

グラフ理論 #4

第4回講義 5月14日

--- 道と閉路 ---

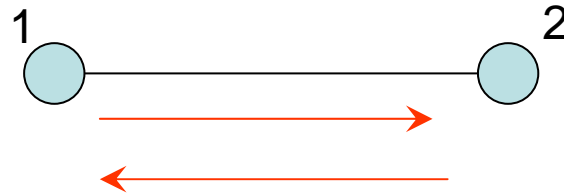
情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題3 (1)の解答例

隣接行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



歩道生成行列

$$(I - xA)^{-1} = \frac{1}{1 - x^2} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-x^2} & \frac{x}{1-x^2} \\ \frac{x}{1-x^2} & \frac{1}{1-x^2} \end{pmatrix}$$

各成分を冪で展開すると

$$[(I - xA)^{-1}]_{1,1} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots = [(I - xA)^{-1}]_{2,2}$$

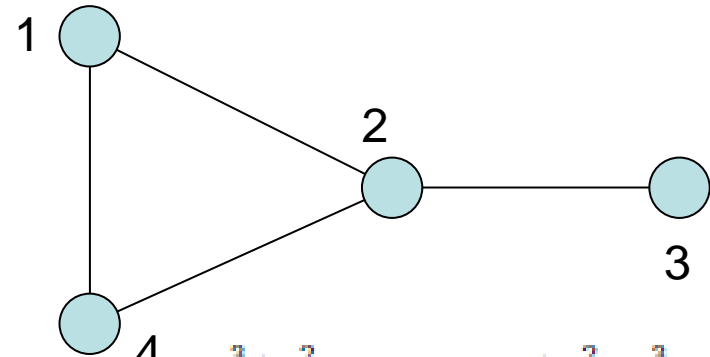
$$[(I - xA)^{-1}]_{1,2} = x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots = [(I - xA)^{-1}]_{2,1}$$

自分自身に戻る場合には偶数次、他点に移動する場合には奇数次の冪のみが展開に現れ、その展開係数は全て1である

演習問題3 (2)の解答例

隣接行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



歩道生成行列

$$(I - xA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-2x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} & 4 \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x+x^2-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} \\ \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{1-x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} \\ \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{1-3x^2-2x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} \\ \frac{x-x^2-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{1-2x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} \end{pmatrix}$$

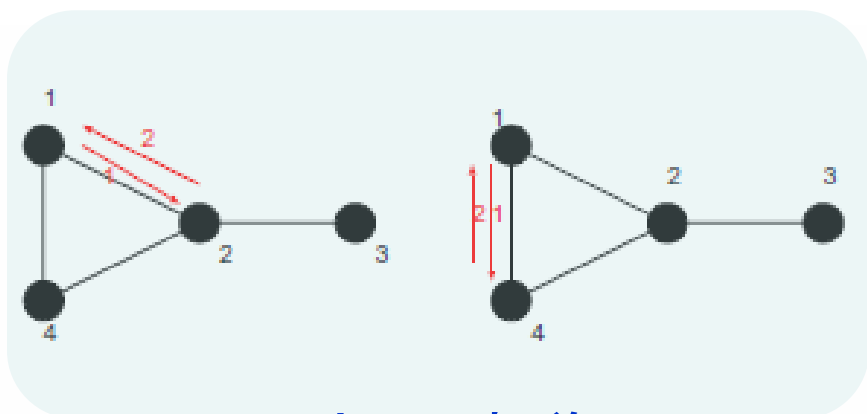
4次まで展開すると

$(I - xA)_x^{-1}$ の4次まで

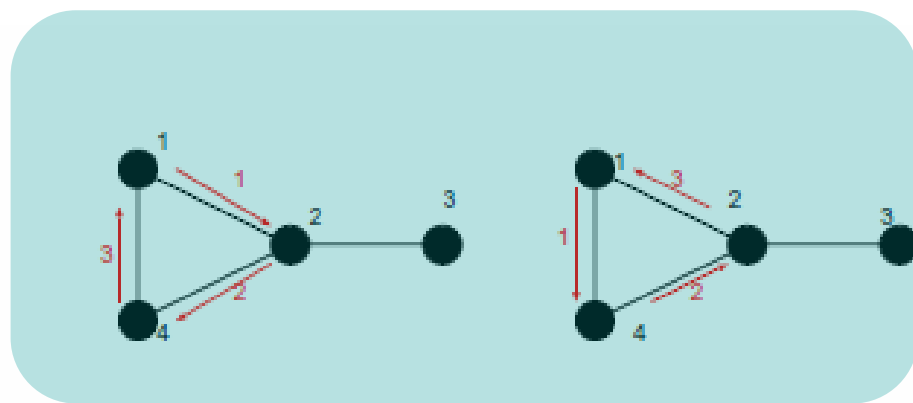
$$= \begin{pmatrix} 1 + 2x^2 + 2x^3 + 7x^4 & x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 & x^2 + x^3 + 4x^4 & x + x^2 + 3x^3 + 6x^4 \\ x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 & 1 + 3x^2 + 2x^3 + 11x^4 & x + 3x^3 + 2x^4 & x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 \\ x^2 + x^3 + 4x^4 & x + 3x^3 + 2x^4 & 1 + x^2 + 3x^4 & x^2 + x^3 + 4x^4 \\ x + x^2 + 3x^3 + 6x^4 & x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 & x^2 + x^3 + 4x^4 & 1 + 2x^2 + 2x^3 + 7x^4 \end{pmatrix}$$

(1,1)成分の確認

$$\begin{aligned}
 [(I - xA)^{-1}]_{1,1} &\simeq (1 - 2x^2)\{1 + (4x^2 + 2x^3 - x^4) + (4x^2 + 2x^3 - x^4)^2 + \dots\} \\
 &= 1 + (4x^2 - 2x^2) + 2x^3 + (-8x^4 - x^4 + 16x^4) + \mathcal{O}(x^5) \\
 &= x^0 + 2x^2 + 2x^3 + 7x^4 + \mathcal{O}(x^5)
 \end{aligned}$$



