グラフ理論 講義ノート #12

井上 純一
北海道大学 大学院情報科学研究科
URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j _inoue/

平成 19 年 7 月 23 日

目 次

10.3 マルコフ連鎖 200

演習問題 11 の解答例

下記にサンプルプログラムを載せる.

```
/***************************************************************************/
/*    Graph Theory 2007 exam.#11 Sample program to find the shortest path  */
/*                                          J. Inoue                       */
/***************************************************************************/
#include<stdio.h>
#define N 8 /* # of points */
/* Main Program */
main()
{
  int flag[N]; /* フラグ（その点への最短経路が確定したら 1, しなければ 0）*/
  int distance[N];   /* 各点への最短距離 */
  int root_point[N]; /* 最短経路上の各点の一つ手前の点 */
  int i,j;
      /* 各配列の初期化 */
      for(i=0; i <= N-1; i++){
            flag[i]=0;
            distance[i]=-1;
            root_point[i]=0;
          }
          /* グラフのデータ構造：8 x 8 隣接行列 */
          /* 点 i,j を結ぶ辺の長さが<ij>成分 */
          /* 辺が無い点対の成分は便宜上-1 としてあることに注意 */
```

```
        int adjacent[N][N]={
                 {-1,1,3,6,-1,-1,-1,-1},
         {1,-1,5,-1,2,4,-1,-1},
         {3,5,-1,2,-1,7,3,-1},
         {6,-1,2,-1,-1,-1,6,-1},
         {-1,2,-1,-1,-1,1,-1,7},
         {-1,4,7,-1,1,-1,4,5},
         {-1,-1,3,6,-1,4,-1,2},
         {-1,-1,-1,-1,7,5,2,-1}
        };
        /* それぞれの点を表す記号を便宜上数字に対応させておく*/
printf("// Define as S==0,A==1,B==2,C==3,D==4,E==5,F==6,T==7 //\n");
printf("\n");

      /* 初期化 */
        distance[0]=0; /* 当然点 S への最短距離はゼロ */
        flag[0]=1; /* これも当然だが，点 S のフラグに 1 を立てておく*/
        int count=0;
        int min, min_number;
    /* 未訪問の点が無くなるまで以下を繰り返す */
        while(count<N){
          min=-1;
          for(i=0; i<=N-1; i++){
          /* フラグが 1 の点から移動先を探す */
            if(flag[i]==1){
        for(j=0; j<=N-1; j++){
        /* 未訪問かつ移動可能な点 */
           if((flag[j]==0) && (adjacent[i][j]!=-1)){
                        /* 最短道であるための条件分岐 */
             if((distance[i]+adjacent[i][j]<min) || (min==-1)){
             min=distance[i]+adjacent[i][j];
             /* 選択道 */
             min_number=j; }

         /* 各道に対する最短路が新たに見つかったら更新 */
          if((distance[i]+adjacent[i][j]<distance[j]) || (distance[j]==-1)){
         distance[j]=distance[i]+adjacent[i][j];
        root_point[j]=i;
          }
            }
         }
    }
  /* 距離最小なところは最短経路確定するのでフラグを 1 に */
```

```
flag[min_number]=1;
  }
count++;
}
/* 最後に計算データを出力 */
for(i=0; i<=N-1; i++){
    printf("// The shortest distance to point %d is distance[%d]=%d //\n",i,i,distance[i]);
}
     printf("\n");
     printf("// The previous point for each point on the shortest path //\n");
     printf("\n");
for(i=0; i <=N-1; i++){
printf("root_point[%d]=%d\n",i,root_point[i]);
}
    printf("\n");
    printf("// The shortest path //\n");
    printf("\n");

i=7;
    printf("%d",i);
    while(i!=0){
        printf(" <== %d",root_point[i]);
        i=root_point[i];
       }
    printf("\n");
}
```

