

グラフ理論 #2

第2回講義 4月23日

--- 定義と例 ---

情報科学研究科 井上純一

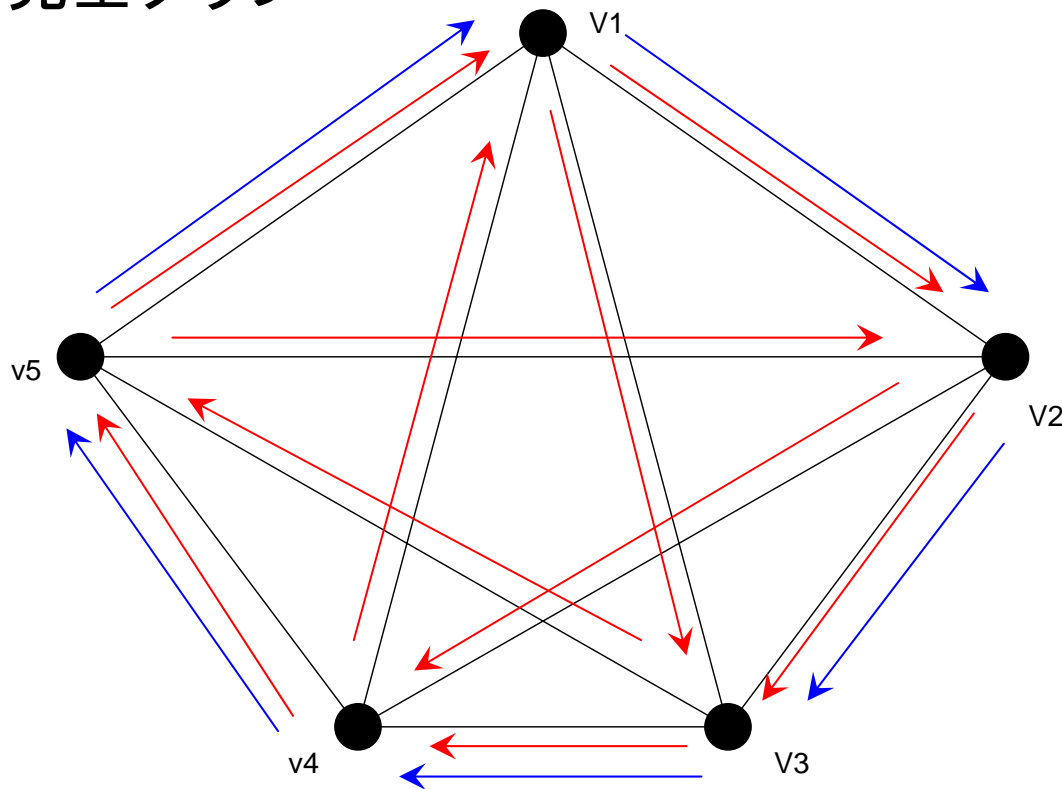
http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題1

(2)の解答例

完全グラフ

オイラーでもハミルトンでもある。

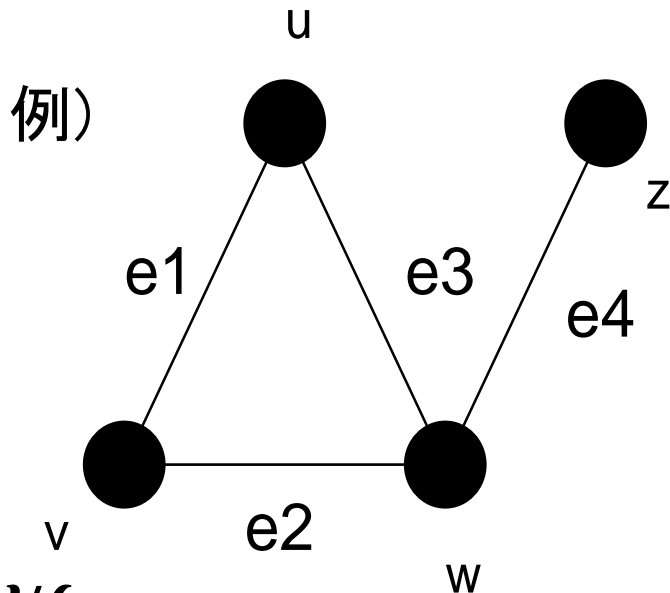


辺の数は一般に

$${}_n C_2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

単純グラフ

単純グラフ：グラフにループが含まれず、頂点のどの対も高々1つのリンクで結ばれているグラフ



グラフGの点集合 (vertex set)

$$V(G) = \{u, v, w, z\}$$

グラフGの辺集合 (edge set)