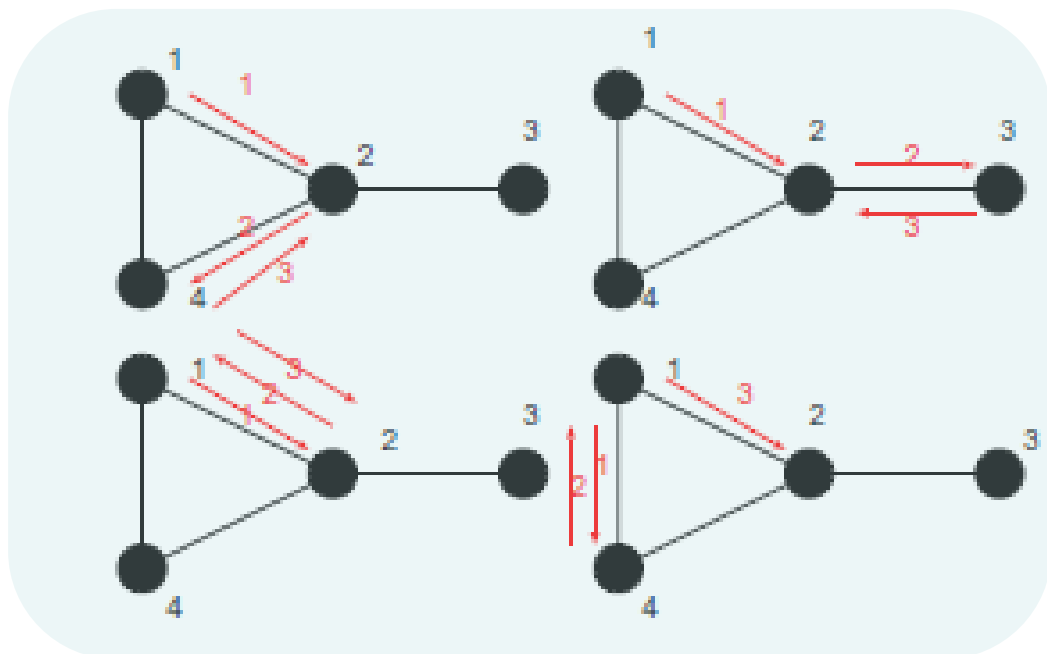
長さ2の歩道



長さ3の歩道

(1,2)成分の確認

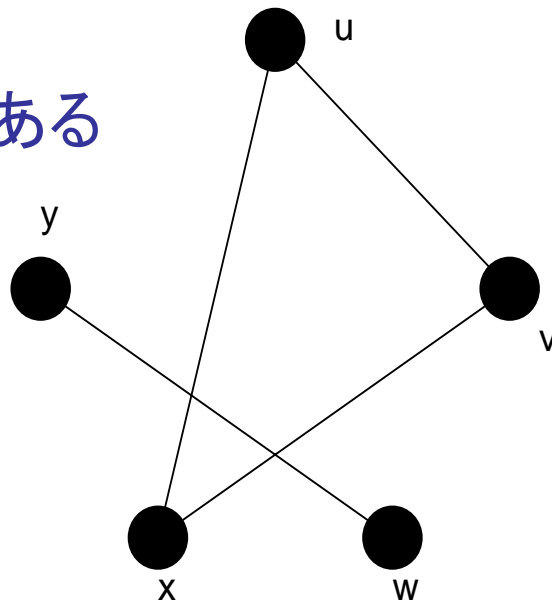
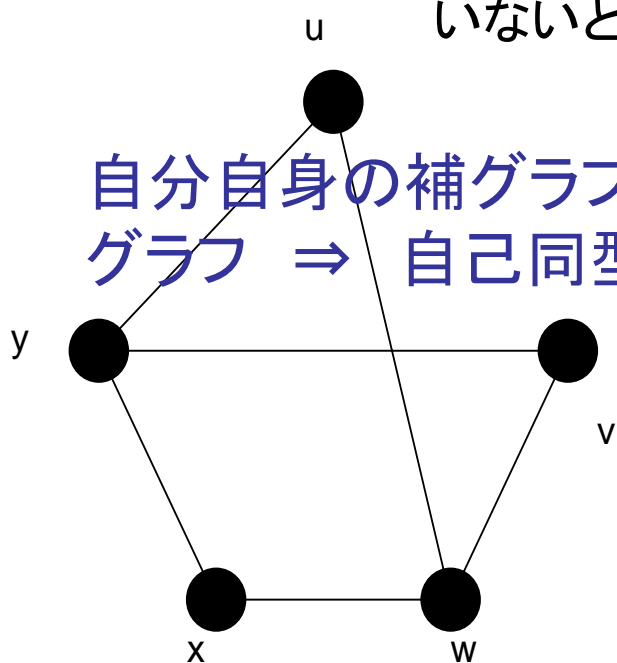
$$\begin{aligned} [(I - xA)^{-1}]_{1,2} &\simeq (x^2 + x)\{1 + (4x^2 + 2x^3 - x^4) + (4x^2 + 2x^3 - x^4)^2 + \dots\} \\ &= x + x^2 + 4x^3 + (4x^4 + 2x^4) + \mathcal{O}(x^5) \\ &= x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned}$$



単純グラフの補グラフ

単純グラフGの補グラフ (complement) :

単純グラフGの点集合を持ち、2点が隣接するのは、Gにおけるそれらの2点が隣接していないとき、かつ、そのときに限るグラフ



例)

- ☆ 完全グラフの補グラフは空グラフ
- ☆ 完全二部グラフの補グラフは2つの完全グラフの和である

例題3.4の2.(1)

問題となるグラフとその補グラフの和は完全グラフとなるべきである

問題のグラフの辺数は

$$m = \frac{n(n-1)}{4}$$

$$\therefore n = 4k, 4k + 1$$

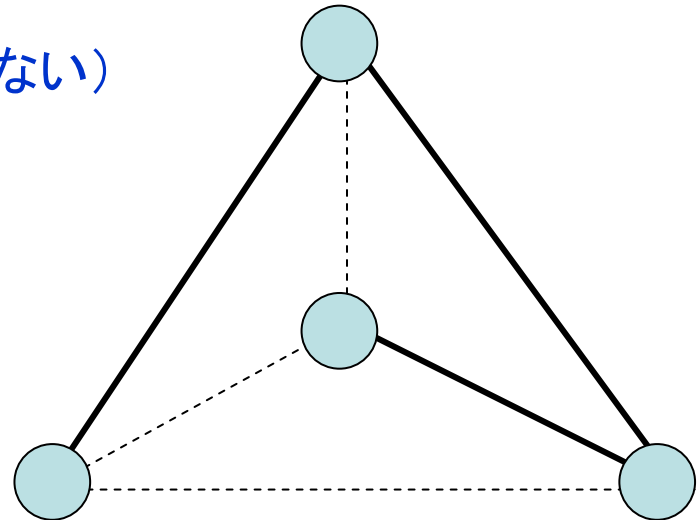
(辺数は整数でなくてははいけない)

k=1のとき, n=4

$$\underbrace{L}_{\text{次数1の点数}} + \underbrace{2M}_{\text{次数2の点数}} = 6$$

$$L + M = 4$$

この解は $(L, M) = (2, 2)$



破線と実線のグラフがそれぞれ自己補対

例題3.4の2.(1) #2

$k=1, n=4k+1=5$ の場合には

$$L + 2M + 3N = 10$$

次数3の点数

$$L + M + N = 5$$

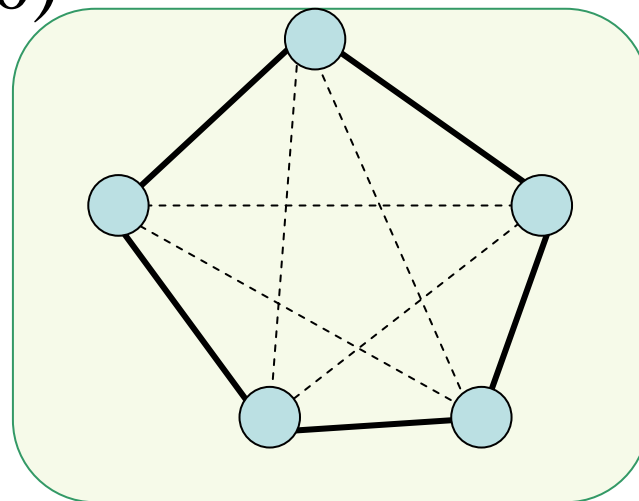
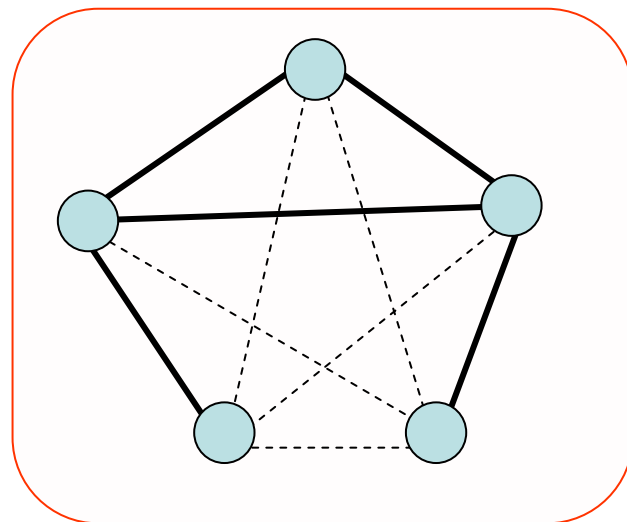
その解は

$$(L, M, N) = (1, 3, 1), (2, 1, 2), (0, 5, 0)$$

対応する次数列は

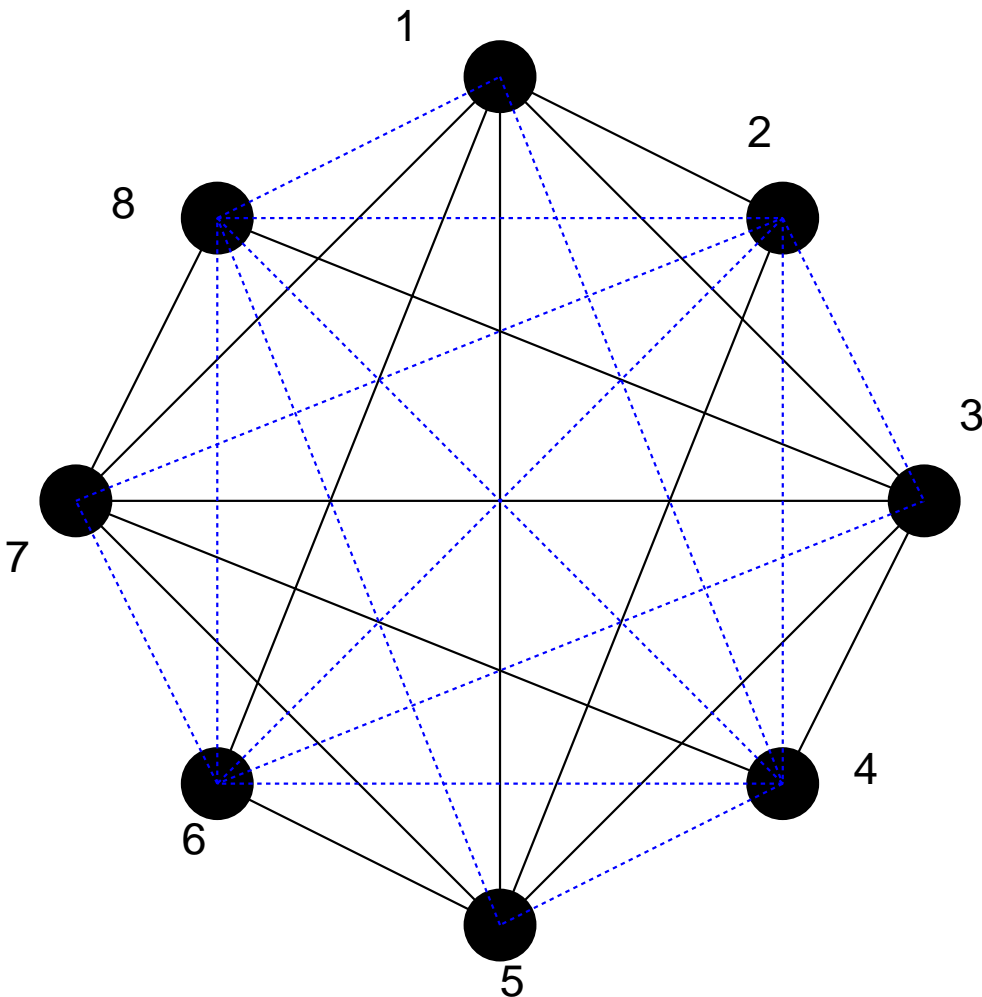
(3, 2, 2, 2, 1), (3, 3, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 2, 2)

