グラフ理論 講義ノート #13

井上 純一
北海道大学 大学院情報科学研究科
URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j _inoue/

平成 19 年 9 月 3 日 (Web 配布のみ)

目 次

演習問題 12 の解答例

(解答例)
分解公式を用いた彩色多項式計算の簡単な復習.

一般的な場合について証明を始める前に, 特殊な具体的グラフを例にとり, 問題に与えられた彩色多項式に関する 3 つの性質が事実がどうかを確認してみることにしょう. 簡単のため, 具体的に点数 4 の完全グラフ K_4 を例にとる. このとき, 彩色多項式は次のように書ける.

$$P_{K_4}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3) = k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k \qquad (409)$$

従って, (i) の最大冪を持つ主要項は k^4 であり, 確かに k^n である. (ii) の k^{n-1} の係数は -6 であるが, 完全グラフの辺数 m が $m = n(n-1)/2$ で与えられたことを思い出すと, $n = 4$ である今の場合, $m = 4 \times 3/2 = 6$ であるから, 確かに k^{n-1} の係数は $-m$ となっている. また, 各項の符号も正負が交互に現れており, (iii) が成り立っている. 従って, 彩色多項式に関する 3 つの性質のいずれもが, K_4 という特殊なグラフに対して成り立つことがわかった. よって, 以下ではこの事実を一般のグラフに対して示そう. この際, 例によって公式:

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k) \qquad (410)$$

を用いる. ただし, ここでは辺数 m についての帰納法を行うため, 辺数 m, 点数 n のグラフ G に対する彩色多項式を $P_G^{(m,n)}(k)$ のように書くことにしよう. このとき, グラフ $G-e$ の辺数は $m-1$, 点数が n, グラフ G/e の辺数 $m-1$, 点数 $n-1$ であるから, この定義のもとで分解公式は

$$P_G^{(m,n)}(k) = P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) - P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) \tag{411}$$

と書ける. 以下でこの公式 (411) を用いて証明を試みる.

(i) $m=1$ のとき, グラフ G は任意の 2 点が 1 本の辺で結ばれており, 残り $n-2$ 点は孤立点であるべきなので, この場合の彩色多項式は係数も含めて陽に求めることができて

$$P_G^{(1,n)}(k) = k(k-1)\times k^{n-2} = k^n - k^{n-1} \tag{412}$$

となる. 従って, 明らかに題意を満たしていることがわかる. 次に辺数 $m-1$ の場合に題意の成立を仮定しよう. つまり, 彩色多項式で書けば

$$P_{G'}^{(m-1,n)}(k) = k^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k^{n-i} \tag{413}$$

を辺数 m, 点数 n の任意のグラフ G' に対して仮定する. 上の式で主要項が k^n となっていることに注意されたい. このとき, グラフ G から任意の辺 e を削除したグラフ $G-e$ の彩色多項式は, グラフ $G-e$ が辺数 $m-1$, 点数 n であることから, 上のグラフ G' のカテゴリーに入ることを考えて

$$P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) = k^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k^{n-i} \tag{414}$$

となる. 一方, G の辺 e を縮約することにより出来上がるグラフ G/e に関する彩色多項式は, 縮約操作によって点数が $n-1$ になっていることに注意して

$$P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) = k^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} \beta_i k^{n-i} \tag{415}$$

である. 従って, 分解公式 (411) から, 辺数 m, 点数 n のグラフ G の彩色多項式は

$$P_G^{(m,n)}(k) = k^n - (1-\alpha_1)k^{n-1} + (k^{n-2}\ \text{以下の項}) \tag{416}$$

となる. 従って, 辺数 m の場合にも題意が成立する. 従って, 任意の自然数 m に対して題意が成立する.

(ii) $m=1$ のとき, 既に求めているように

$$P_G^{(1,n)}(k) = k^n - k^{n-1} \tag{417}$$

であるから題意の成立は明らかである (k^{n-1} の係数がここでの辺数にマイナス符号を付けたもの -1 になっている). そこで辺数 $m-1$ のときに題意の成立を仮定する. つまり, 辺数 $m-1$, 点数 n のグラフ G' に対して

$$P_G^{(m-1,n)}(k) = k^n - (m-1)k^{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k^{n-i} \tag{418}$$

としよう．ここで, k^{n-1} の係数がここでの辺数 $m-1$ にマイナス符号を付けたもの $-(m-1)$ になっていることに注意する．このとき (i) と同様の考察により

$$P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) = k^n - (m-1)k^{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k^{n-i} \tag{419}$$

$$P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) = k^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} \beta_i k^{n-i} \tag{420}$$

が得られる．従って, 分解公式 (411) を用いると辺数 m, 点数 n のグラフ G の彩色多項式は

$$\begin{aligned} P_G^{(m,n)}(k) &= k^n - (m-1)k^{n-1} - k^{n-1} + (k^{n-2} \text{ 以下の項}) \\ &= k^n - mk^{n-1} + (k^{n-2} \text{ 以下の項}) \end{aligned} \tag{421}$$

となり, 辺数 m の場合にも題意が成立する (k^n の係数が辺数 m にマイナス符号をつけたもの $-m$ となった)．従って, 任意の自然数 m に対して題意が成立する．