$$E(G) = \{uv, vw, wu, wz\}$$

ψ_G グラフGの接続関数 \Rightarrow Gの各辺にGの頂点の対を対応させる関数

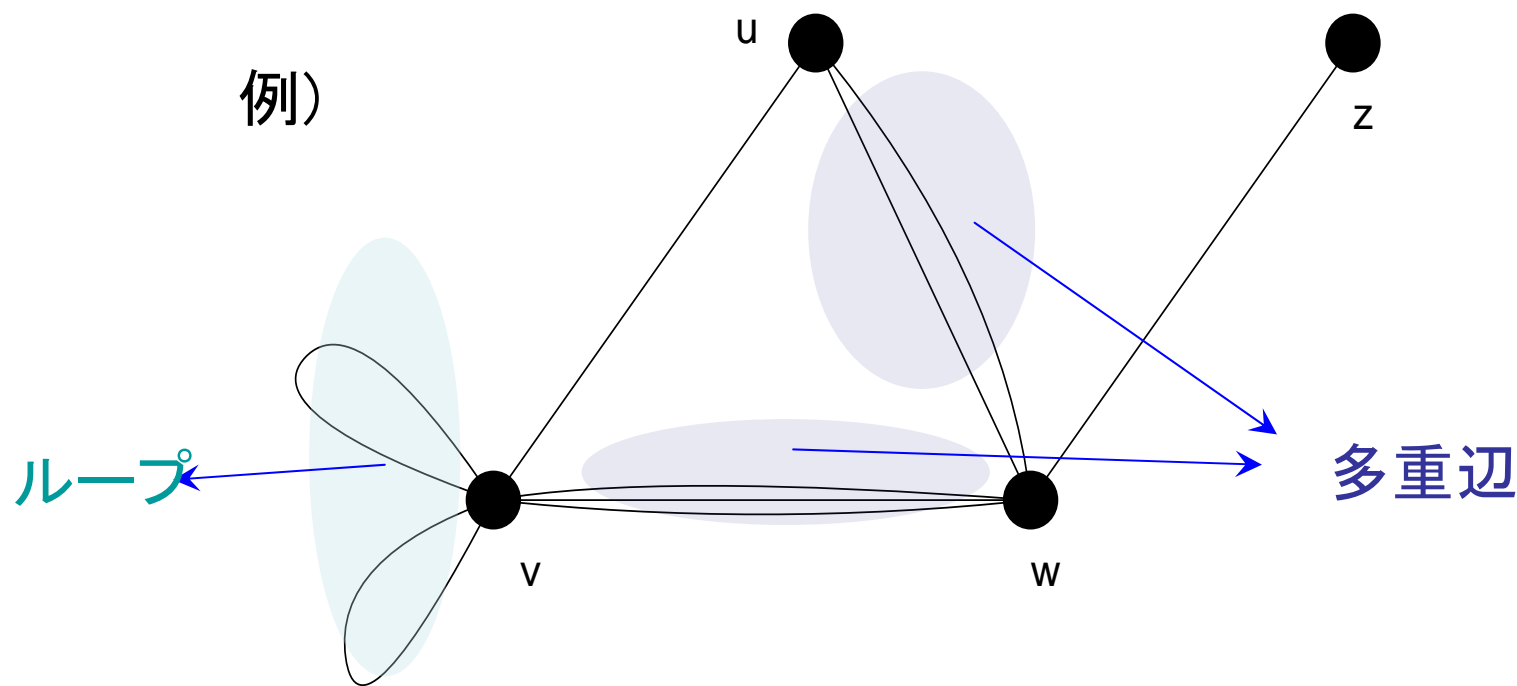
$$\psi_G(e_1) = uv, \quad \psi_G(e_2) = vw$$

$$\psi_G(e_3) = wu, \quad \psi_G(e_4) = wz$$

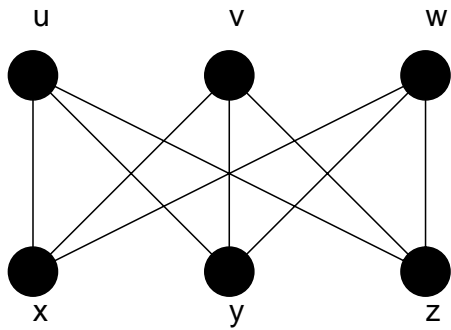
例)の場合の接続関数

一般グラフ (⇔ 単純グラフ)

一般グラフ (general graph) : ループや多重辺も許されたグラフ



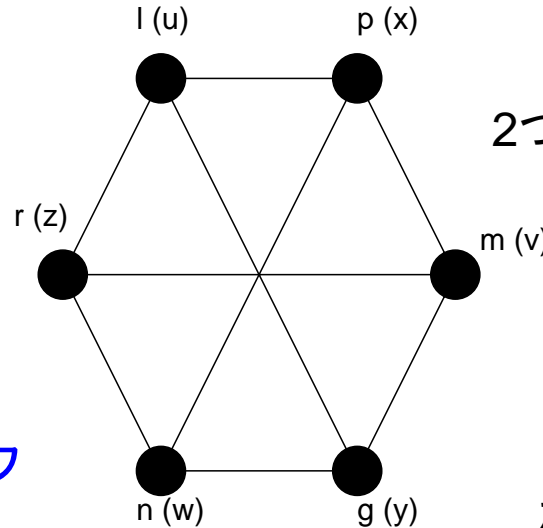
同形と同形写像



G1

完全二部グラフ

$K_{3,3}$



G2

2つのグラフ G_1, G_2 が同形であるとき

1対1写像:

$$\theta: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$$

$$\phi: E(G_1) \rightarrow E(G_2)$$

が次を満たす

$$\psi_{G_1}(e) = uv \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

接続関数

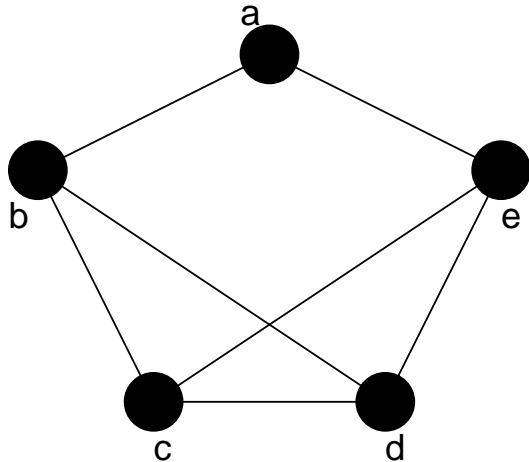
上の例では

$$\theta(u) = l, \theta(v) = m, \theta(w) = n, \theta(x) = p, \theta(y) = q, \theta(z) = r$$

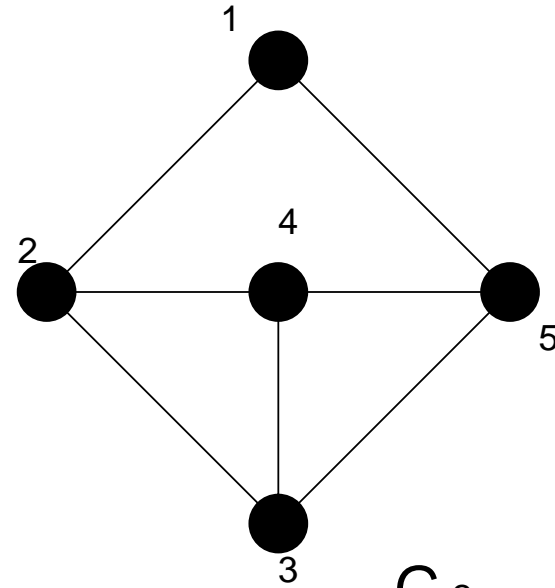
$$\phi(\overline{ux}) = \overline{lp} = \overline{\theta(u)\theta(x)}, \phi(\overline{uz}) = \overline{lr} = \overline{\theta(u)\theta(x)}, \dots$$

となり、次が成立 $\Rightarrow \psi_{G_1}(\overline{ux}) = \overline{ux} \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ux})) = \overline{lp} = \theta(u)\theta(x), \dots$ 5

例題2.2の1



G_1



G_2

点について

$$\theta(a) = 1, \theta(b) = 2, \theta(c) = 3, \theta(d) = 4, \theta(e) = 5$$

辺について

$$\phi(\overline{ab}) = \overline{12}, \phi(\overline{bc}) = \overline{23}, \phi(\overline{cd}) = \overline{34}, \phi(\overline{bd}) = \overline{24}$$

$$\phi(\overline{de}) = \overline{45}, \phi(\overline{ce}) = \overline{35}, \phi(\overline{ea}) = \overline{51}$$