これは
描けない



例題3.4の2.(2)

$k=2, n = 4k=8$ の自己補対グラフの例



- (1) 8個の点を時計回りに並べる
- (2) 8個の点のうち奇数番の点に関して完全グラフを作る
- (3) 奇数番目の点とその点の番号+1番目の点どうしを結ぶ
- (4) 偶数番目の点とその点+3番目の点を結ぶ

自己補対グラフの探し方

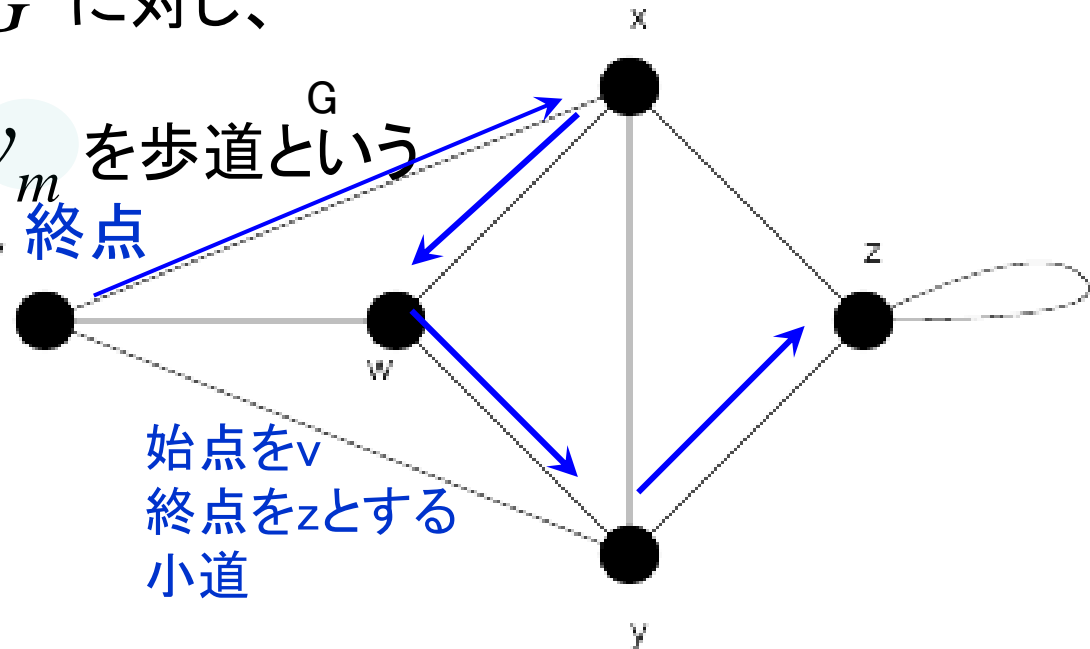
上のアルゴリズムで奇数番目と偶数番目の点の役割を交換したグラフが自己補対

歩道・小道・道・閉路

歩道： $v_i (i = 1, \dots, m) \in G$ に対し、

$v_0 v_1, v_1 v_2, \dots, v_{m-1} v_m$ を歩道という
始点 終点

(※重複する辺があってもよい)



小道： 全ての辺 $v_0 v_1, v_1 v_2, \dots, v_{m-1} v_m$ が異なる歩道

道： 点 v_0, v_1, \dots, v_m が全て異なる歩道

閉路： 少なくとも1本辺を持つ閉じた道

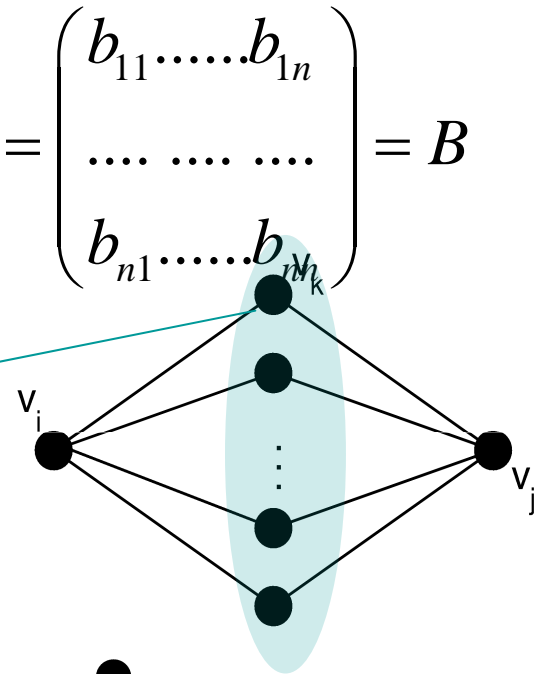
例題4.1 #1

連結単純グラフ $G: \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, m 本の辺, t 個の三角形

(1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ と置くと、この2乗は $A^2 = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = B$

第 ij 要素 $b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}$ 点 v_i から点 v_k を
経路して v_j に至る
長さ2の歩道の数

経路点 v_k に関する全ての可能性について足し
あげたものは v_i と v_j 間の歩道の総数に等しい



(2) $b_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{ki}$ v_i から v_k を経路して v_i に戻る
歩道数 V_i と v_k を結ぶ辺の2倍

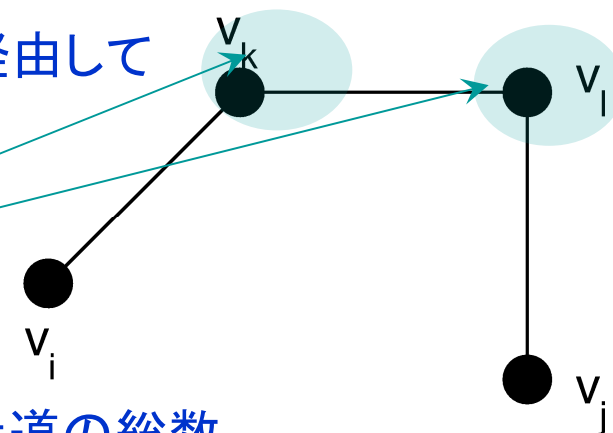
$\sum_{i=1}^n b_{ii}$ は G の総辺数の
2倍

例題4.1 #2

$$(3) \quad A^3 = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = C$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{lj}$$

点 v_i から点 v_k と v_l を経由して
点 v_j へ至る辺の本数

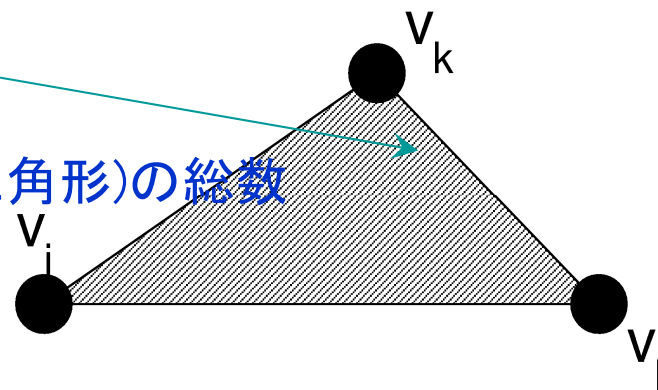


点 v_i から点 v_j へ至る歩道の総数

対角要素 :