(iii) $m=1$ の場合には

$$P_G^{(1,n)}(k) = k^n - k^{n-1} \tag{422}$$

より題意は成立する．(この場合には 2 つの項のみであることに注意．しかし, いずれにしても, プラス符号とマイナス符号が交互に現れている.) そこで, 辺数 $m-1$ の場合に題意の成立を仮定する．つまり, 彩色多項式で書けば

$$P_{G'}^{(m-1,n)}(k) = k^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \alpha_i k^{n-i} \tag{423}$$

を辺数 m, 点数 n の任意のグラフ G' に対して仮定する．ただし, 項ごとの符号をファクタ: $(-1)^i$ で導入した関係で, 全てのインデックス i に対して $\alpha_i > 0$ であるとして以下の議論を進めなくてはならないことに注意しょう．また, このファクタ $(-1)^i$ より, 辺数 $m-1$ のとき交互にプラス・マイナスの符号が現れることに注意する．すると, (i)(ii) と同様の考察により

$$P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) = k^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \alpha_i k^{n-i} \tag{424}$$

$$P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) = k^{n-1} - \sum_{i=2}^{n} (-1)^i \beta_i k^{n-i} \tag{425}$$

が得られる．α_i と同様の理由で, 全ての i に対して $\beta_i > 0$ である．従って, 分解公式 (411) を用いると辺数 m, 点数 n のグラフ G の彩色多項式は

$$\begin{aligned} P_G^{(m,n)}(k) &= k^n - k^{n-1} + (-1)\alpha_1 k^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^i (\alpha_i + \beta_i) k^{n-i} \\ &= k^n - mk^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^i (\alpha_i + \beta_i) k^{n-i} \end{aligned} \tag{426}$$

となる．ここで (ii) で示された事実: $\alpha_1 = m-1$ を用いた．$\alpha_i + \beta_i > 0$ より, m のときの題意の成立 (プラス・マイナスの符号が交互に現れる) が示せたので, 任意の自然数 m に対して題意が成立する．

11　マッチング, 結婚, Menger の定理

最終回である今回の講義では, マッチング, ネットワークフローなど, 我々が日常で出くわす具体的な諸問題に取り組む際に特に重要となる概念・方法を学ぶ.

11.1　Hall の結婚定理

ここで扱う**結婚問題 (mariage problem)** とは次のような問題である.

結婚問題
女性の有限集合があり, 各女性は何人かの男性と知り合いであるとする. 全ての女性が知り合いの男性と結婚ができるようにカップルが組めるためにはどのような条件が必要であるか ?

ここではいきなり一般論から入るのではなく, 次の表で与えられる具体例をグラフを用いて考察することからはじめよう. この表では女性集合を $\{\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3, \mathrm{g}_4\}$, 男性集合を $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4, \mathrm{b}_5\}$ とする.

女性	女性と知り合いの男性
g_1	$\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_4, \mathrm{b}_5$
g_2	b_1
g_3	$\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4$
g_4	$\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_4$

これをグラフで描いたものが図 232 である. さて, 完全二部グラフ $G(V_1, V_2)$ における, 点 V_1 から

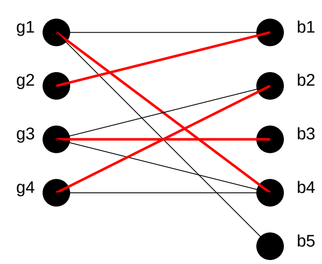


図 232: 女性とその知り合いの男性を表すグラフ.

点 V_2 への**完全マッチング**を「V_1 と V_2 の部分集合の間の一対一対応で, かつ, 対応する点は辺で結ばれているもの」であると定義すれば, 上にあげた結婚問題は次のように言い直すことができる.

結婚問題の「完全マッチング」を用いた言いかえ
$G = G(V_1, V_2)$ が二部グラフのとき, G において V_1 から V_2 への完全マッチングがあるのはどのようなときか ?

この問題の答えは次の定理によって与えられる.

Hall の定理
結婚問題に解があるための必要十分条件は, どの k 人の女性も合わせて k 人以上の男性と知り合いであることである.

(証明)

[**必要性**] : k 人の女性の誰かと知り合いの男性が合計 k 人未満であれば女性が余ってしまうので明らか.
[**十分性**] : 帰納法により証明する.
「女性が m 人未満であれば定理が成立する」と仮定する. このとき, $m=1$ であれば, $k=1$ 人の女性は 1 人の男性と知り合いなので, その男性と結婚すれば良い. 従って, 成立. m 人の女性がいる場合には次のような 2 つの場合に分けて考える.

(i) $k < m$ **なる, どの** k **人の女性をとっても, 合わせて** $k+1$ **人の男性と知り合いのとき**
女性 1 人を選び, 知り合いの任意の男性と結婚させれば, 残り $m-1$ 人 $(m-1 < m)$ の女性は合わせて $m-1$ 人の男性と知り合いである. 従って, 帰納法の仮定から証明終わり.
(ii) $k(< m)$ **人の女性が合わせてちょうど** k **人の男性と知り合いのとき**
帰納法により, k 人の女性は結婚可能. 残りは $m-k$ 人である. $(m-k)$ 人の中のどの h 人 $(h \le m-k)$ も残りの h 人以上の男性と知り合いである ($(h+k)$ 人の女性は $(h+k)$ 人以上の男性と知り合いであるべきなので). 従って, $m-k$ 人の女性に対して条件成立.

以上により証明終わり.

11.2　横断理論

まず, 次のように定義しておこう.