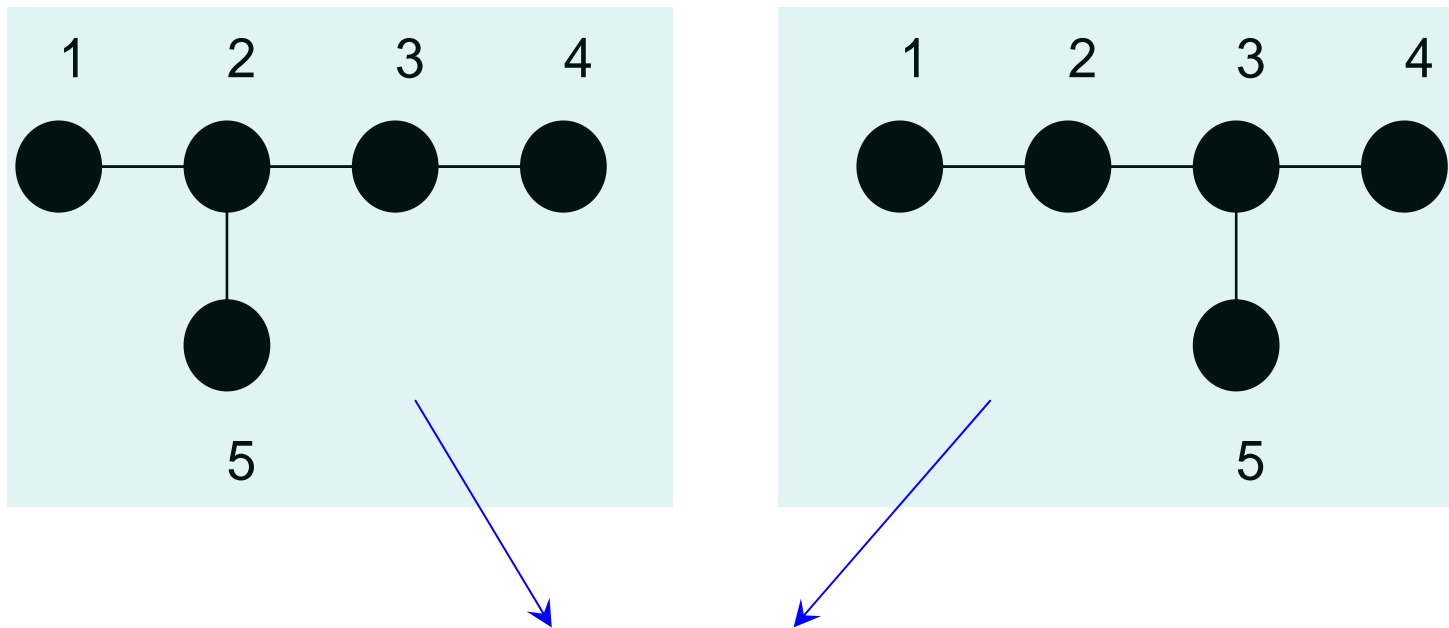


$$\psi_{G_1}(\overline{ab}) = ab \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ab})) = \psi_{G_2}(\overline{12}) = \theta(a)\theta(b)$$

等が成り立ち、同形写像が存在する。

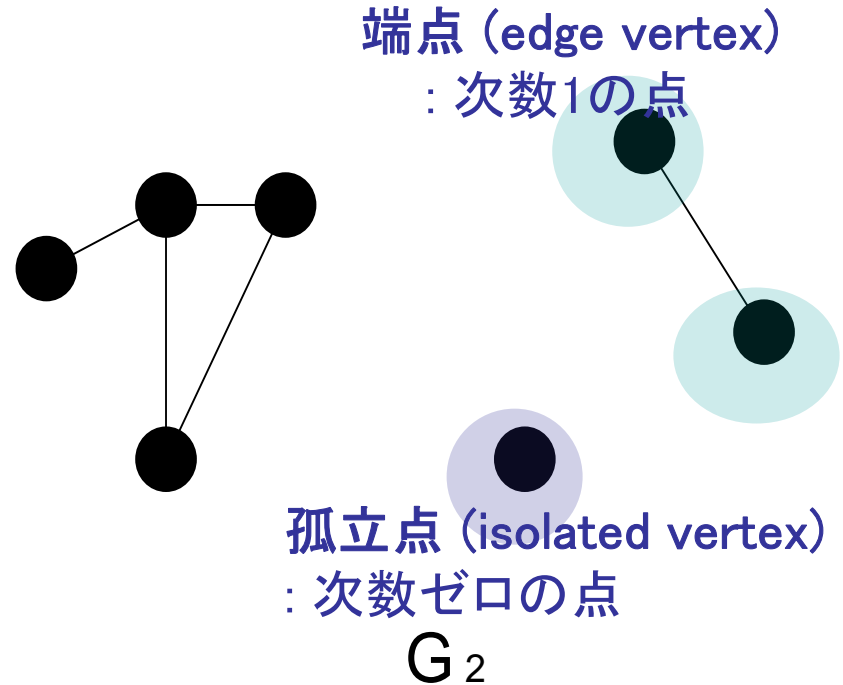
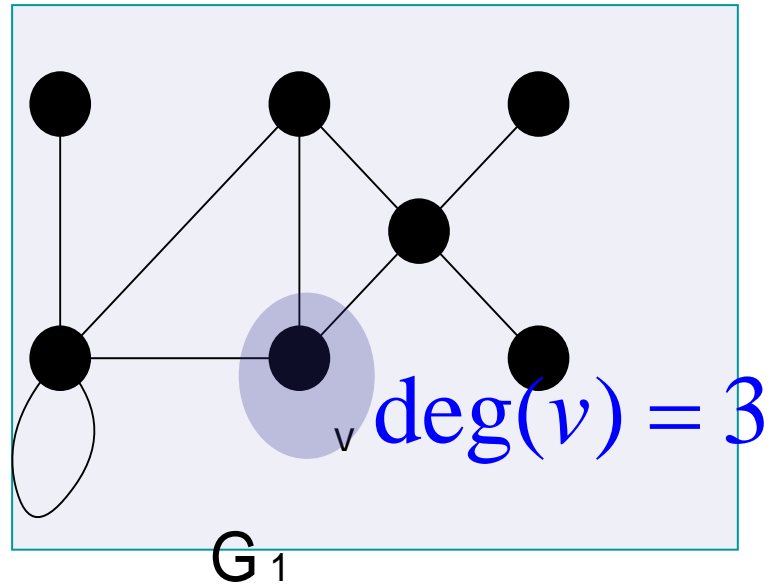
ラベル付き・なしグラフ