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{li}$$

このような閉路(三角形)の総数



従って

$$\sum_{i=1}^n c_{ii} = \underline{6t}$$

点 i, k, l の並べ方の $3!=6$ 通りからくる

定理5・2 #1

グラフGはn個の点をもつ単純グラフであり
k個の成分がある場合Gの辺数mは

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1) \quad \text{を満たす}$$

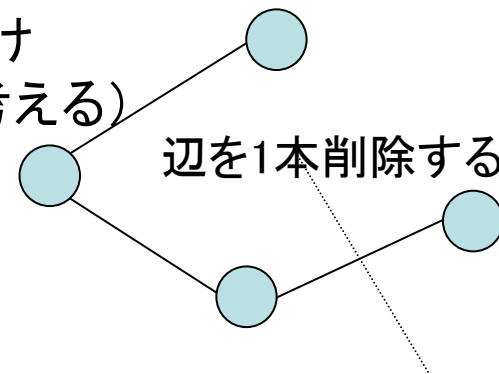
(証明)

$m \geq n - k$ について

辺数の下限に関して、であるから、グラフGはできるだけ
少ない辺数を持つものとする(極端な場合として木を考える)

Gから辺を1本削除すると

$$k \rightarrow k + 1, n \rightarrow n, m_0 \rightarrow m_0 - 1$$



$$m_0 - 1 \geq n - (k + 1) \quad m_0 - 1 \text{本の辺に関して不等式の成立を仮定}$$

(帰納法の仮定。 $m_0 = 0$ の場合は自明)

$$m_0 \geq n - k \quad m_0 \text{本の辺について成立}$$

\Rightarrow 全ての辺数について成立

定理5・2 #2

$$m \leq (n - k)(n - k + 1) / 2$$

の成立について示す

辺数の上界を示すので、グラフGは辺数の最も多い完全グラフとして考える

$C_i + C_j$ の辺の総数

$$N_{ij} = \frac{1}{2}n_i(n_i - 1) + \frac{1}{2}n_j(n_j - 1)$$

次の操作を行う

$C_i \Rightarrow n_i + 1$ 個の点をもつ完全グラフ

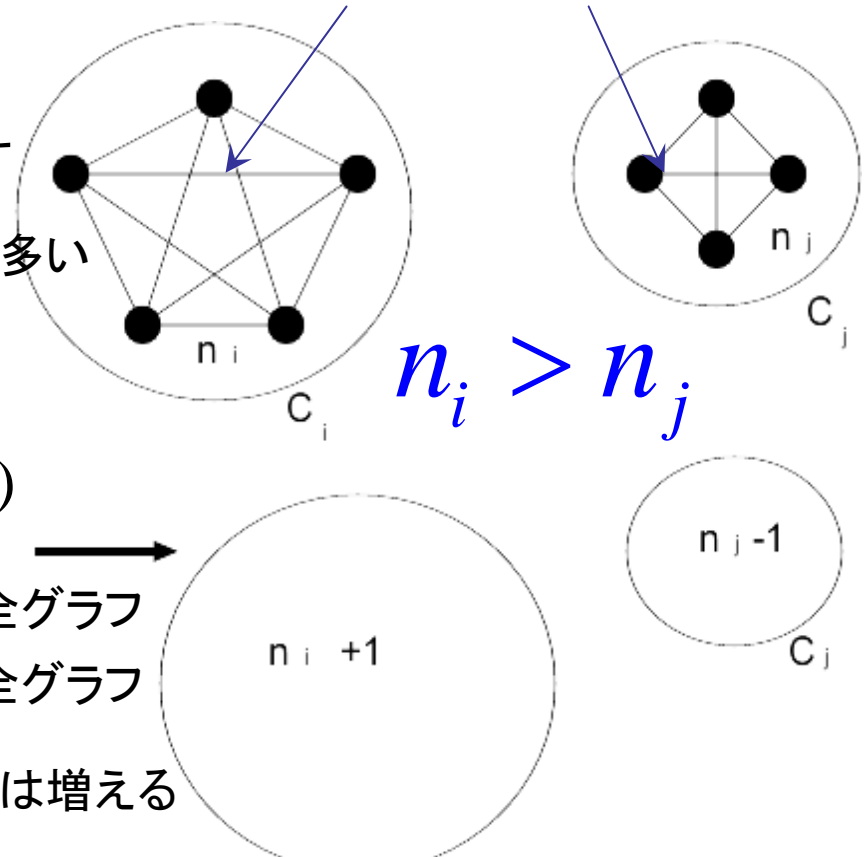
$C_j \Rightarrow n_j - 1$ 個の点をもつ完全グラフ

$$\Delta N_{ij} = n_i - n_j + 1 > 0 \quad \text{だけ点の総数は増える}$$

この操作を繰り返すと $n-k+1$ 個の点からなる1つの完全グラフと $k-1$ 個の孤立点を得られる

→ $m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1)$ が成立する

グラフGの中の任意の2成分



例題4.2 (1)

$d(v, w)$ は v から w への最短路の長さ

$d(v, w) \geq 2$ ならば、 $d(v, z) + d(z, w) = d(v, w)$ なる点 z が存在する

(証明のアウトライン)