これの実行結果は次のようになる.

```
// Define as S==0,A==1,B==2,C==3,D==4,E==5,F==6,T==7 //

// The shortest distance to point 0 is distance[0]=0 //
// The shortest distance to point 1 is distance[1]=1 //
// The shortest distance to point 2 is distance[2]=3 //
// The shortest distance to point 3 is distance[3]=5 //
// The shortest distance to point 4 is distance[4]=3 //
// The shortest distance to point 5 is distance[5]=4 //
// The shortest distance to point 6 is distance[6]=6 //
// The shortest distance to point 7 is distance[7]=8 //

// The previous point for each point on the shortest path //
```

```
root_point[0]=0
root_point[1]=0
root_point[2]=0
root_point[3]=2
root_point[4]=1
root_point[5]=4
root_point[6]=2
root_point[7]=6

// The shortest path //
7 <== 6 <== 2 <== 0
```

10.3 マルコフ連鎖

ここでは, 自然科学, 社会科学, 工学等, 様々な場面で用いられる「マルコフ連鎖」のグラフを用いた表現法について学ぶ.

1 次元酔歩 : 酔っ払いが各時刻で右左にそれぞれ確率 1/3, 1/2 で動き, 確率 1/6 で現在の位置に留まる. また, E_1, E_6 に到達するとその場を離れないとする (図 223 参照). この場合の酔っ払いの位

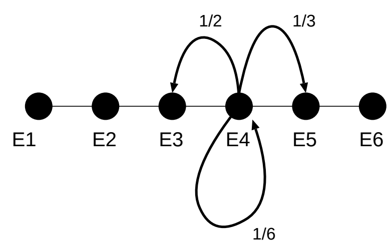

図 223: 1 次元酔歩の一例.

置 $E_1, \cdots, E_6$ に滞在する確率をを時間の関数として調べる.

酔っ払いの最初の位置を E_4, すなわち, $\boldsymbol{x} = (0,0,0,1,0,0)$ で酔っ払いの動きを指定する. ここで, ベクトル $\boldsymbol{x}$ の各成分 i は, 位置 E_i に酔っ払いがいる確率を表す. 従って, 1,2 分後にはそれぞれこの**状態ベクトル**は

$$\boldsymbol{x}_1 = \left(0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{3},0\right), \quad \boldsymbol{x}_2 = \left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{13}{36},\frac{1}{9},\frac{1}{9}\right)$$

となる.

このような**状態ベクトル**を算出するために, **遷移行列 (transition matrix)** : $\boldsymbol{P} = (P_{ij})$ を導入すると便利である. この行列の ij 成分 P_{ij} は**遷移確率 (transition probability)** と呼ばれ, ある

時刻から 1 分後に, 酔っ払いが E_i から E_j に移動する確率を表す. 従って, 上の酔っ払いの例では

$$\boldsymbol{P} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる.

ここで, 酔っ払いのスタート地点での状態ベクトルを $\boldsymbol{x}_0 = (p_0^1, p_0^2, p_0^3, p_0^4, p_0^5, p_0^6)$ とし, それから 1 分後の状態ベクトルを $\boldsymbol{x}_1 = (p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_1^4, p_1^5, p_1^6)$ と定めると

$$\boldsymbol{x}_1 \;=\; \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{P} \tag{381}$$

なる関係が成り立つ. 具体的に成分で書き下すと

$$(p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_1^4, p_1^5, p_1^6) = (p_0^1, p_0^2, p_0^3, p_0^4, p_0^5, p_0^6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(p_0^1 + \frac{p_0^2}{2}, \frac{p_0^2}{6} + \frac{p_0^3}{2}, \frac{p_0^2}{3} + \frac{p_0^3}{6} + \frac{p_0^4}{2}, \frac{p_0^3}{3} + \frac{p_0^4}{6} + \frac{p_0^5}{2}, \frac{p_0^4}{3} + \frac{p_0^5}{6} + \frac{p_0^6}{2}, \frac{p_0^5}{6} + p_0^6 \right) \tag{382}$$

となる. ここで, 例えば

$$p_1^1 \;=\; p_0^1 + \frac{1}{2} p_0^2 \tag{383}$$

は $t=0$ に E_1 にいた場合, 確率 1 で E_1 にとどまり, E_2 にいた場合, 確率 1/2 で E_1 に移ることを意味している.

例題 10.6 (2003 年度 レポート課題 #10 **問題 4**)

$\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ が遷移行列ならば, $\boldsymbol{PQ}$ も遷移行列であることを例を挙げて示せ. また, $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ の関連有効グラフと $\boldsymbol{PQ}$ の間の関係を例を挙げて説明せよ.