ラベル付きグラフ：各点に名前のついたグラフ



ラベル付きグラフとして扱う場合には
これら2つの木は別個の木となる

次数および次数列



グラフの次数列： 次数を増加順に記したものの

次数列は

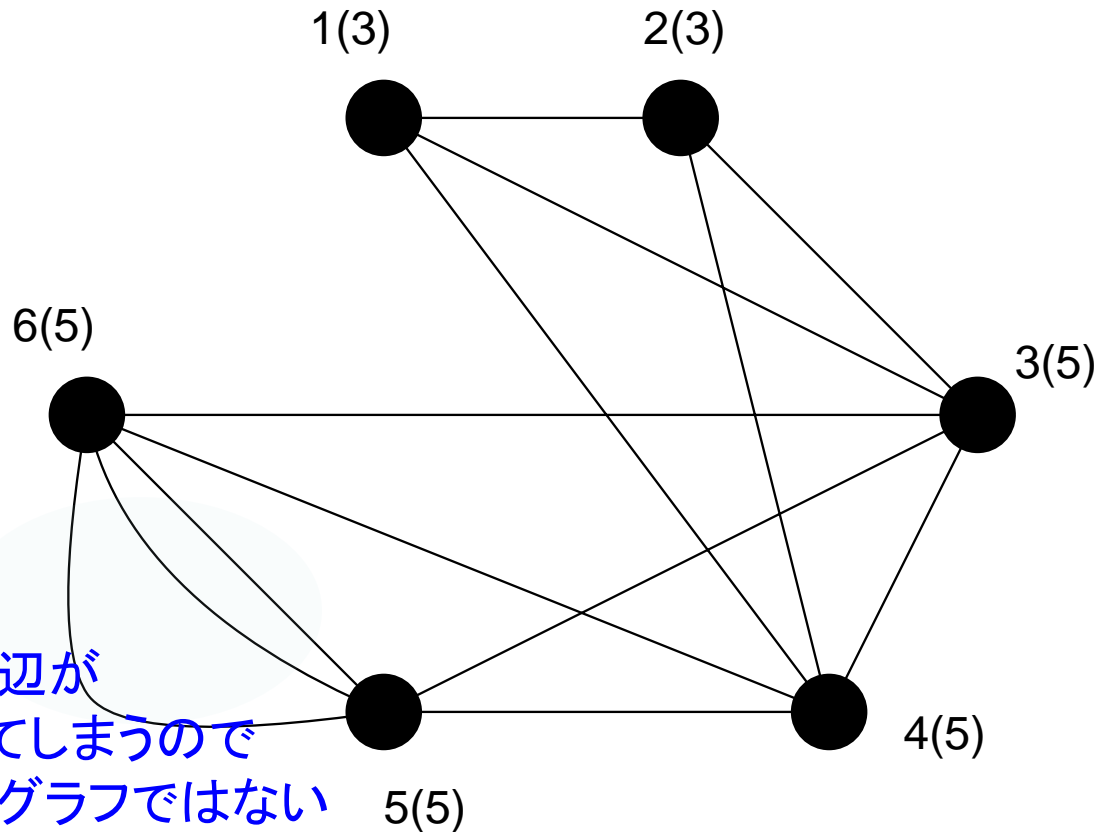
(1, 1, 1, 3, 3, 4, 5)

⇒ 逆にグラフが描けるような数列のことを、その数列は「グラフ的」という。

例題2.3の(3)

各点の次数列が(3,3,5,5,5,5)であるものを描け

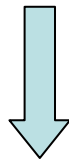
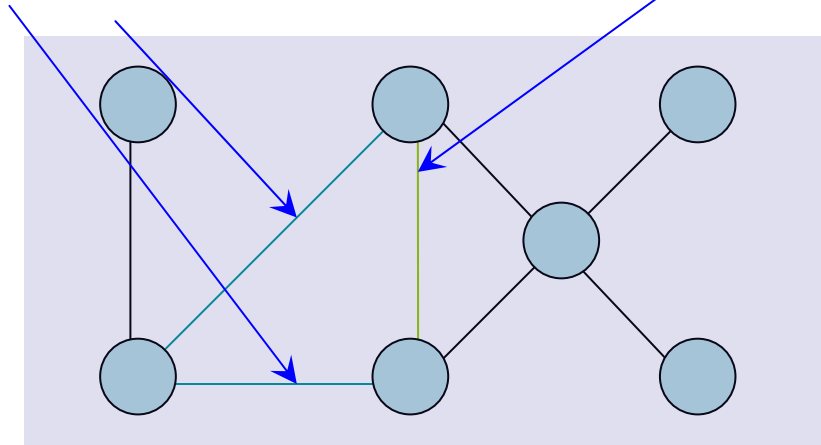
「ベクトル」の成分が6個なので6点からなるグラフ