図において

C^1 は点 v と点 z を結ぶ最短路である
仮定

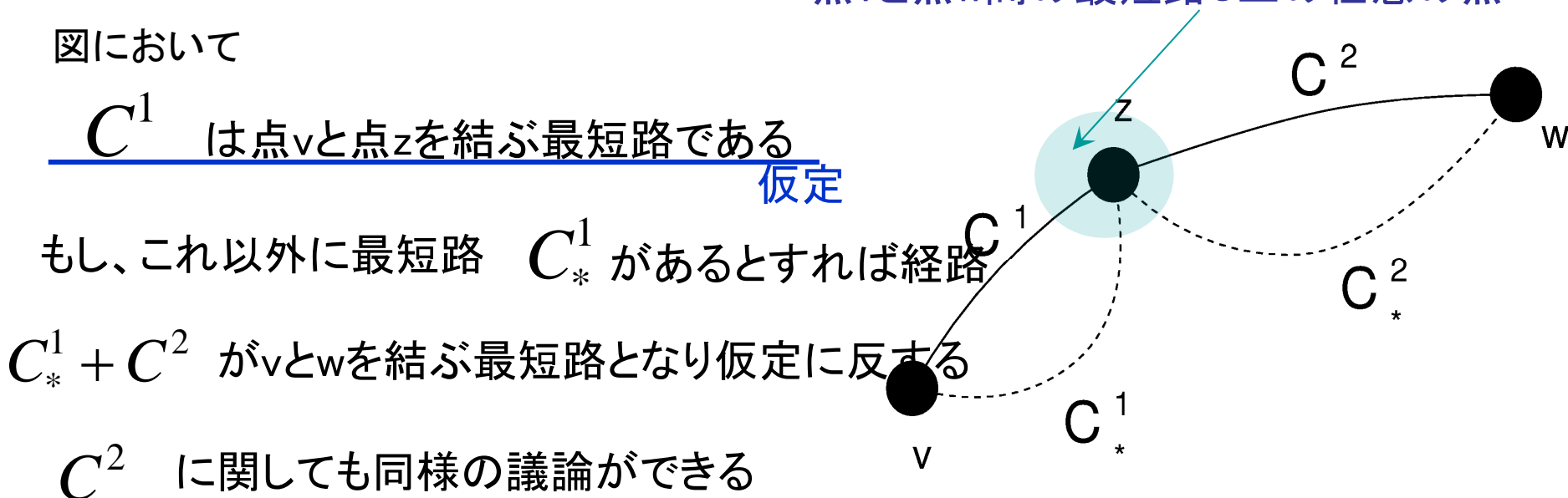
もし、これ以外に最短路 C_*^1 があるとすれば経路

$C_*^1 + C^2$ が v と w を結ぶ最短路となり仮定に反する

C^2 についても同様の議論ができる

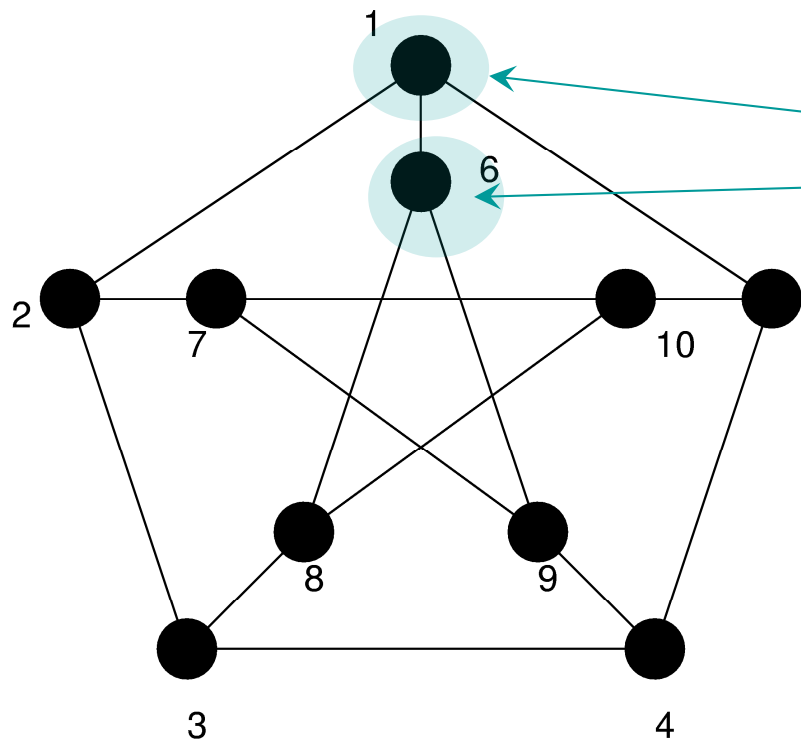
考えるグラフは連結であるから、いつでも C 上に z をとることができる

点 v と点 w 間の最短路 C 上の任意の点



例題4.2 (2)

ピーターソン・グラフにおいて、任意の2点 v, w に対し
 $d(v, w) = 1$ または $d(v, w) = 2$ である



ピーターソン・グラフの対称性から

$$v = 1, v = 6$$

をスタート点を選んだときの可能な経路の
5 長さを調べればよい。実際に調べてみると

$$d(1, 2) = 1, d(1, 3) = 2, \dots, d(1, 10) = 2,$$

$$d(6, 1) = 1, \dots, d(6, 10) = 2$$

となり、満たす。

詳細は講義ノート

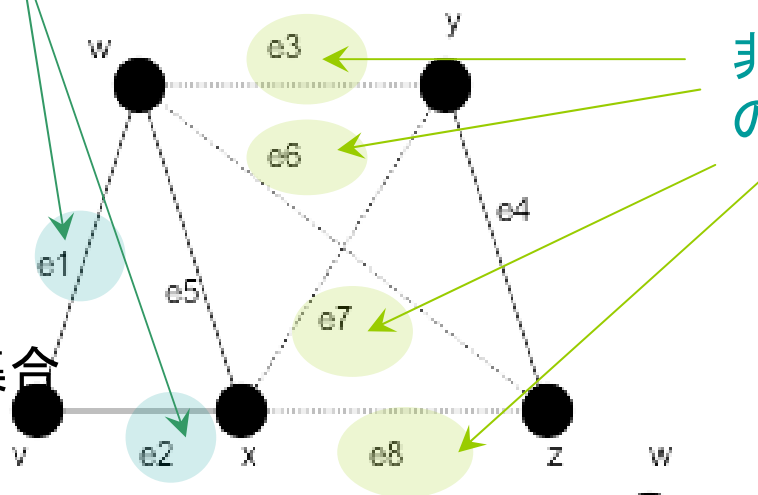
非連結化集合とカットセット

非連結化集合：

それを除去するとグラフが非連結となる辺の集合

要素数最小のカットセット

非連結化集合の各要素



カットセット：

そのどのような部分集合も非連結化集合ではない非連結化集合

辺連結度： $\lambda(G)$

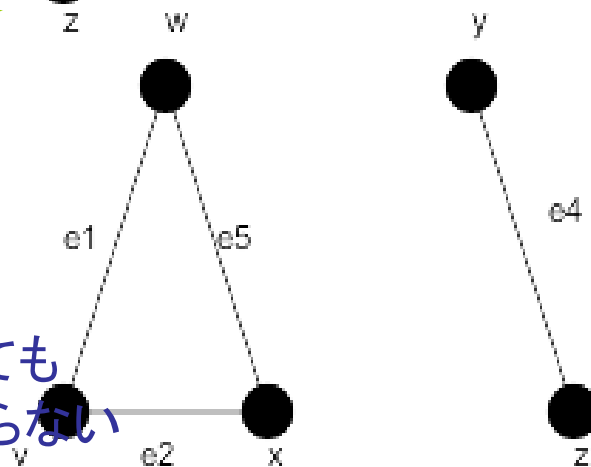
連結グラフの最小なカットセットの大きさ

例に挙げた右図では

$$\lambda(G) = 2$$



この中のどれが抜けても非連結化集合にはならない

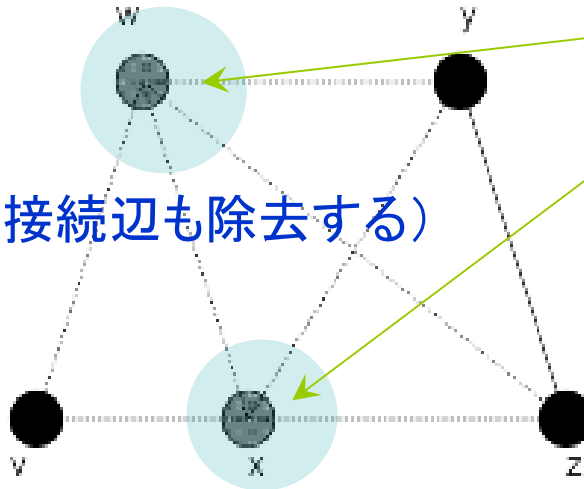


分離集合とカット点

分離集合：

それを除去するとグラフが
非連結となる点の集合

(※点を除去する際にはその接続辺も除去する)



分離集合の各要素

カット点：

1個の点からなる分離集合

連結度：

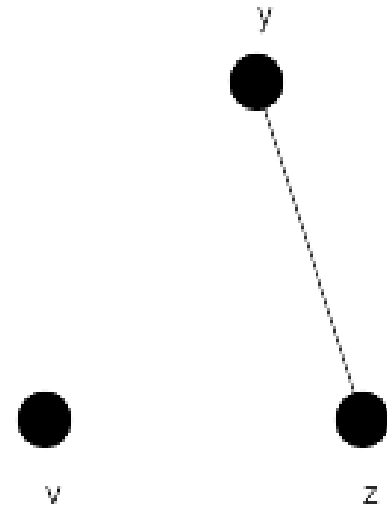
グラフの最小な分離集合の大きさ

図の例では $\kappa(G) = 2$



$\{w, x\}$

分離集合



$\kappa(G) \geq k$ のときグラフGはk連結であるとい

例題4.4 (タイセット行列)

タイセット行列

$$\mathbf{B} = (b_{ij})$$

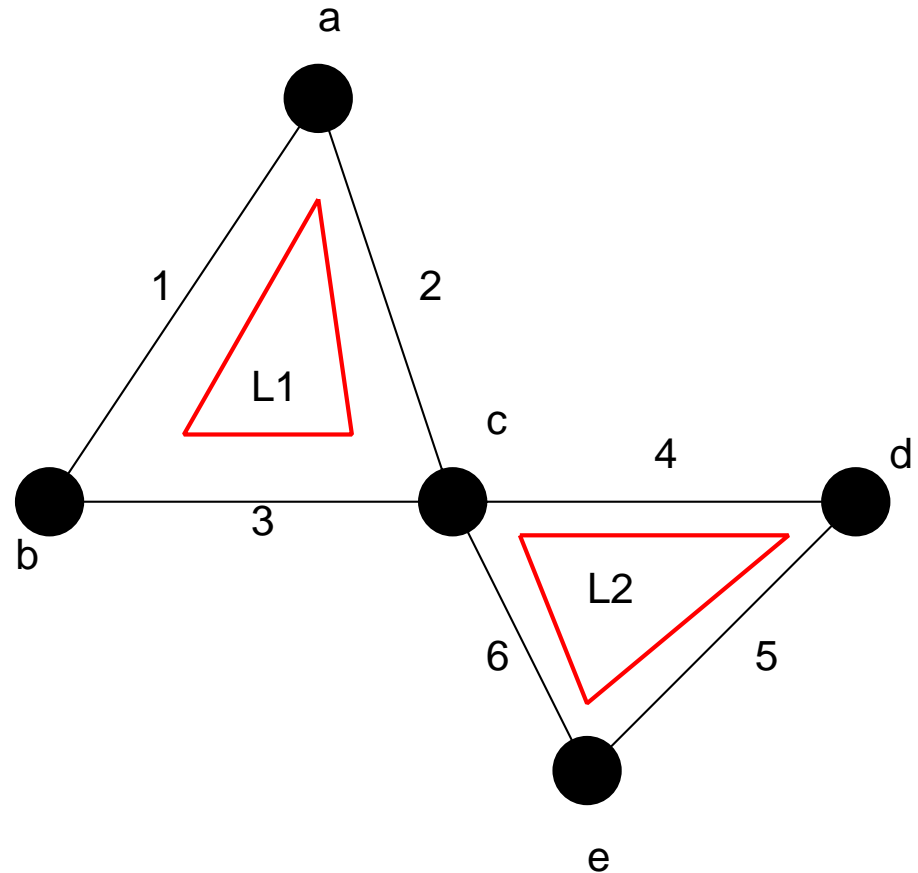
$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & (L_i \text{が枝} j \text{を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