(解答例)

まず, 図 224 のような状態遷移グラフの遷移行列 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{384}$$

となる. 一方, 図 225 に与えた状態遷移グラフに関する遷移行列 $\boldsymbol{Q}$ は

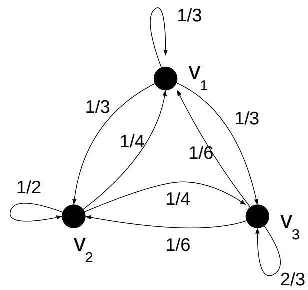

図 224: 遷移行列 $\mathbf{P}$ で与えられる有向グラフ.

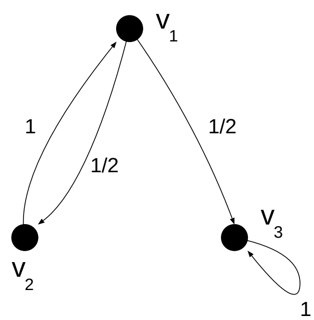

図 225: 遷移行列 $\mathbf{Q}$ で与えられる有向グラフ.

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{385}$$

となる.

例えば, 時刻 $t=0$ で v_1, v_2, v_3 に「粒子」が居る確率を $p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0)$ とし, これを状態ベクトルとして $\vec{p}(0) = (p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0))$ と書くことにすると, 次の時刻 $t=1$ での状態ベクトル $\vec{p}(1)$ は

$$(p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1)) = (p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0)) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{3}p_{v_1}(0) + \frac{1}{4}p_{v_2}(0) + \frac{1}{6}p_{v_3}(0), \frac{1}{3}p_{v_1}(0) + \frac{1}{2}p_{v_2}(0) + \frac{1}{6}p_{v_3}(0), \frac{1}{3}p_{v_1}(0) + \frac{1}{4}p_{v_2}(0) + \frac{2}{3}p_{v_3}(0)\right)$$

となり, $t=0$ に粒子が v_1 に居たとすれば $p_{v_1}(0)=1, p_{v_2}(0)=p_{v_3}(0)=0$ であり, このとき, 1 秒後にそれぞれの点に粒子が移る確率 (存在確率) は

$$(p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1)) = (1,0,0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \tag{386}$$

となる (図 224 参照).

ここで, 注意すべきなのは, 遷移行列においては各行の和は 1 になっていなければならないことである. これは各点から 1 秒後には必ず (現在居る点も含めた) 「どこか」に移動しなければならないからである. さて, 行列の積 $\boldsymbol{PQ}$ を計算してみると

$$\boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \tag{387}$$

となっており, 確かにこの行列 $\boldsymbol{PQ}$ の各行の和は 1 になっている. 従って, $\boldsymbol{PQ}$ は遷移行列である. この行列 $\boldsymbol{PQ}$ で表される状態遷移グラフを描くと図 226 のようになっている. $t=0$ から $t=1$ へ

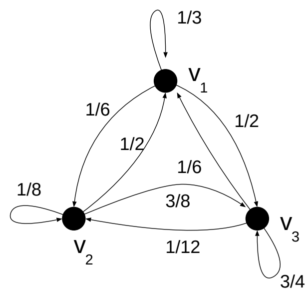

図 226: 遷移行列 $\mathbf{PQ}$ で与えられる有向グラフ.

の 1 ステップで状態ベクトルは

$$\begin{aligned} (p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1)) &= (p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0)) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{p_{v_1}(0)}{3} + \frac{p_{v_2}(0)}{2} + \frac{p_{v_3}(0)}{6}, \frac{p_{v_1}(0)}{6} + \frac{p_{v_2}(0)}{8} + \frac{p_{v_3}(0)}{12}, \frac{p_{v_1}(0)}{2} + \frac{3p_{v_2}(0)}{8} + \frac{3p_{v_3}(0)}{4} \right) \end{aligned} \tag{388}$$

となる.

例題 10.7 (2004 年度 $\boxed{\textbf{問題 11}}$)

1. 有向グラフ D の各点が整数の対 : $\{11, 12, 21, 22\}$ で表され, $j = k$ のとき, 点 ij と kl が弧で結ばれるものとする. このとき, D を図示し, そのオイラー小道が存在するならばそれを求めよ.

2. マルコフ連鎖と有向グラフに関して以下の問いに答えよ.