部分グラフ

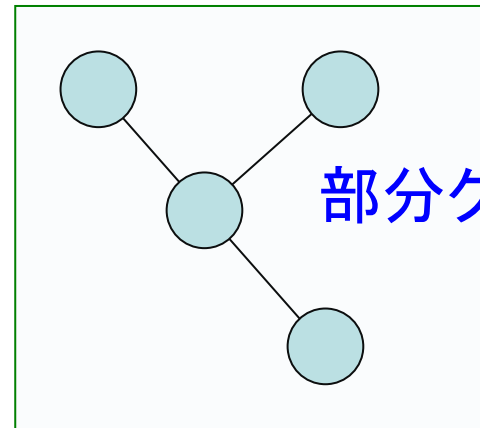
この2辺を除去する

この辺を縮約する



右の2つの部分グラフ
が得られる

部分グラフ#1



部分グラフ#2

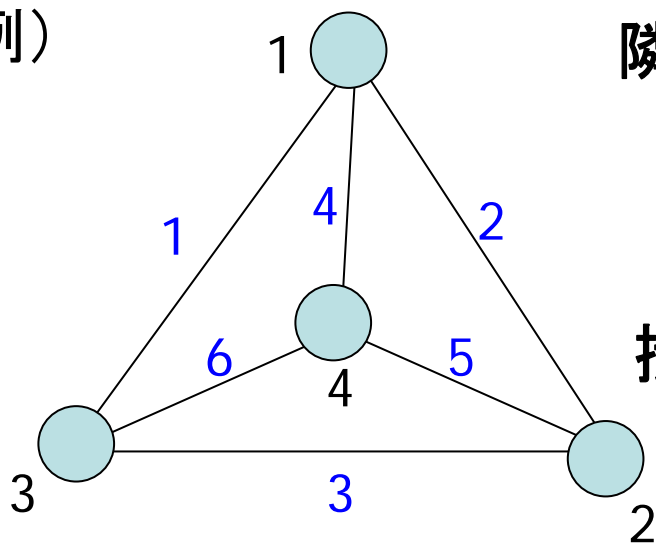
グラフの行列表現

点数 n 変数 m のグラフに対して

隣接行列：点 i と点 j を結ぶ辺の本数を第 ij 要素とする $n \times n$ の行列

接続行列：点 i が辺 j に接続している場合、第 ij 要素が1であり、
接続していなければ0である $n \times m$ の行列

例)



次数列は(3,3,3,3)

隣接行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

和3は点1の次数

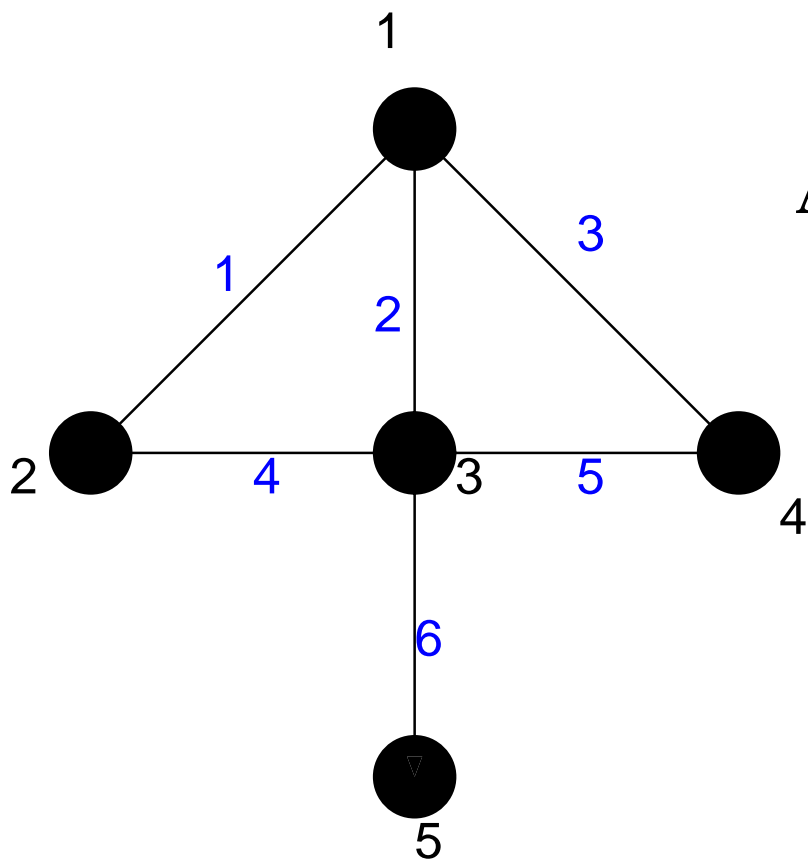
対称行列

接続行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

握手補題から
この和は必ず2

例題2.3の(2)