右図の例では

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

閉路L1を構成する辺

閉路L2を構成する辺



例題4.4 #2 (カットセット行列)

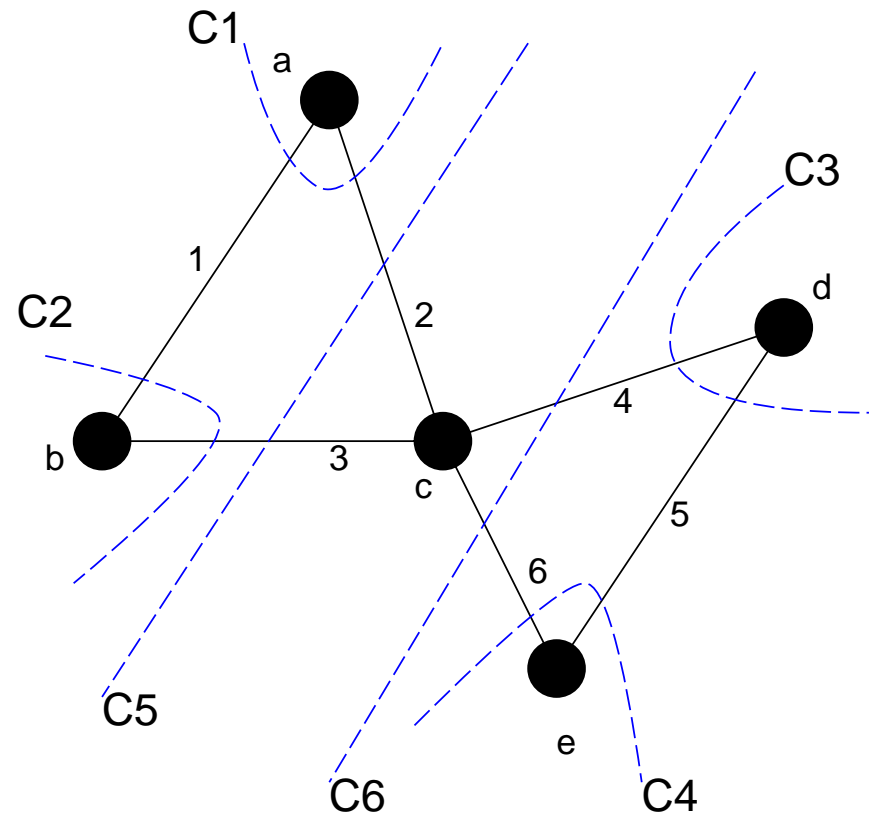
カットセット行列

$$\mathbf{C} = (c_{ij})$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & (C_i \text{が枝} j \text{を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

右図の例では

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



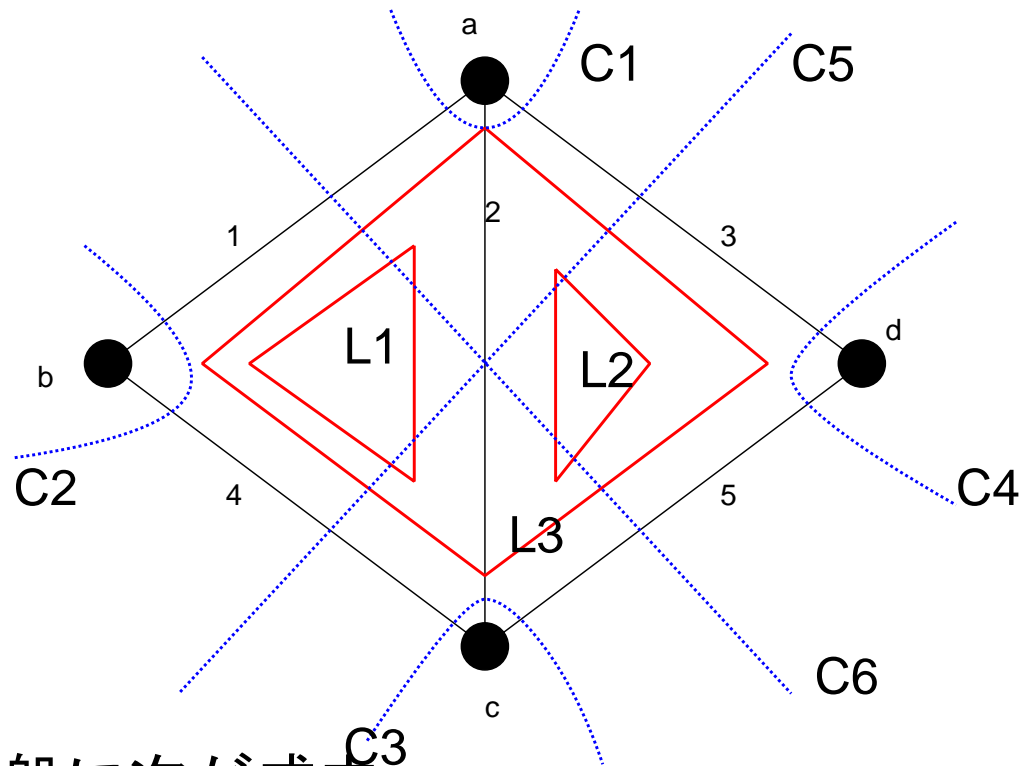
例題4.4 (1)–(3)

タイセット行列

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

カットセット行列

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



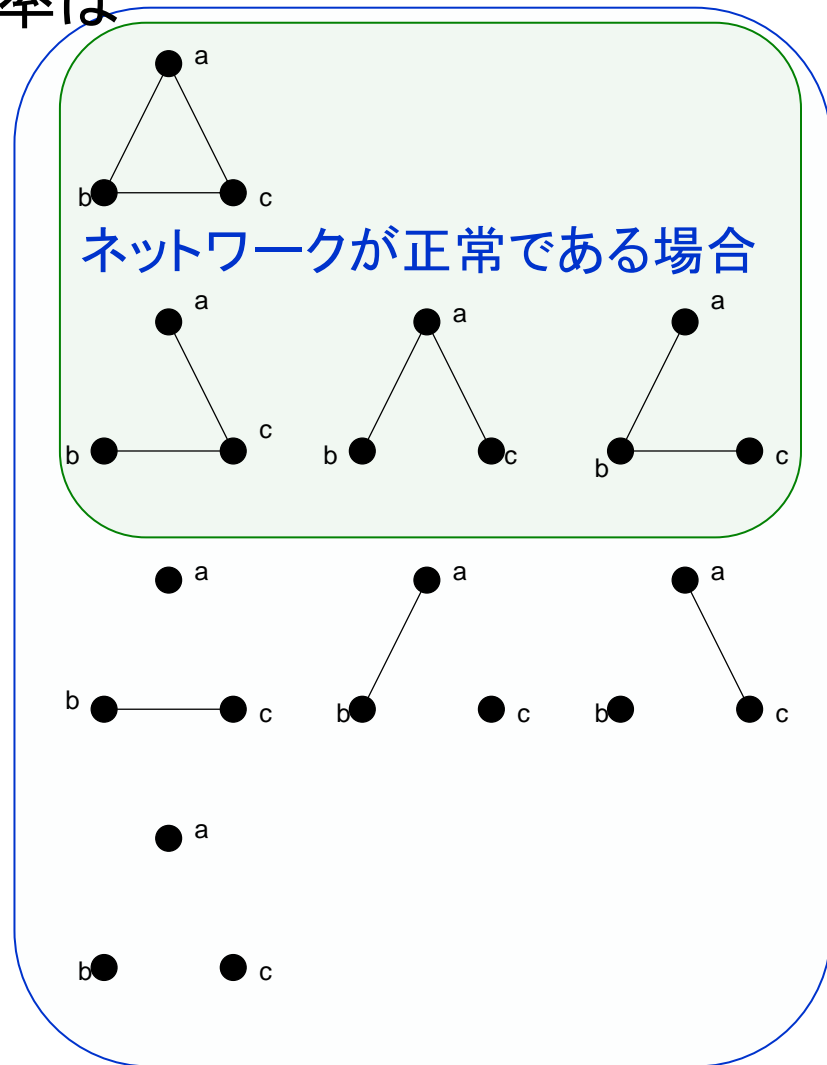
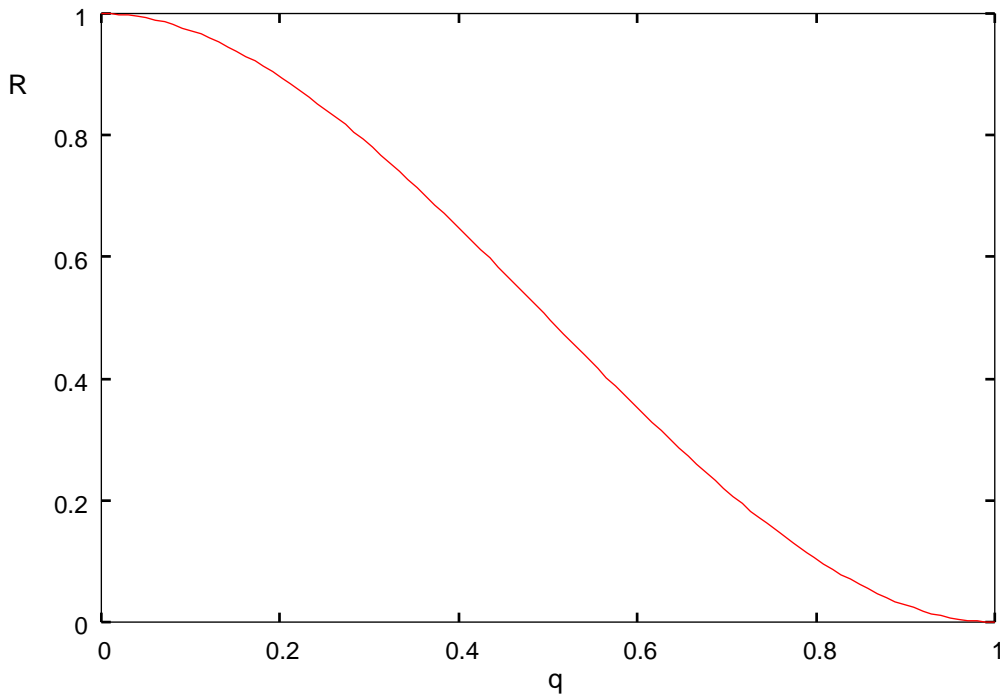
一般に次が成立