(1) その遷移行列 $\boldsymbol{P}$ が

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

で与えられる 3 状態 (a,b,c と名付ける) の状態遷移を表す有向グラフを描け. ただし, 行列の行の増える方向に a,b,c と点に名前を付けること.

(2) 時刻 $t = 0$ で, この酔っ払いが a にいる, つまり, 状態ベクトルが $\boldsymbol{x} = (1, 0, 0)$ とするとき, $t = 1, 2$ において, この酔っ払いが a,b,c に居る確率 $(p_{\mathsf{a}}(1), p_{\mathsf{b}}(1), p_{\mathsf{c}}(1))$, 及び, $(p_{\mathsf{a}}(2), p_{\mathsf{b}}(2), p_{\mathsf{c}}(2))$ をそれぞれ求めよ.

(3) $t = n$ で, この酔っ払いが a,b,c に居る確率 $p_{\mathsf{a}}(n), p_{\mathsf{b}}(n), p_{\mathsf{c}}(n)$ をそれぞれ求めよ.

(解答例)

1. $\{11, 12, 21, 22\}$ において, $j = k$ が成り立つときのみ, 点 ij と kl が弧で結ばれることを考えると, 各点から他点へ描くことのできる弧は次のようになる.

$$11 \rightarrow 12, \quad 12 \rightarrow \begin{cases} 21 \\ 22 \end{cases}$$

$$21 \rightarrow \begin{cases} 11 \\ 12 \end{cases}, \quad 22 \rightarrow 21$$

のようになり, これらの関係をグラフで表すと図 227 のようになる. この図 227 から, このグ

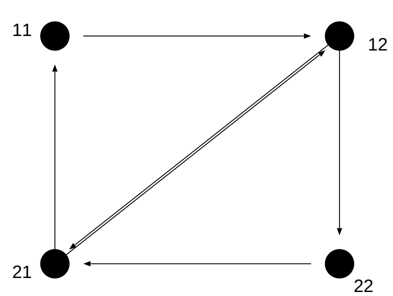

図 227: $\{11, 12, 21, 22\}$ において,「$j = k$ が成り立つときのみ, 点 ij と kl が弧で結ばれる」規則で出来上がる有向グラフ.

ラフは連結有向グラフ (これを D と名付けよう) であり, この連結有向グラフ D がオイラー・

グラフであるための必要十分条件は, D の各点で入次数と出次数が等しい, つまり, D の任意の点 v において, $\mathrm{outdeg}(v) = \mathrm{indeg}(v)$ が成り立つことであるから (前回の**定理 23.1** を参照のこと), 図のグラフにおいてこれを調べると

$$\begin{aligned}\mathrm{outdeg}(11) &= 1 = \mathrm{indeg}(11)\\ \mathrm{outdeg}(12) &= 2 = \mathrm{indeg}(12)\\ \mathrm{outdeg}(21) &= 2 = \mathrm{indeg}(21)\\ \mathrm{outdeg}(22) &= 1 = \mathrm{indeg}(22)\end{aligned}$$

となり, 確かにこの条件を満たしている. 従って, オイラー小道が存在し, それは, $11 \to 12 \to 21 \to 12 \to 22 \to 21 \to 11$ である.

2. 問題文に与えられた誘導に従う.

(1) 遷移確率が問題文の $\boldsymbol{P}$ で与えられるグラフを描くと図 228 のようになる. ただし, 各弧に付された数字は各状態間の遷移確率を表す.

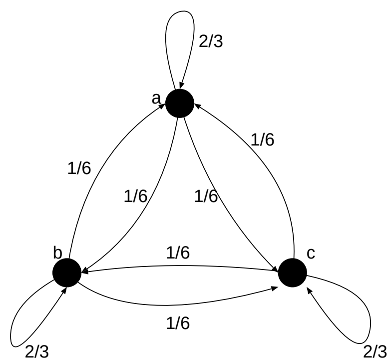

図 228: 遷移確率が $\mathbf{P}$ で与えられる 3 状態 a, b, c 間遷移の様子を表すグラフ.