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

点1につながっている
点は2,3,4なので
1x2,1x3,1x4成分に
1が立っている

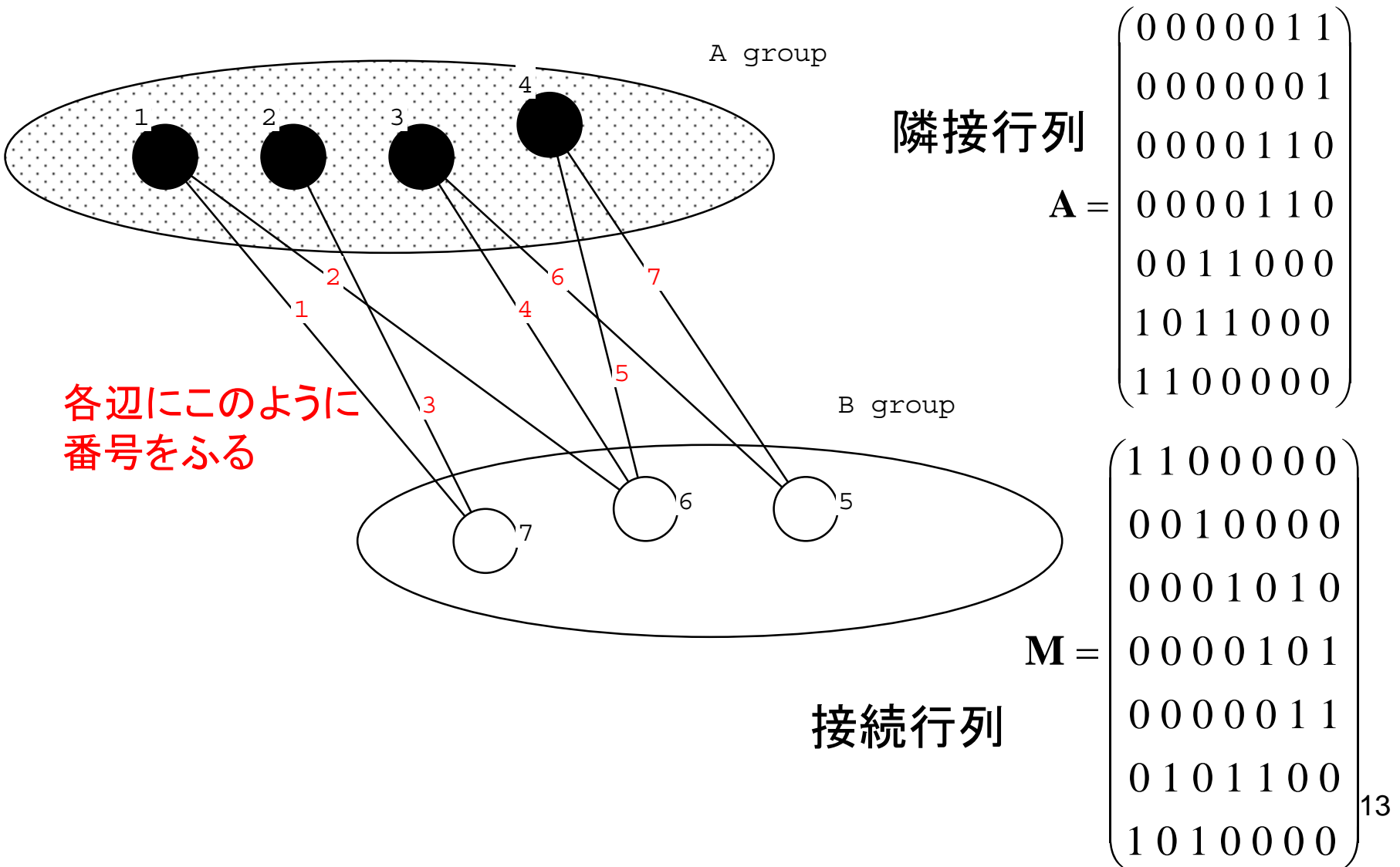
隣接行列

点1につながっている
辺は1,2,3なので
1x1,1x2,1x3に1が立っ
ている

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

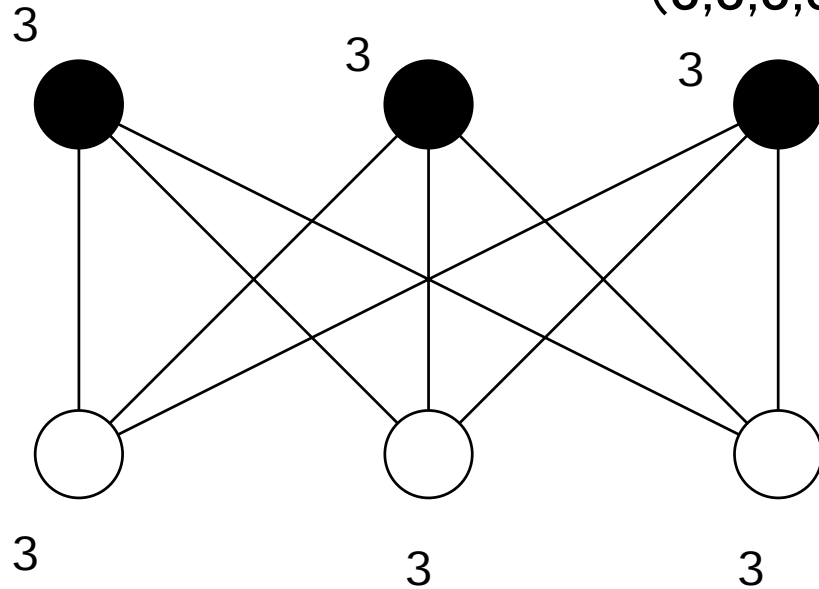
接続行列

例題2.4 (1)



