq n/2$  ならば,  $D$  はハミルトン有向グラフである.

トーナメント (tournament) : 任意の 2 点がちょうど 1 本の弧で結ばれている有向グラフ (図 216 参照).

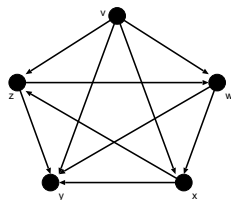


図 216: トーナメントの一例.

**定理 23.3**

- (i) ハミルトンでないトーナメントは全て半ハミルトンである.
- (ii) 強連結なトーナメントは全てハミルトンである.

(証明)

(i) 点  $n$  個のトーナメントは全て半ハミルトンであると仮定する.  $T'$  には点が  $n$  個あるので, 半ハミルトン道がある (図 217 参照).

(1)  $vv_1$  が  $T$  の弧ならば,  $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$  が所望の道である.

(2)  $vv_1$  が  $T$  の弧ではなく,  $v_1v$  が  $T$  の弧であれば, 図 218 のように点  $v_i$  を選べばよい.

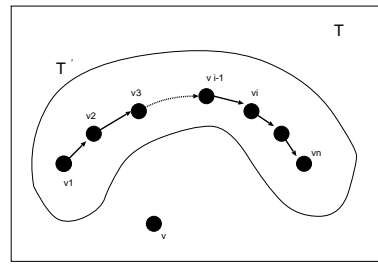


図 217:  $T'$  には半ハミルトン道がある.

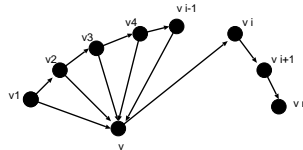


図 218:  $vv_1$  が  $T$  の弧ではなく,  $v_1v$  が  $T$  の弧であれば, 図のように点  $v_i$  を選べばよい.

(3)  $vv_i$  の形をした弧が  $T$  にないのであれば,  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v$  が所望の道である. (証明終わり).

最後にトーナメント (「トーナメントが推移的である」という概念) に関する例題を一つ見ておこう.

**例題 10.3** (2003 年度 レポート課題 #10 問題 3)

トーナメントが推移的であるというのは, 弧  $uv$  と  $vw$  があれば必ず弧  $uw$  があることである. 以下の問いに答えよ.

- (1) 推移的トーナメントの一例を描け.
- (2) 推移的トーナメントにおいては全てのチームに順位付けられることを示せ. ただし, どのチームもそれより下位のチーム全てを負かしていなければならないものとする.
- (3) 点が 2 個以上ある推移的トーナメントは強連結になり得ないことを示せ.

(解答例)

(1) 推移的トーナメントグラフの一例を図 219 に載せる.

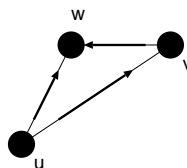


図 219: 推移的トーナメントグラフの一例.

(2) 図 219 に示したグラフにおいて、点  $k = u, v, w$  出次数 :  $\text{outdeg}(k)$  及び 入次数 :  $\text{indeg}(k)$  と順位の間係を書くと

$$1 \text{ 位 } (u) : \text{outdeg}(u) = 2, \text{indeg}(u) = 0$$

$$2 \text{ 位 } (v) : \text{outdeg}(v) = 1, \text{indeg}(v) = 1$$

$$3 \text{ 位 } (w) : \text{outdeg}(w) = 0, \text{indeg}(w) = 2$$

となる。従って、 $\text{outdeg}$  の多い順 (あるいは  $\text{indeg}$  の少ない順) に 1 位から 3 位への順位が付けられる。また、推移的トーナメントの定義から  $\text{outdeg}$  あるいは  $\text{indeg}$  の数が等しい点が現れることはあり得ないから、全てのチームに順位をつけることができる。

(3) 点が 2 個以上ある推移的トーナメントのグラフならば、必ず  $\text{outdeg}(k) = 0$  となるような点  $k$  が存在するから、強連結にはなり得ない。

**例題 10.4** (2005 年度 演習問題 11)

以下の問いに答えよ。

- (1) ハミルトン・グラフは全て向き付け可能であることを示せ。
- (2)  $K_n$  ( $n \geq 3$ ), および,  $K_{r,s}$  ( $r, s \geq 2$ ) は向き付け可能であることを、個々のグラフの向き付けを具体的に見つけることにより示せ。
- (3) ピーターソン・グラフの向き付けを見つけよ。

(解答例)

(1) ハミルトン・グラフには全ての点を一度ずつ通って元に戻るハミルトン閉路が存在するので、この閉路に沿って各辺を向き付けすれば (この閉路に属さない辺への向き付けの仕方は任意), 任意の点  $v$  をスタートし、任意の点  $w$  に到達できる道がこの閉路上にあることは明らか。従って、ハミルトン・グラフは向き付け可能である。

(2) 完全グラフ  $K_n$  ( $n \geq 3$ ) の場合には任意の点  $v$  の次数が  $\text{deg}(v) = n - 1$  であるから、Dirac の定理より、グラフ内の全ての点  $v$  に対し  $\text{deg}(v) \geq n/2$  が成立するのでハミルトン閉路が存在するハミルトン・グラフである。従って、(1) の結果より、向き付け可能である。具体的にはハミルトン閉路に属する辺をまずその向きに向き付けし、残りの辺に任意に向き付けを行えばよい (図 220(左) 参照)。次に完