E : 空でない有限集合.
$\mathrm{F} = (S_1, S_2, \cdots, S_m)$: E の空でない部分集合の族.
F **の横断** : 各集合 S_i から 1 つ選んだ E の相異なる m 個の元の集合.

(例)
$\mathrm{E} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $S_1 = S_2 = \{1,2\}, S_3 = S_4 = \{2,3\}, S_5 = \{1,4,5,6\}$ とする. このとき, 族 $\mathrm{F} = (S_1, S_2, \cdots, S_5)$ に横断は無い. 一方, $\mathrm{F}' = (S_1, S_2, S_3, S_5)$ には $\{1,2,3,4\}$ の横断 (部分横断) がある.

11.3　横断と結婚問題, 及び, Hall の定理との関係

男性の集合を $\mathrm{E} = \{\mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \mathsf{b}_3, \mathsf{b}_4, \mathsf{b}_5, \mathsf{b}_6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$ とする.
一方, 女性の集合を $\mathrm{F} = (\mathsf{g}_1, \mathsf{g}_2, \mathsf{g}_3, \mathsf{g}_4, \mathsf{g}_5) = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$ とし,

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{1,2\} \\
S_2 &= \{1,2\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \{2,3\} \\
S_4 &= \{2,3\} \\
S_5 &= \{1,4,5,6\}
\end{aligned}
$$

とすれば (図 233 も合わせて参照), **与えられた集合族** F **が横断を持つための必要十分条件が** Hall **の定理である**.

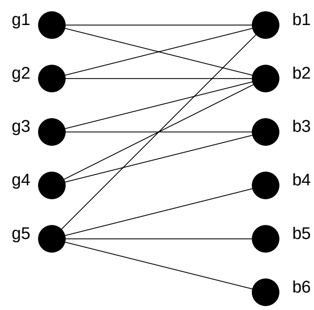


図 233: ここで横断と Hall の定理の関係を考える, 女性とその知り合いの男性を表すグラフ.

11.4 Hall の定理の応用例：ラテン方陣

ラテン長方形

$m \times n$ $(m \leq n)$ ラテン長方形：次の性質を持つ $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{M}$

(i) 任意の行列要素は $1 \leq m_{ij} \leq n$ を満たす.

(ii) どの行, 及び, どの列にも同じ要素はない.

(例)

$$
\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{427}
$$

はラテン長方形である.

$m = n$ であるようなラテン長方形を**ラテン方陣**と呼ぶが, ラテン長方形からラテン方陣への拡大可能性は次の定理で与えられる.

定理 27.1

$\boldsymbol{M}$ は $m < n$ からなる $m \times n$ ラテン長方形であるとする. このとき, $\boldsymbol{M}$ に $n - m$ 本の新しい行を付け加えてラテン方陣に拡張することができる.

(具体的な作り方)

$E = \{1,2,3,4,5\}$ を与えられたラテン長方形 $\boldsymbol{M}$ の行要素の集合であるとする. $\mathrm{F} = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$ とし, $\boldsymbol{M}$ の第 i 列に現れない E の要素の集合が S_i であるする. (427) 式で与えられたラテン長方

形を例にとれば $S_1, S_2, \cdots,$ は

$$\begin{aligned} S_1 &= \{4,5\} \\ S_2 &= \{1,3\} \\ S_3 &= \{4,5\} \\ S_4 &= \{2,3\} \\ S_5 &= \{1,2\} \end{aligned}$$

となり, F から横断を見つけて $(4,3,5,2,1),(5,1,4,3,2)$ が得られるので, これをラテン長方形に付け加えて

$$\boldsymbol{M} = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{array}\right] \tag{428}$$

となる (付け加えた部分は**太字**で表されている).

11.5 Menger の定理

まずは各種定義から

辺素な道 (edge-disjoint path) : 共通な辺を持たない v から w への道.
点素な道 (vertex-disjoint path) : 共通な点を持たない v から w への道.
vw-**非連結化集合** : グラフ G の辺集合 E で, v から w への任意の道は必ず E の辺を含むもの.
(例) : 図 234 において $\mathrm{E}_1 = \{\mathsf{ps}, \mathsf{qs}, \mathsf{ty}, \mathsf{tz}\}$, $\mathrm{E}_2 = \{\mathsf{uw}, \mathsf{xw}, \mathsf{yw}, \mathsf{zw}\}$.
vw-**分離集合** : G の点の集合 V で, v から w への任意の道は必ず V の点を通るという性質を持つ V.
(例) : 図 234 において $\mathrm{V}_1 = \{\mathsf{s}, \mathsf{t}\}, \mathrm{V}_2 = \{\mathsf{p}, \mathsf{q}, \mathsf{y}, \mathsf{z}\}$.

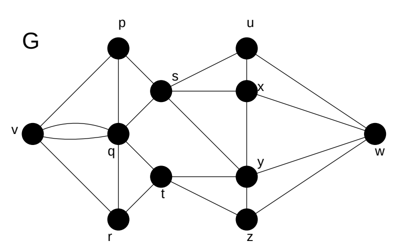


図 234: 点素な道が 2 本あるグラフ G. (それらの道は v → p → u → w, 及び, v → r → t → y → w)

「v から w への辺素な道の本数は何本か ?」という問いに対する答え ⇒ **Menger の定理 I**

Menger の定理 I
連結グラフ G の異なる 2 点 v と w を結ぶ辺素な道数の最大値は, vw-非連結化集合の辺数の最小値に等しい.