(2)(3) 時刻 $t = n, n+1$ における状態ベクトル： $\boldsymbol{x}^n \equiv (p_{\mathsf{a}}(n), p_{\mathsf{b}}(n), p_{\mathsf{c}}(n)), \boldsymbol{x}^{n+1} \equiv (p_{\mathsf{a}}(n+1), p_{\mathsf{b}}(n+1), p_{\mathsf{c}}(n+1))$ 間には遷移確率 $\boldsymbol{P}$ を介して

$$\boldsymbol{x}^{n+1} = \boldsymbol{x}^n \boldsymbol{P} \tag{389}$$

なる関係, すなわち,

$$(p_{\mathsf{a}}(n+1), p_{\mathsf{b}}(n+1), p_{\mathsf{c}}(n+1)) = (p_{\mathsf{a}}(n), p_{\mathsf{b}}(n), p_{\mathsf{c}}(n)) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{390}$$

従って

$$p_{\mathsf{a}}(n+1) = \frac{2}{3}\,p_{\mathsf{a}}(n) + \frac{1}{6}\,p_{\mathsf{b}}(n) + \frac{1}{6}\,p_{\mathsf{c}}(n) \tag{391}$$

$$p_{\mathsf{b}}(n+1) = \frac{1}{6}\,p_{\mathsf{a}}(n) + \frac{2}{3}\,p_{\mathsf{b}}(n) + \frac{1}{6}\,p_{\mathsf{c}}(n) \tag{392}$$

$$p_{\mathsf{c}}(n+1) = \frac{1}{6}\,p_{\mathsf{a}}(n) + \frac{1}{6}\,p_{\mathsf{b}}(n) + \frac{2}{3}\,p_{\mathsf{c}}(n) \tag{393}$$

が成り立つ．後は，これらの確率に関する連立漸化式を解けばよい．どのような解き方でも良いのだが，各時刻 n での確率の規格化条件：$p_{\mathsf{a}}(n)+p_{\mathsf{b}}(n)+p_{\mathsf{c}}(n)=1$ (各時刻で酔っ払いは a, b, c のいずれかには必ず居る) から，$p_{\mathsf{c}}(n)=1-p_{\mathsf{a}}(n)-p_{\mathsf{b}}(n)$ を用いて，連立漸化式を書き直すと

$$p_{\mathsf{a}}(n+1) = \frac{1}{2}\,p_{\mathsf{a}}(n)+\frac{1}{6} \tag{394}$$

$$p_{\mathsf{b}}(n+1) = \frac{1}{2}\,p_{\mathsf{b}}(n)+\frac{1}{6} \tag{395}$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} p_{\mathsf{a}}(n) \\ p_{\mathsf{b}}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} p_{\mathsf{a}}(0) \\ p_{\mathsf{b}}(0) \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{k} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \tag{396}$$

となる．よって，例えば $p_{\mathsf{a}}(n)$ の一般項は

$$p_{\mathsf{a}}(n) = \frac{1}{2^n}\,p_{\mathsf{a}}(0)+\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}\,p_{\mathsf{a}}(0)+\frac{1}{6}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\,p_{\mathsf{a}}(0)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \tag{397}$$

となる．従って，当然，$p_{\mathsf{b}}(n)$ も

$$p_{\mathsf{b}}(n) = \frac{1}{2^n}\,p_{\mathsf{b}}(0)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \tag{398}$$

であり，このとき $p_{\mathsf{c}}(n)$ は

$$p_{\mathsf{c}}(n) = 1-\frac{1}{2^n}\left(p_{\mathsf{a}}(n)+p_{\mathsf{b}}(n)\right)-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \tag{399}$$

となる．

従って，あとは「この酔っ払いは時刻 $t=0$ で b に居た」という初期条件：$p_{\mathsf{a}}(0)=0, p_{\mathsf{b}}(0)=1, p_{\mathsf{c}}(0)=0$ を上に得られた一般項に代入して

$$p_{\mathsf{a}}(n) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \tag{400}$$

$$p_{\mathsf{b}}(n) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \tag{401}$$

$$p_{\mathsf{c}}(n) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \tag{402}$$

が得られる．

例題 10.8 (2005 年度 **演習問題 12**)

円卓のまわりの 5 人 (A, B, C, D, C さんと名づけ，この順に時計まわりに着席しているとする) が 1 つのサイコロで行うゲームを考える．各ラウンドでサイコロの 1, 2 の目が出たときには，その左隣りの人が次に振るものとし，3, 4, 5 が出たときには右隣りの人が次に振るものとし，6 の目が出たときに限り，同じ人がもう一度サイコロを振るものとする．このとき

(1) 遷移行列を書き，状態遷移図を描け．
(2) このマルコフ連鎖はエルゴード的か否か，理由を付して答えよ．
(3) 始めに A さんがサイコロを振るとき，5 ラウンド目に再び A さんがサイコロを振ることになる確率を求めよ．

(解答例)

(1) 遷移行列 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \tag{403}$$

であり, 対応する状態遷移のグラフ表現は図 229 である.