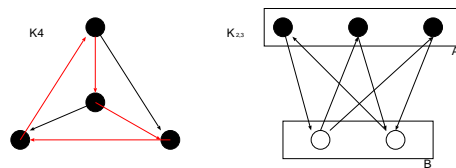


図 220:  $K_4$  の向き付け (左) と  $K_{2,3}$  の向き付け (右)。

全二部グラフ  $K_{r,s}$  ( $r, s \geq 2$ ) の場合には、必ず全ての辺が ABAB という長さ 4 の閉路に含まれるので (A, B とはそれぞれの点それぞれのどちらかに含まれる 2 つのグループを指す), 定理 22・1 「連結グラフが向き付け可能であるための必要十分条件は、各辺が少なくとも 1 つの閉路に含まれることである」よ

り、向き付けが可能であり、この順：ABAB に各辺に対し向き付けを行えば良い (図 220(右) 参照)。

(3) 図 221 参照。

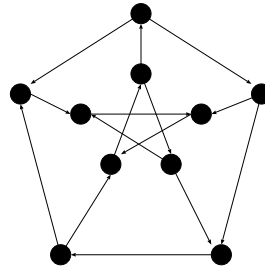


図 221: ピーターソン・グラフの向き付け。

**例題 10.5** (2006 年度 演習問題 11)

$v_1, v_2, \dots, v_N$  を有向グラフ  $D$  の点とする。成分  $a_{ij}$  を始点が  $v_i$ 、終点が  $v_j$  である  $D$  の弧の個数とするような  $N \times N$ - 行列  $A$  を有向グラフ  $D$  の隣接行列とすると、 $A^k$  の  $(i, j)$  成分は  $D$  における長さ  $k$  の有向  $(v_i, v_j)$  歩道の個数となることを示せ。

(解答例)

まずは、 $A^2$  の成分を書き出してみると

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^n a_{1l}a_{l1} & \sum_{l=1}^n a_{1l}a_{l2} & \cdots & \cdots & \sum_{l=1}^n a_{1l}a_{ln} \\ \sum_{l=1}^n a_{2l}a_{l1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{l=1}^n a_{nl}a_{l1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{l=1}^n a_{nl}a_{ln} \end{pmatrix} \tag{378}
 \end{aligned}$$

となる。従って、この第  $(i, j)$  成分は

$$[A^2]_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il}a_{lj} \tag{379}$$

であるが、この和の中で、 $a_{il}$  は点  $v_i$  から出発して点  $v_l$  へ至る  $v_i \rightarrow v_l$  の形の弧の個数を表している。また、 $a_{lj}$  は点  $v_l$  から出発して点  $v_j$  へ至る  $v_l \rightarrow v_j$  の形の弧の個数を表している。従って、これらを掛け合わせた  $a_{il}a_{lj}$  は点  $v_i$  から出発し、中継点  $v_l$  を経由し、点  $v_j$  へ至る  $v_i \rightarrow v_l \rightarrow v_j$  の形をした弧の個数に等しい。従って、 $[A^2]_{ij}$  は全ての可能な中継点に関して和をとったものであるから、結局、長さ 2 の  $(v_i, v_j)$  有向歩道の個数を表している。

この議論を  $A^k$  へと拡張することはたやすい.

$$[A^k]_{ij} = \sum_{l_1=1}^n \sum_{l_2=1}^n \cdots \sum_{l_{k-1}=1}^n a_{il_1} a_{l_1 l_2} \cdots a_{l_{k-2} l_{k-1}} a_{l_{k-1} j} \quad (380)$$

であるから,  $a_{il_1}$  は弧  $i \rightarrow l_1$  の個数,  $a_{l_1 l_2}$  は弧  $l_1 \rightarrow l_2$  の個数, ...,  $a_{l_{k-1} j}$  は弧  $l_{k-1} \rightarrow j$  の個数なので,  $a_{il_1} a_{l_1 l_2} \cdots a_{l_{k-2} l_{k-1}} a_{l_{k-1} j}$  は中継点  $\{v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_{k-1}}\}$  を経由する長さ  $k$  の有向歩道の個数を表すことになる. よって, 全ての中継点の組み合わせについて和をとった (380) 式は長さ  $k$  の  $(v_i, v_j)$  有向歩道の個数を表す.

**演習問題 11**

隣接行列 (あるいはグラフを特徴付ける他の行列を使っても良い), および, 始点と終点を与えれば自動的にその最短路と最短路長を出力するようなプログラムを作成し, 具体的に図 222 に与えたグラフ (始点 S, 終

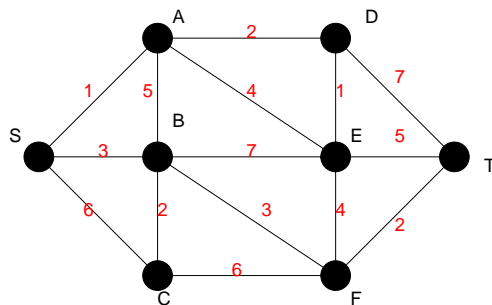


図 222: 計算機により最短路を求めるグラフ.

点 T) に対する動作結果を示せ (プログラムを添付すること).

**連絡事項**

次回 7/9 は担当者 (井上) 出張のため, 休講となります. 7/16 は「海の日」で休みですので, 今回のレポート締め切りは 7/23 の講義開始時までとします.