「v から w への点素な道の本数は何本か ?」という問いに対する答え ⇒ **Menger の定理 II**

Menger の定理 II
連結グラフ G の隣接していない 2 点 v と w を結ぶ点素な道数の最大値は, vw-分離集合の辺数の最小値に等しい.

(例)
図 235 のグラフ G に対して, vw-非連結化集合は $\mathrm{E}_1 = \{\mathsf{vp}, \mathsf{vq}\}, \mathrm{E}_2 = \{\mathsf{pr}, \mathsf{qr}, \mathsf{qs}\}, \mathrm{E}_3 = \{\mathsf{rw}, \mathsf{sw}\}$ であるから, 辺素な道数の最小値は 2 である. 一方, vw-分離集合は $\mathrm{V}_1 = \{\mathsf{p}, \mathsf{q}\}, \mathrm{V}_2 = \{\mathsf{r}, \mathsf{q}\}, \mathrm{V}_3 = \{\mathsf{r}, \mathsf{s}\}$ であるから, 点素な道数の最大値は 2 である.

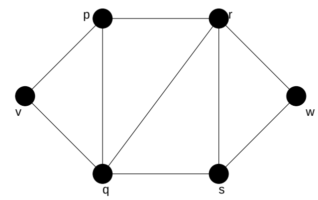


図 235: Menger の定理を確認する例として用いるグラフ G.

12 ネットワークフロー

図 236 のような有向グラフを考える. 点 v は「会社」であり, 点 w は「販売店」とする. 各辺に記された数字は, そのルート (弧) を通過できる荷物の最大量 (例えば「箱の個数」と言い換えても良い) であるとする. このとき, 我々の問題は

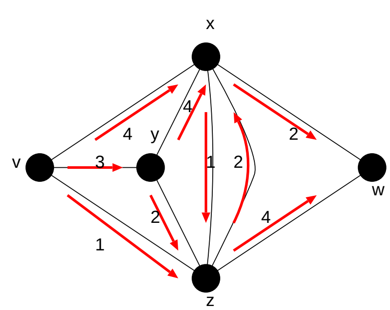


図 236: ここで考える有向グラフ. v は「会社」で w が「販売店」を表すものとする. 各弧に記された数字は「容量」である.

問題
各ルートの許容量を超えないようにして会社から販売店に送ることのできる箱の個数はいくつか ?

この問題に答える前にいくつかの定義をしておこう.

ネットワーク N : 重みつき有向グラフ.
容量 $\Psi(a)$: 各弧 a に割り当てられた非負実数.

outdeg(x) : xz の形をした弧の容量の総和.
indeg(x) : zx の形をした弧の容量の総和[1].
従って, ネットワークの全点についての出次数の総和は入次数の総和に等しい.

フロー (flow)
各弧 a に対し非負実数 ϕ(a) を割り当てる関数 ϕ のことであり, 次の 2 つの条件を満たさなければならない.

(i) 各弧 a に対して $\phi(\mathrm{a}) \le \Psi(\mathrm{a})$.
(ii) v と w 以外の各点において, 出次数と入次数が等しい.

(例)
握手有向補題により, 図 237 において

(入口 v から出る弧のフローの総和) = (出口 w へ入る弧のフローの総和)
= フローの値 = 6 (図 237 の場合には最大フローになっている)

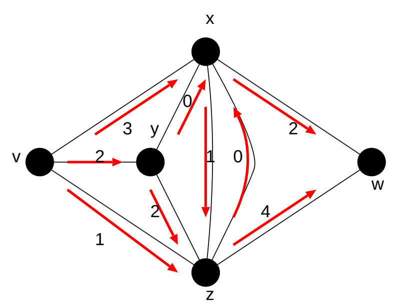


図 237: 図 236 の各弧に記された容量を超えないように, かつ, v, w を除く各点において入次数と出次数を等しくするように各弧に数字を振るとこうなる.

カット (cut) : 有向グラフ D の vw-非連結化集合.

カットの容量 : カットの弧の容量の総和.

図 236 のグラフにおいて, 最小カット (容量ができるだけ小さいカット) は {xw, xz, yz, vz}, {xw, zw} であり, その容量は 6 である.

[1] 以前, indeg, outdeg をそれぞれ入次数, 出次数として定義したが, ここでは辺に記された数字による「重み付き」の入次数, 出次数であることに注意されたい.

最大フロー最小カット定理
任意のネットワークにおいて, 最大フローの値は最小カットの容量に等しい.

証明略.
ここで例として扱った図 236, 図 237 に関しては, 上記の議論から, (最大フロー) = (最小カット) = 6 となっており, この定理が成り立っていることが確かめられる.

12.1 最大フローの逐次構成法

最後に最大フローを具体的に求めるためのアルゴリズムを一つ挙げておく.
ネットワークにおいて入口 v と出口 w を結ぶ道 p を考え, この道を点列：v, $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}, v_k$, w で特定する (図 238 参照). また, この道を辺で特定する際には辺の向きをも考慮し, $\mathbf{e}_i = (v_{i-1}, v_i)$

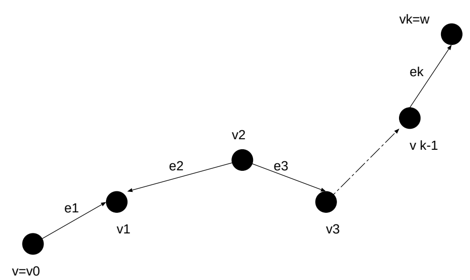


図 238: ネットワークにおける一つの道 p. この道において, $\mathbf{e}_1$ は「正順」であり, $\mathbf{e}_2$ は逆順である.