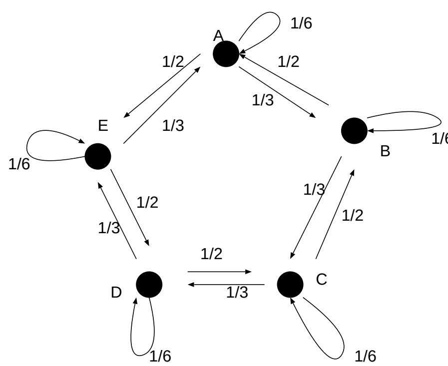

図 229: 遷移行列 $\mathbf{P}$ に対応する有向グラフ.

(2) $\boldsymbol{P}^2$ を計算してみると

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} \end{pmatrix} \tag{404}$$

となるが, これは全ての行列要素が正の値であるような行列であり, 従って, 任意の $n(n \geq 2)$ に対しても, $\boldsymbol{P}^n$ の行列要素は全て正の値を持つ.　従って, $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n$ の行列要素も全て正であるので, 任意の状態から任意の状態へ移動することが可能である. 従って, 各状態は永続的 (i から j への道があれば,j から i への道がある) かつ非周期的 ($p_{ii} \neq 0$) であるので, このマルコフ連鎖はエルゴード的である.

(3) $\boldsymbol{P}^5$ を計算すると

$$\boldsymbol{P}^5 = \begin{pmatrix} \frac{1476}{7776} & \frac{1495}{7776} & \frac{1600}{7776} & \frac{1490}{7776} & \frac{1715}{7776} \\ \frac{1715}{7776} & \frac{1476}{7776} & \frac{1495}{7776} & \frac{1600}{7776} & \frac{1490}{7776} \\ \frac{1490}{7776} & \frac{1715}{7776} & \frac{1476}{7776} & \frac{1495}{7776} & \frac{1600}{7776} \\ \frac{1600}{7776} & \frac{1490}{7776} & \frac{1715}{7776} & \frac{1476}{7776} & \frac{1495}{7776} \\ \frac{1495}{7776} & \frac{1600}{7776} & \frac{1490}{7776} & \frac{1715}{7776} & \frac{1476}{7776} \end{pmatrix} \tag{405}$$

であるので, 状態ベクトルを $\boldsymbol{x}(t) = (p_A(t), p_B(t), p_C(t), p_D(t), p_E(t))$ とすると, はじめに A にいたので, $\boldsymbol{x}(0) = (1,0,0,0,0)$ に対して

$$\boldsymbol{x}(5) = \boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{P}^5 = \left(\frac{1476}{7776}, \frac{1495}{7776}, \frac{1600}{7776}, \frac{1490}{7776}, \frac{1715}{7776}\right) \tag{406}$$

となるから, $t=5$ に A さんが再びサイコロを振る確率は 1476/7776 である.

例題 10.9 (2006 年度 $\boxed{\textbf{演習問題 12}}$)

バー $E_1, E_2, \cdots, E_6$ が 1 次元上に左から右へとこの順に並んでいるものとする. このとき, E_2 から毎時間バーをはしごする酔っ払いが左のバーに立ち寄る確率を 1/2, 右のバーに立ち寄る確率を 1/3 とする. また同じ店にとどまる確率を 1/6 とする. また, バー E_1 は会員制の気取った店で非会員の酔っ払いは来た時点で追っ払われて店に入れないものとする. このとき, このマルコフ連鎖を有向グラフで表せ. また, 6 時間後に酔っ払いが各バーに居る確率 $p_1, p_2, \cdots, p_6$ を求めよ.