$$\mathbf{BC}^T = \mathbf{0} \pmod{2}$$

例題4.5の1

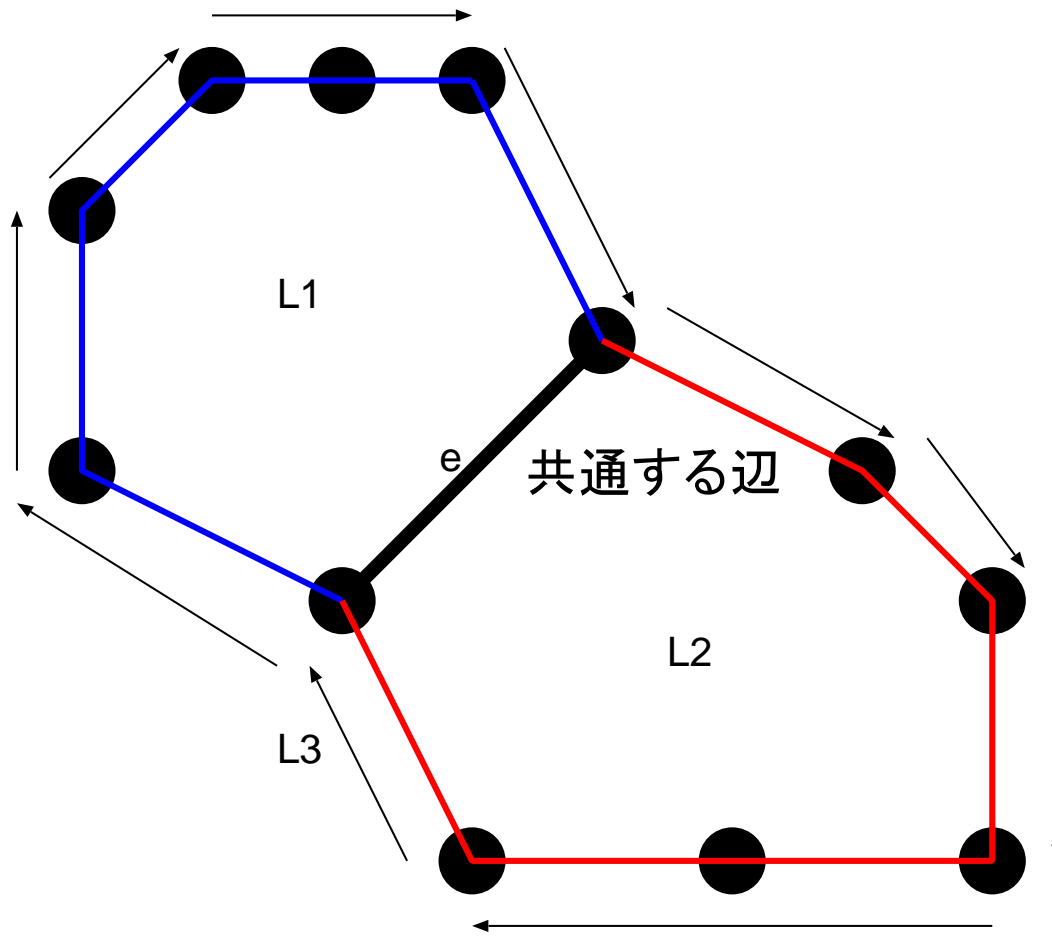
右図より、ネットワークが正常である確率は

$$R(q) = (1-q)^3 + 3q(1-q)^2$$



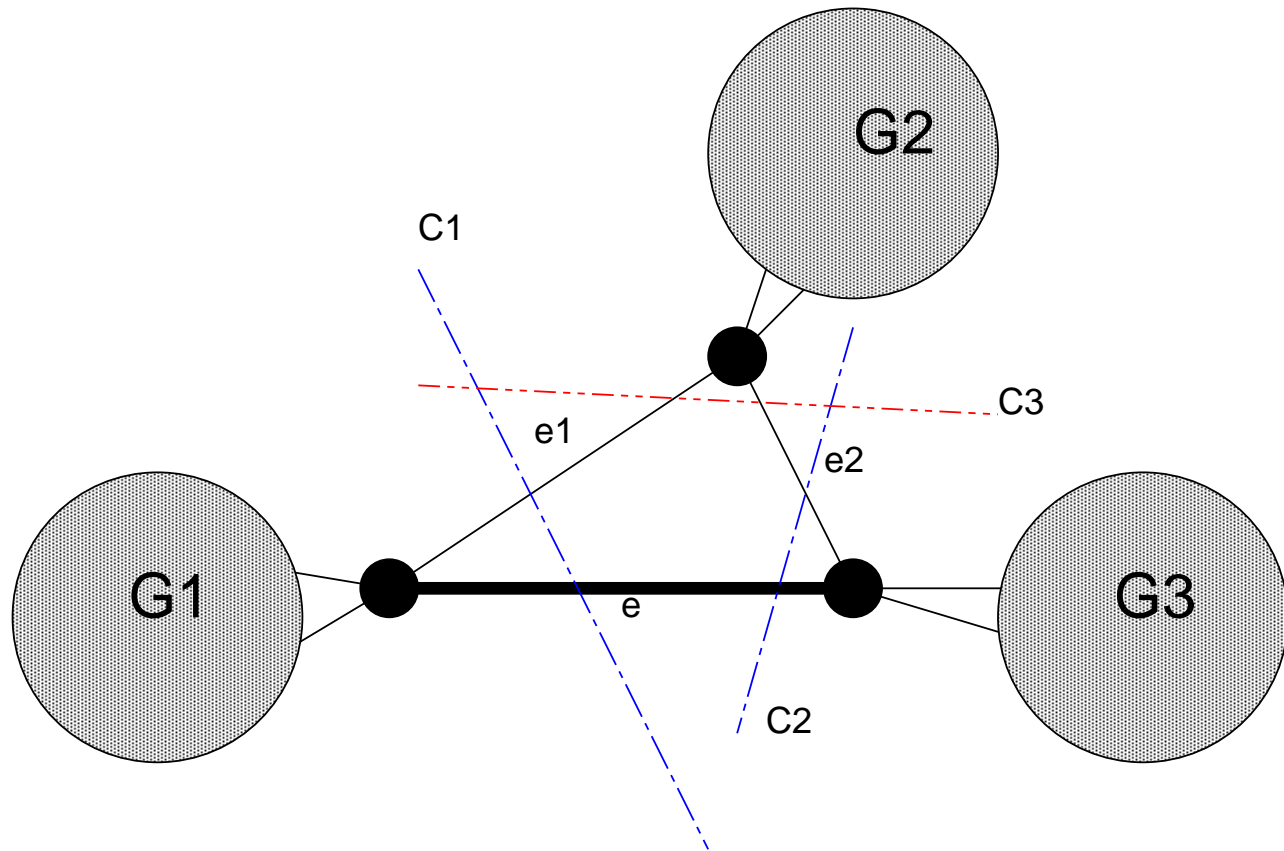
例題4.5の2 (1)