のとき, $\boldsymbol{e}_i$ は点 v_i, v_{i-1} をこの順に矢印で結ぶ. この場合を道 p において $\mathbf{e}_i$ は**正順**であるという. 一方, $\mathbf{e}_i = (v_i, v_{i-1})$ のときには $\boldsymbol{e}_i$ が点 v_{i-1}, v_i をこの順に矢印で結ぶことになるが, この場合を**逆順**と呼ぶ. 図 238 の例で言えば, $\mathbf{e}_1$ が正順, $\mathbf{e}_2$ が逆順ということになる.

さて, このとき各辺 $\mathbf{e}_i$ に対し, **余裕 (residual)** と呼ばれる量 (注目する辺に沿って着目する方向へまだ増やすことのできるフロー) を各辺の容量 $\Psi(\mathbf{e}_i)$, 及び, 現時点でのフロー $\phi(\mathbf{e}_i)$ を用いて次のように定義する.

$$g(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} \Psi(\mathbf{e}_i) - \phi(\mathbf{e}_i) & (\mathbf{e}_i \text{ が正順}) \\ \phi(\mathbf{e}_i) & (\mathbf{e}_i \text{ が逆順}) \end{cases} \tag{429}$$

次いでこの $g(\mathbf{e}_i)$ を用いて各道 p に対しての余裕 $g(p)$ を

$$g(p) = \min_{1 \le i \le k} g(\mathbf{e}_i) \tag{430}$$

で定義する. そこで各辺に対して規則：

$$\phi(\mathbf{e}_i) \leftarrow \phi(\mathbf{e}_i) + g(p) \quad (\mathbf{e}_i \text{ が正順}) \tag{431}$$

$$\phi(\mathbf{e}_i) \leftarrow \phi(\mathbf{e}_i) - g(p) \quad (\mathbf{e}_i \text{ が逆順}) \tag{432}$$

適用することにより, 現時点でのフロー ϕ を $g(p)$ だけ大きな新しいフローに変更することができる. つまり, $\mathbf{e}_i$ が正順であるのであれば, 辺 $\mathbf{e}_1$ の容量と現時点でのフローの道 p に関する最小値 $g(p)$ の分だけ各辺のフローを増加することができるし, 逆に, 辺 $\mathbf{e}_i$ が逆順であれば, 現在の向きのフローの最小値 $g(p)$ の分だけ, 各辺のフローの値から差し引くことにより, 所望の向きへのフロー

を増加させることができる.

以上をまとめると次のようになる.

最大フロー逐次構成アルゴリズム

1. 全ての辺 $\mathbf{e}$ に対して $\phi(\mathbf{e}) = 0$ と置く.
2. v から w への道 p で正の余裕 $g(p) > 0$ を持つものを探し, なければ終了. あれば次の 3. へ.
3. 規則 (431)(432) に従って現在のフロー ϕ を変更し, 2. へ

12.2 最大マッチングへの適用

ここで学んだ最大フローの逐次構成法を用いて, 前出の最大マッチングを求めることができる. ここではそれを簡単に述べておきたい. 図 239 のようなネットワークを考える. ここで求めるマッ

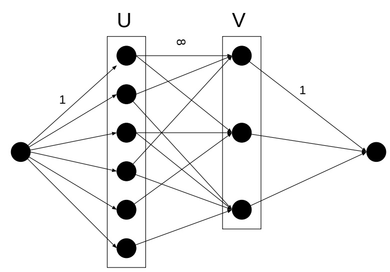


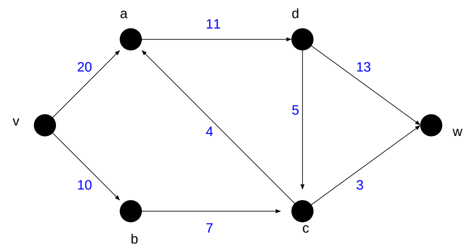
図 239: U と V の間の最大マッチングを求めるためのネットワーク.

チングは集合 U と V の間の最大マッチングである.

つまり, 入口 v と集合 U に属する点を結ぶ辺の全てに容量 1 を, マッチングをとるべき集合 U と集合 V を結ぶ全ての辺に容量 ∞ を, そして最後に集合 V と出口 w を結ぶ全ての辺に容量 1 を割り振り, このネットワークに対して逐次構成法を適用する. 最終的に得られるマッチングが最大であること, 及び, このネットワークで逐次構成法を用いることで所望の最大マッチングが得られる理由は各自が考えてみること.

例題 12.1 (2004 年度 **演習問題 13**)

図のような有向グラフに関して以下の問いに答えよ.



(1) 逐次構成法を用いて図の入口 v から出口 w へ至るネットワークの最大フローを求めよ.

(2) 図のネットワークにおける最小カットを求め, (1) の結果と比較することにより, 最大フロー最小カット定理が成立しているか否かを確かめよ.