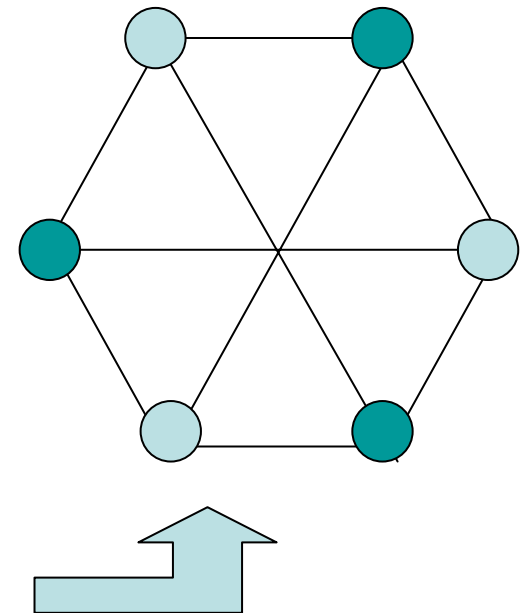
例題2.4 (2)

$(3,3,3,3,3,3)$ はグラフ的である。

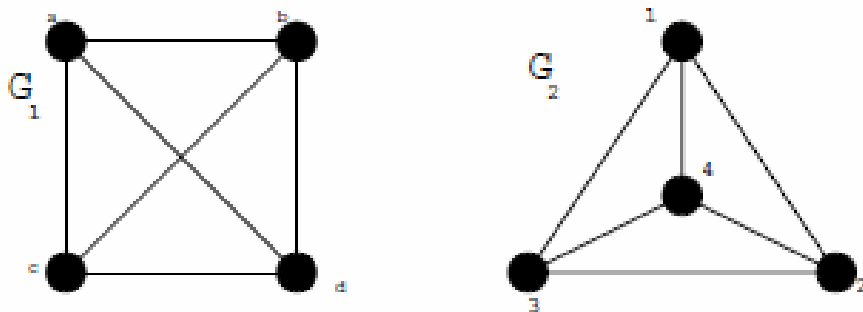


完全二部グラフであれば良い

これを描いても正解



例題2.4(3)



写像 θ, ϕ を

$$\theta(a) = 1, \theta(b) = 2, \theta(c) = 3, \theta(d) = 4 \quad (9)$$

$$\phi(\overline{ab}) = \overline{12}, \phi(\overline{ac}) = \overline{13}, \phi(\overline{ad}) = \overline{14}, \phi(\overline{bd}) = \overline{24}, \phi(\overline{cd}) = \overline{34}, \phi(\overline{bc}) = \overline{23} \quad (10)$$

とすれば, 接続関数 ψ_{G_1}, ψ_{G_2} に対して

$$\psi_{G_1}(\overline{ab}) = ab \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ab})) = \psi_{G_2}(\overline{12}) = 12 = \theta(a)\theta(b) \quad (11)$$

$$\psi_{G_1}(\overline{ac}) = ac \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ac})) = \psi_{G_2}(\overline{13}) = 13 = \theta(a)\theta(c) \quad (12)$$

$$\psi_{G_1}(\overline{ad}) = ad \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ad})) = \psi_{G_2}(\overline{14}) = 14 = \theta(a)\theta(d) \quad (13)$$

$$\psi_{G_1}(\overline{bd}) = bd \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{bd})) = \psi_{G_2}(\overline{24}) = 24 = \theta(b)\theta(d) \quad (14)$$

$$\psi_{G_1}(\overline{cd}) = cd \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{cd})) = \psi_{G_2}(\overline{34}) = 34 = \theta(c)\theta(d) \quad (15)$$

$$\psi_{G_1}(\overline{bc}) = bc \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{bc})) = \psi_{G_2}(\overline{23}) = 23 = \theta(b)\theta(c) \quad (16)$$

が成り立つ. 従って, グラフ G_1, G_2 は同形である.

演習問題2

次の問い (1)(2) に答えよ.

- (1) $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$ はグラフ的か? 理由とともに示せ. また, このグラフの隣接行列, 接続行列を書け.
- (2) 完全2部グラフ $K_{3,3}$ を異なる2通りに描き, その両者が同型であることを例題 2.2 の 1. に従って示せ.

(1) グラフの点と辺に番号をふり、隣接、接続行列を書くこと。

レポート締め切りは5月7日 (次回は祭日で休講)