辺 e を含まない閉路として
 $L1, L2$ の和から e を削除してできる閉路 $L3$ を選べる

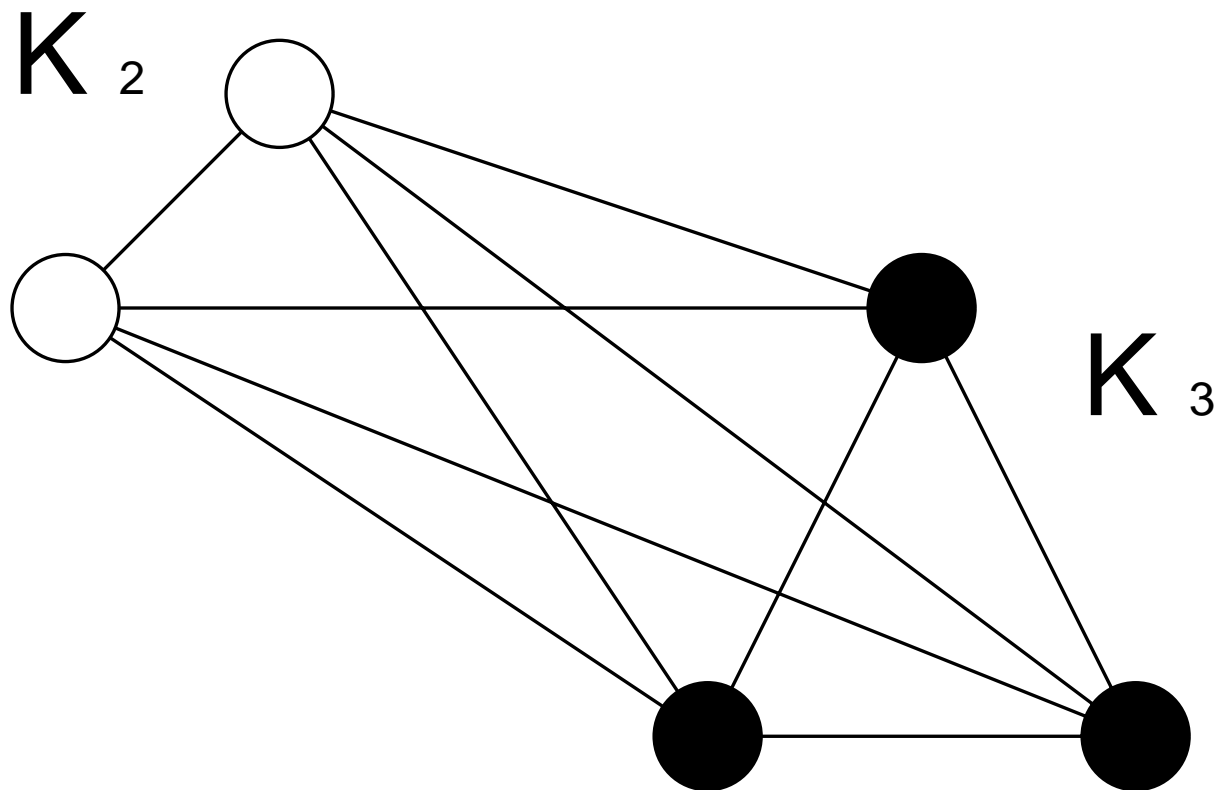


例題4.5の2 (2)

辺 e , e_1, e_2 が三角形をなしている場合にはカットセットとして $\{e, e_1\}$, $\{e, e_2\}$ 以外に必ず $\{e_1, e_2\}$ を選ぶことができる

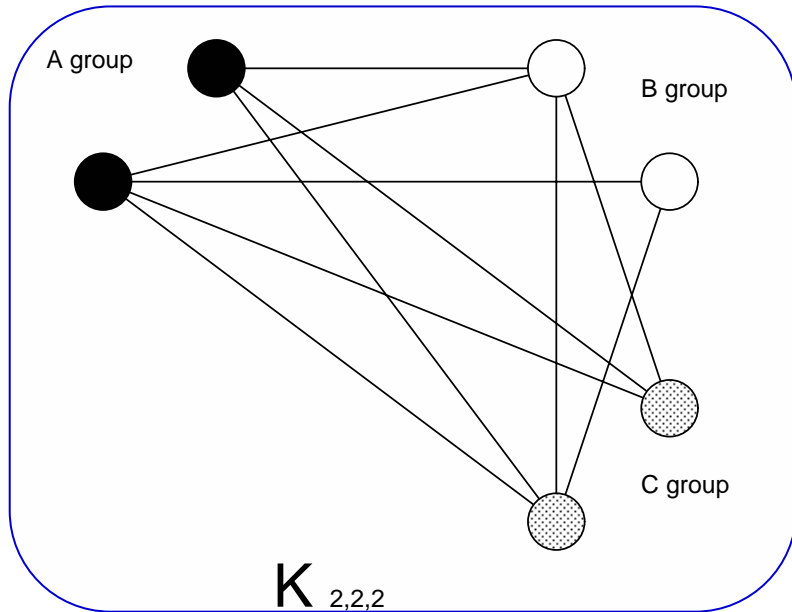


例題4.6 (1)

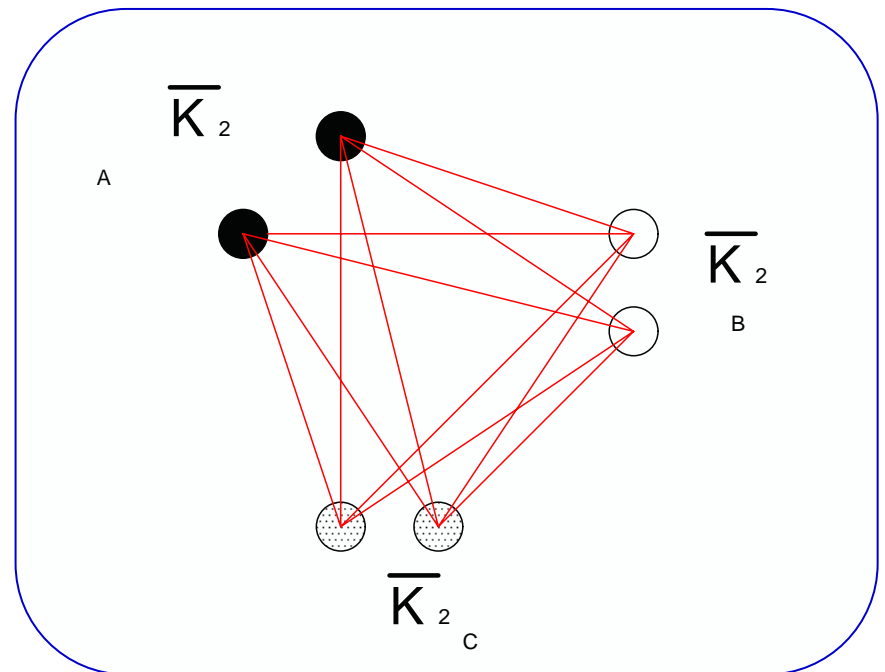
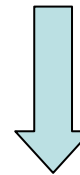


K_2 と K_3 の結び $K_2 + K_3$

例題4.6 (2)



← この両者は同形である



$$E(\overline{K}_2 + \overline{K}_2 + \overline{K}_2)$$

$$= \{u_A u_B \mid u_A \in V(A) \cap u_B \in V(B)\}$$

$$\cup \{u_B u_C \mid u_B \in V(B) \cap u_C \in V(C)\}$$

$$\cup \{u_C u_A \mid u_C \in V(C) \cap u_A \in V(A)\}$$

演習問題4

(1) 任意のグラフ G において、次数が奇数である点の個数は必ず偶数個あることを関係式:

$$\sum_{u \in V(G)} \deg(u) = 2\epsilon(G)$$

を用いて示せ.

(2) 単純グラフ G の点の個数が 2 以上ならば、 G には必ず同じ次数を持つ 2 つの点が存在することを示せ.

完全に証明できなくても、考察過程を全てレポートに書くこと