(解答例)

(1) まずは道 p_1 として問題文中の図における $\mathsf{v} \to \mathsf{a} \to \mathsf{d} \to \mathsf{w}$ を選ぶ. 逐次構成法のアルゴリズムより, 最初のステップでは全ての辺のフローをゼロに設定するので

$$\phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) = \phi(\mathsf{a},\mathsf{d}) = \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) = 0 \tag{433}$$

とする. このとき, p_1 上の全ての辺は正順であり

$$\begin{aligned} g(\mathsf{v},\mathsf{a}) &= \Psi(\mathsf{v},\mathsf{a}) - \phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) = 20 - 0 = 20 \\ g(\mathsf{a},\mathsf{d}) &= \Psi(\mathsf{a},\mathsf{d}) - \phi(\mathsf{a},\mathsf{d}) = 11 - 0 = 11 \\ g(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= \Psi(\mathsf{d},\mathsf{w}) - \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) = 13 - 0 = 13 \end{aligned}$$

なので, 道 p_1 の余裕は

$$g(p_1) = \min_{k=(\mathsf{v},\mathsf{a}),(\mathsf{a},\mathsf{d}),(\mathsf{d},\mathsf{w})} g(k) = 11 \tag{434}$$

となる. 従って, 次ステップでの各辺のフローは (433)(434) より

$$\begin{aligned} \phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) &= 0 + g(p_1) = 11 \\ \phi(\mathsf{a},\mathsf{d}) &= 0 + g(p_1) = 11 \\ \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= 0 + g(p_1) = 11 \end{aligned}$$

である.

次の道 p_2 として $\mathsf{v} \to \mathsf{b} \to \mathsf{c} \to \mathsf{w}$ を選ぶ. この p_2 上の全ての辺のフローも初めはゼロに設定されているべきであるから

$$\phi(\mathsf{v},\mathsf{b}) = \phi(\mathsf{b},\mathsf{c}) = \phi(\mathsf{c},\mathsf{w}) = 0 \tag{435}$$

である. これらの辺は全て正順であるので

$$\begin{aligned} g(\mathsf{v},\mathsf{b}) &= \Psi(\mathsf{v},\mathsf{b}) - \phi(\mathsf{v},\mathsf{b}) = 10 - 0 = 10 \\ g(\mathsf{b},\mathsf{c}) &= \Psi(\mathsf{b},\mathsf{c}) - \phi(\mathsf{b},\mathsf{c}) = 7 - 0 = 7 \\ g(\mathsf{c},\mathsf{w}) &= \Psi(\mathsf{c},\mathsf{w}) - \phi(\mathsf{c},\mathsf{w}) = 3 - 0 = 3 \end{aligned}$$

となり, 従って道 p_2 の余裕は

$$g(p_2) \quad = \quad \min_{k=(\mathsf{v},\mathsf{b}),(\mathsf{b},\mathsf{c}),(\mathsf{c},\mathsf{w})} g(k) = 3 \tag{436}$$

である. 従って, 次ステップでの各辺のフローは (435)(436) から

$$\begin{aligned} \phi(\mathsf{v},\mathsf{b}) &= 0 + g(p_2) = 3 \\ \phi(\mathsf{b},\mathsf{c}) &= 0 + g(p_2) = 3 \\ \phi(\mathsf{c},\mathsf{w}) &= 0 + g(p_2) = 3 \end{aligned}$$

である.

この時点で各辺のフローを見てみると, 辺 (a,d), 及び, (c,w) のフローの値が容量いっぱいになっている. 従って, この 2 つの辺を含むような道に関しては正の余裕を持たせることはできず, 従って, その容量も増やすことはできない. このことを考慮に入れ, かつ, 入口 v から出口 w に至る道を選ぶとなるとそれは $\mathsf{v} \to \mathsf{a} \to \mathsf{c} \to \mathsf{d} \to \mathsf{w}$, 及び, $\mathsf{v} \to \mathsf{b} \to \mathsf{c} \to \mathsf{d} \to \mathsf{w}$ しかない. 前者を p_3, 後者を p_4 としよう.
まず p_3 に対して, この時点での各辺のフローは

$$\begin{aligned} \phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) &= 11 \\ \phi(\mathsf{a},\mathsf{c}) &= 0 \\ \phi(\mathsf{c},\mathsf{d}) &= 0 \\ \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= 11 \end{aligned}$$

である. $(\mathsf{a},\mathsf{c}),(\mathsf{c},\mathsf{d})$ は逆順であることに注意して

$$\begin{aligned} g(\mathsf{v},\mathsf{a}) &= \Psi(\mathsf{v},\mathsf{a}) - \phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) = 20 - 11 = 9 \\ g(\mathsf{a},\mathsf{c}) &= \phi(\mathsf{a},\mathsf{c}) = 0 \\ g(\mathsf{c},\mathsf{d}) &= \phi(\mathsf{c},\mathsf{d}) = 0 \\ g(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= \Psi(\mathsf{d},\mathsf{w}) - \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) = 13 - 11 = 2 \end{aligned}$$

となるので, この道 p_3 の余裕は

$$g(p_3) \quad = \quad \min_{k=(\mathsf{v},\mathsf{a}),(\mathsf{a},\mathsf{c}),(\mathsf{c},\mathsf{d}),(\mathsf{d},\mathsf{w})} g(k) = 0$$

従って, 各辺のフローはこの操作の前後で変わらず

$$\begin{aligned} \phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) &= 11 \\ \phi(\mathsf{a},\mathsf{c}) &= 0 \\ \phi(\mathsf{c},\mathsf{d}) &= 0 \\ \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= 11 \end{aligned}$$

である.