(解答例)

バー E_1 には入れないので, E_1 から E_2 へは確率 1 で遷移し, E_6 が吸収壁であることに注意すると, この酔っ払いの動きを表す有向グラフは図 230 のようになる. また, この酔っ払いの時刻 n での状

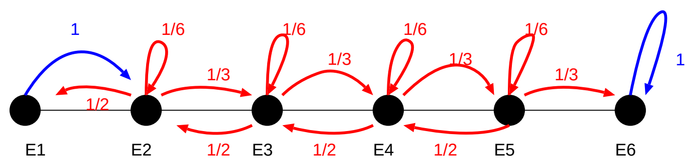

図 230: バー E_1 では追っ払われ, バー E_6 には入ったきり帰れない酔っ払いの動きを表す有向グラフ.

態ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(n)} = (p_1(n), p_2(n), p_3(n), p_4(n), p_5(n), p_6(n))$ とすると, n 時間後に各バーにどれくらいの確率で居ることになるのかは遷移行列 $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{407}$$

に対して

$$\boldsymbol{x}^n = \boldsymbol{x}^0 \boldsymbol{A}^n \tag{408}$$

で与えられるので, $n=6, \boldsymbol{x}^0 = (0,1,0,0,0,0,0)$ に注意して上式を計算すればよい. 手で計算するのはとても面倒なので, ここでは次のプログラムを用いて計算機に計算させることにする.

```
/*********************************************************/
/*   Calculation of time evolution of probability for      */
/*    1-dimensional random walk                             */
/*                                     J. Inoue             */
/*********************************************************/
#include<stdio.h>
#define tmax 10
main(){
  FILE *pt;
  double a[6][6],b[6][6];
  int i,j,k,t;
  for(i=0; i<=5; i++){
    for(j=0; j<=5; j++){
      b[i][j]=0;
    }}
   /* Definition of transition matrix A (definition of digraph) */
  a[0][0] = 0;
  a[0][1] = 1.0;
  a[0][2] = 0;
  a[0][3] = 0;
  a[0][4] = 0;
  a[0][5] = 0;

  a[1][0] = 1.0/2;
  a[1][1] = 1.0/6;
  a[1][2] = 1.0/3;
  a[1][3] = 0;
  a[1][4] = 0;
  a[1][5] = 0;

  a[2][0] = 0;
  a[2][1] = 1.0/2;
  a[2][2] = 1.0/6;
  a[2][3] = 1.0/3;
  a[2][4] = 0;
  a[2][5] = 0;

  a[3][0] = 0;
  a[3][1] = 0;
  a[3][2] = 1.0/2;
  a[3][3] = 1.0/6;
  a[3][4] = 1.0/3;
  a[3][5] = 0;
```

```
  a[4][0] = 0;
  a[4][1] = 0;
  a[4][2] = 0;
  a[4][3] = 1.0/2;
  a[4][4] = 1.0/6;
  a[4][5] = 1.0/3;

  a[5][0] = 0;
  a[5][1] = 0;
  a[5][2] = 0;
  a[5][3] = 0;
  a[5][4] = 0;
  a[5][5] = 1.0;

  /* Calculation of A^{t} */
 if((pt=fopen("matprod.txt","wt")) !=NULL){
 for(i=0; i<=5; i++){
    for(j=0; j<=5;j++){
      if((i==0) && (j==0)){fprintf(pt,"Time Step=%d\n\n",1);}
      if(j!=5){
fprintf(pt,"A(%d)(%d,%d)=%lf ",t,i+1,j+1,a[i][j]);
      }else{
fprintf(pt,"A(%d)(%d,%d)=%lf\n",t,i+1,j+1,a[i][j]);}
    }}
    for(i=0; i<=5; i++){
      fprintf(pt,"\n t=%d p(%i)=%lf",1,i+1,a[1][i]);
      //fprintf(pt,"%d %lf ",1, a[1][i]);
    }

    fprintf(pt,"\n %c", '\n');
  for(t=1;t<=tmax;t++){
  for(i=0; i<=5; i++){
    for(j=0; j<=5;j++){
  for(k=0; k<=5; k++){
    b[i][j] = b[i][j] + a[i][k]*a[k][j];
  }
    }
  }
  for(i=0; i<=5; i++){
    for(j=0; j<=5;j++){
         if((i==0) && (j==0)){fprintf(pt,"Time Step=%d\n\n",t+1);}
      if(j!=5){
```

```
       fprintf(pt,"A(%d)(%d,%d)=%lf ",t+1,i+1,j+1,b[i][j]);
      }else{
fprintf(pt,"A(%d)(%d,%d)=%lf\n",t+1,i+1,j+1,b[i][j]);}
}}
    for(i=0; i<=5; i++){
      fprintf(pt,"\n t=%d p(%i)=%lf ",t+1,i+1,b[1][i]);
      //fprintf(pt,"%d %lf ",t+1,b[1][i]);
    }
    fprintf(pt,"\n %c", '\n');
    for(i=0; i<=5; i++){
      for(j=0; j<=5; j++){
a[i][j]=b[i][j];
      }
    }
 for(i=0; i<=5; i++){
    for(j=0; j<=5; j++){
      b[i][j]=0;
    }}
  }
 }
    fclose(pt);
}
```