最後に道 p_4 について．この時点での各辺のフロー値は

$$\begin{aligned}\phi(\mathsf{v},\mathsf{b}) &= 3\\ \phi(\mathsf{b},\mathsf{c}) &= 3\\ \phi(\mathsf{c},\mathsf{d}) &= 0\\ \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= 11\end{aligned}$$

であり, (c,d) が逆順であることを考慮すると

$$\begin{aligned}g(\mathsf{v},\mathsf{b}) &= \Psi(\mathsf{v},\mathsf{b})-\phi(\mathsf{v},\mathsf{b})=10-3=7\\ g(\mathsf{b},\mathsf{c}) &= \Psi(\mathsf{b},\mathsf{c})-\phi(\mathsf{b},\mathsf{c})=7-3=4\\ g(\mathsf{c},\mathsf{d}) &= \phi(\mathsf{c},\mathsf{d})=0\\ g(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= \Psi(\mathsf{d},\mathsf{w})-\phi(\mathsf{d},\mathsf{w})=13-11=2\end{aligned}$$

となる．よって道 p_4 の余裕は

$$g(p_4) = \min_{k=(\mathsf{v},\mathsf{b}),(\mathsf{b},\mathsf{c}),(\mathsf{c},\mathsf{d}),(\mathsf{d},\mathsf{w})} g(k)=0$$

なので, この操作で各辺のフローは変化せず

$$\begin{aligned}\phi(\mathsf{v},\mathsf{b}) &= 3\\ \phi(\mathsf{b},\mathsf{c}) &= 3\\ \phi(\mathsf{c},\mathsf{d}) &= 0\\ \phi(\mathsf{d},\mathsf{w}) &= 11\end{aligned}$$

のままである．以上をまとめると, 最終的に得られる最大フローの値は $11+3=14$ であり, そのときの各辺のフローは図 240 のようになる．

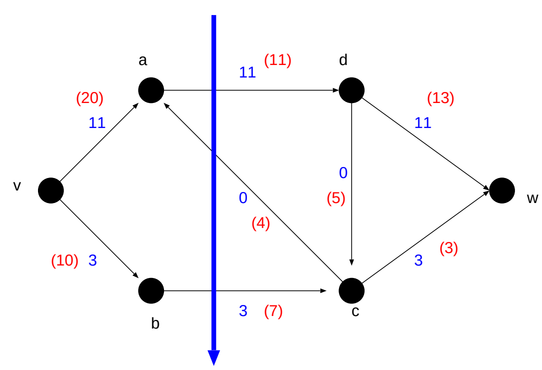
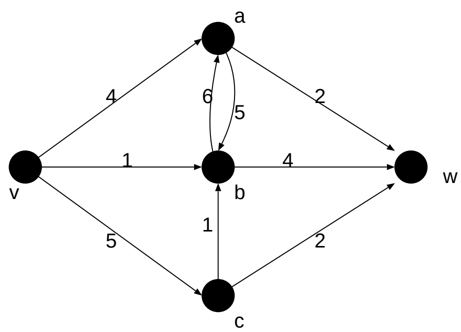


図 240: 逐次構成法を適用した結果, 各辺に割り当てられたフローの値．括弧内は各辺の容量を表す．太い矢印で記されたカットの容量は最小であり, $11-4+7=14$ であり, これはもちろん最大フロー $11+3=14$ と一致する．

(2) 図 240 の太い矢印のようなカットを考えると，このカットで v と w は分離し，カット容量は $11-4+7=14$ となり，これは (1) で求めた最大フローの値と一致する．従って，確かに最大フロー最小カット定理を満たしている．

例題 12.2 (2005, 2006 年度 **演習問題 13**)

図のネットワークを考える.



(1) このネットワークのカットを全て列挙し, 最小カットを見つけよ.
(2) 最大フローを見つけて, 最大フロー最小カット定理を確認せよ.

(解答例)

(1) 与えられたネットワークのカットおよびその容量を列挙し, 最小カットを求めると

{aw,bw,cw} 容量 8（※ 最小カット）
{cv,bc,cw} 容量 8（※ 最小カット）
{av,bv,cv} 容量 10
{av,ab,aw} 容量 17
{av,bv,bc,cw} 容量 8（※ 最小カット）
{aw,bw,bc,cv} 容量 12
{ab,bv,bc,bw} 容量 17
{aw,ab,bv,cv} 容量 19
{av,ab,bw,cw} 容量 21
{av,bv,bc,bw,aw} 容量 12
{aw,ab,bv,bc,cw} 容量 17
{cv,bv,ab,bw,cw} 容量 23
{av,ab,bw,bc,cv} 容量 25

となる.

(2) 逐次構成法により求めてみる. まずは p_1 として $\mathsf{v} \to \mathsf{a} \to \mathsf{w}$ を選ぶと, はじめ全ての辺のフローをゼロにするので

$$\phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) = \phi(\mathsf{a},\mathsf{w}) = 0 \tag{437}$$

となる. このとき, p_1 上の全ての辺は正順なので, 各辺の容量を $\Phi(\mathsf{u},\mathsf{v})$ とすると

$$g(\mathsf{v},\mathsf{a}) = \Phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) - \phi(\mathsf{v},\mathsf{a}) = 4 - 0 = 4 \tag{438}$$

$$g(\mathsf{a},\mathsf{w}) = \Phi(\mathsf{a},\mathsf{w}) - \phi(\mathsf{a},\mathsf{w}) = 2 - 0 = 2 \tag{439}$$

となるので, 道 p_1 の余裕 $g(p_1)$ は

$$g(p_1) = \min_{k=(\mathsf{v},\mathsf{a}),(\mathsf{a},\mathsf{w})} g(k) = 2 \quad (440)$$

となる. 従って, 各辺のフローは

$$\phi(sfv, a) = 0 + g(p_1) = 2 \quad (441)$$

$$\phi(\mathsf{a}, \mathsf{w}) = 0 + g(p_1) = 2 \quad (442)$$

と更新される. 同様にして, 道 p_2, p_3 に $\mathsf{v} \to \mathsf{b} \to \mathsf{w}, \mathsf{v} \to \mathsf{c} \to \mathsf{w}$ を選ぶと, p_2, p_3 上の全ての辺は正順なので, それぞれの道の余裕は $g(p_1) = 1, g(p_2) = 2$ となり, 各辺のフローは

$$\phi(\mathsf{v}, \mathsf{b}) = 0 + g(p_2) = 1 \quad (443)$$

$$\phi(\mathsf{b}, \mathsf{w}) = 0 + g(p_2) = 1 \quad (444)$$

$$\phi(\mathsf{v}, \mathsf{c}) = 0 + g(p_3) = 2 \quad (445)$$

$$\phi(\mathsf{c}, \mathsf{w}) = 0 + g(p_3) = 2 \quad (446)$$

となる. この時点で辺 vb, aw, cw のフローは容量いっぱいであり, この 3 辺を含む道に関してはフローの値を増やすことができない. また, 道に辺 aw を含められないことから, 辺 ba を正順に遡ることができず, 逆順にしか遡れない. しかし, 辺 ba のフローの値はゼロであり, 逆順に遡ってもやはりフローの値を増やすことはできないので, 辺 ba も道に含まないことにする. そうすると考えられる道は $\mathsf{v} \to \mathsf{a} \to \mathsf{b} \to \mathsf{w}, \mathsf{v} \to \mathsf{c} \to \mathsf{b} \to \mathsf{w}$ である. それぞれを p_4, p_5 としょう. まず, 道 p_4 に関して, 各辺は正順なので

$$g(\mathsf{v}, \mathsf{a}) = \Phi(\mathsf{v}, \mathsf{a}) - \phi(\mathsf{v}, \mathsf{a}) = 4 - 2 = 2 \quad (447)$$

$$g(\mathsf{a}, \mathsf{b}) = \Phi(\mathsf{a}, \mathsf{b}) - \phi(\mathsf{a}, \mathsf{b}) = 5 - 0 = 5 \quad (448)$$

$$g(\mathsf{b}, \mathsf{w}) = \Phi(\mathsf{b}, \mathsf{w}) - \phi(\mathsf{b}, \mathsf{w}) = 4 - 1 = 3 \quad (449)$$

であり, 道 p_4 の余裕は

$$g(p_4) = \min_{k=(\mathsf{v},\mathsf{a}),(\mathsf{a},\mathsf{b}),(\mathsf{b},\mathsf{w})} g(k) = 2 \quad (450)$$

である. 従って, 各辺のフローは

$$\phi(\mathsf{v}, \mathsf{a}) = 2 + g(p_4) = 4 \quad (451)$$

$$\phi(\mathsf{a}, \mathsf{b}) = 0 + g(p_4) = 2 \quad (452)$$

$$\phi(\mathsf{b}, \mathsf{w}) = 1 + g(p_4) = 3 \quad (453)$$

と更新される. 次に道 p_5 に関しては各辺が正順なので

$$g(\mathsf{v}, \mathsf{c}) = \Phi(\mathsf{v}, \mathsf{c}) - \phi(\mathsf{v}, \mathsf{c}) = 5 - 2 = 3 \quad (454)$$

$$g(\mathsf{c}, \mathsf{b}) = \Phi(\mathsf{c}, \mathsf{b}) - \phi(\mathsf{c}, \mathsf{b}) = 1 - 0 = 1 \quad (455)$$

$$g(\mathsf{b}, \mathsf{w}) = \Phi(\mathsf{b}, \mathsf{w}) - \phi(\mathsf{b}, \mathsf{w}) = 4 - 3 = 1 \quad (456)$$

であり, 道 p_5 の余裕は

$$g(p_5) = \min_{k=(\mathsf{v},\mathsf{c}),(\mathsf{c},\mathsf{b}),(\mathsf{b},\mathsf{w})} g(k) = 1 \quad (457)$$

となる. 従って, 各辺のフローは

$$\phi(\mathsf{v},\mathsf{c}) = 2 + g(p_5) = 3 \quad (458)$$
$$\phi(\mathsf{c},\mathsf{b}) = 0 + g(p_5) = 1 \quad (459)$$
$$\phi(\mathsf{b},\mathsf{w}) = 3 + g(p_5) = 4 \quad (460)$$

と更新される. 最終的な各辺のフローは図のようになり, 最大フローの値は $4+1+3=8$ であり, (1) の結果と併せると確かに最大フロー最小カット定理を満たしている.