結果をグラフにしてプロットしてみると次のようになる. この図 231 より, 吸収壁である 6 番目の

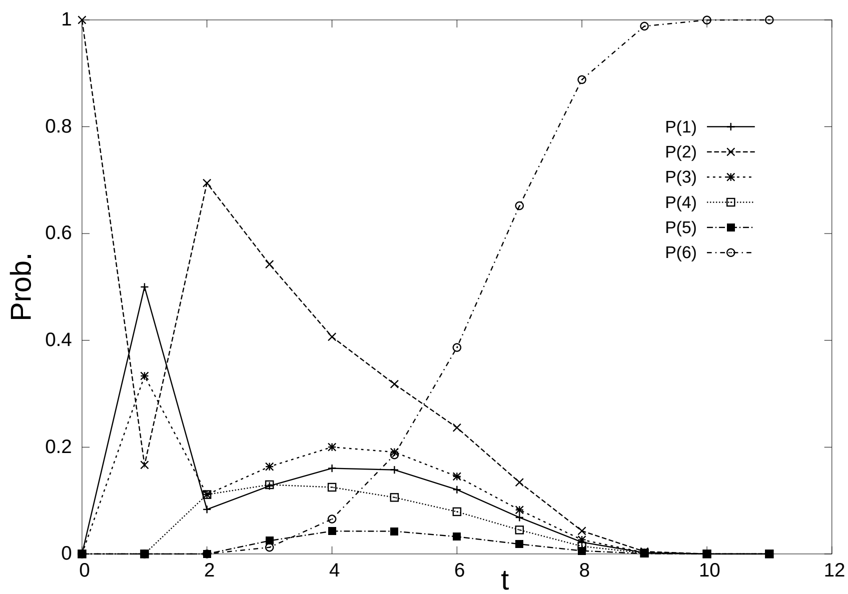

図 231: 酔っ払いが各バーに居る確率の時間変化.

バー以外の各バーの滞在確率は時間とともに減少し, ゼロへと向かい, その分の確率がバー 6 に流

れて行き, 11 時間後には酔っ払いは確率 1 で 6 番目のバーに居ることになる.

※ **注：** 1 時間後に $P(1)$ がゼロでないのは不思議に思われるかもしれないが, 例えば 1 時間後には確率 1/2 でバー E_2 から E_1 へ向かうことになり, この意味でバー E_1 の前には「居る」ことになる. しかし, 「E_1 に滞在する」というのは「次のステップでも同じバー E_1 に留まる」ことを意味し, ここではそれが許されていない. つまり, 条件つき確率 $P(X^{t+1}=E_1|X^t=E_1)=0$ であり, これは遷移行列の $(1,1)$ 成分がゼロであることに反映しているわけである.

演習問題 12

G は点数 n, 辺数 m の単純グラフであるものとする. このとき, 彩色多項式: $P_{\mathrm{G}}(k)$ の

(i) 主要項は k^n である.
(ii) k^{n-1} の係数は $-m$ である.
(iii) 各係数の符号は正負が交互に表れる.

をそれぞれ辺数 m に関する数学的帰納法によりそれぞれ証明せよ.

※ **注** : 今回のレポートは**期末試験 (学内掲示板で日程等を必ず確認すること) の開始直前に回収します.** それ以前に提出したい方は情報科学研究科棟 8-13 のポストへどうぞ.