

# グラフ理論 #6

第6回講義 5月28日

--- 木とその性質 ---

情報科学研究科 井上純一

[http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

# 演習問題5の1の解答例

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{を確認する}$$

まずは点数の少ない簡単な  $D_1 = (3, 2, 2, 1)$  に対して条件式の成立を確かめてみる.  $d_1 = 3, d_2 = 2, d_3 = 2, d_4 = 1$  であるから,  $\sum_{i=1}^4 d_i = 8$  であり偶数. また,  $k = 1$  の場合には  $i = 2, 3, 4$  に対して  $\min\{1, d_i\} = 1$  であるから

$$\sum_{i=1}^1 d_i = 3 \leq 1 \cdot (1-1) + 1 + 1 + 1 = 3$$

となり, 成立.  $k = 2, 3, 4$  の場合も同様にして

$$\sum_{i=1}^2 d_i = 5 \leq 2 \cdot (2-1) + 2 + 1 = 5$$

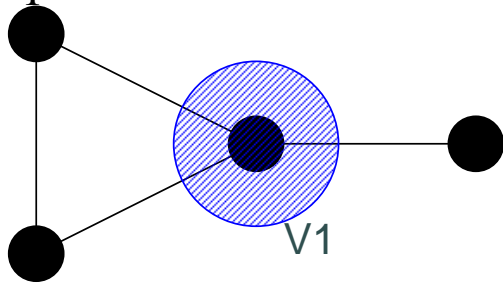
$$\sum_{i=1}^3 d_i = 7 \leq 3 \cdot (3-1) + 1 = 7$$

$$\sum_{i=1}^4 d_i = 8 \leq 4 \cdot (4-1) = 12$$

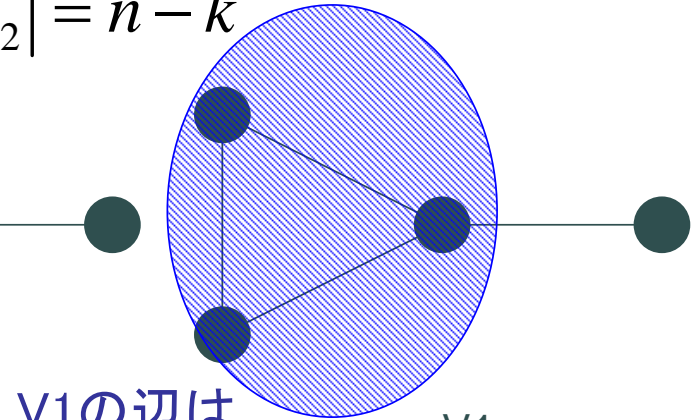
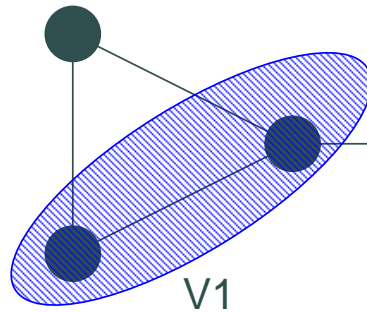
不等式が成立

# 演習問題5 の1の解答例

$$D_1 = (3, 2, 2, 1)$$



$$|V_1| = k, |V_2| = n - k$$



V1の辺は  
完全グラフになるとき最大

V1の次数は

$$\sum_{i=1}^k d_i = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \varepsilon_1 \leq \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}, \quad \varepsilon_2 = \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}$$

従って

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

# 演習問題5 の2の解答例

問題のように各グラフがつながっているとすれば

$$\begin{aligned}\varepsilon(C_{m,n}) &= m^2 + \frac{m(m-1)}{2} + m(n-2m) + \frac{(n-2m)(n-2m-1)}{2} \\ &= \frac{3}{2} \left\{ m + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} - n \right) \right\}^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} - n \right)^2 + \frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}\quad (79)$$

従って、 $\varepsilon(C_{m,n})$  を最小にする  $m$  の値は

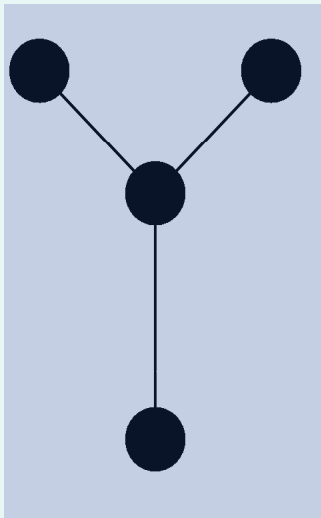
$$m = \frac{n}{3} - \frac{1}{6}\quad (80)$$

であり、そのときの最小値は  $n(n-1)/3 - 1/24$  となる。ただし、 $m, n$  は整数であるべきなので、 $n$  が与えられた場合の最小値を与える  $m$  は (80) に最も近い整数値となる。

# 木と林

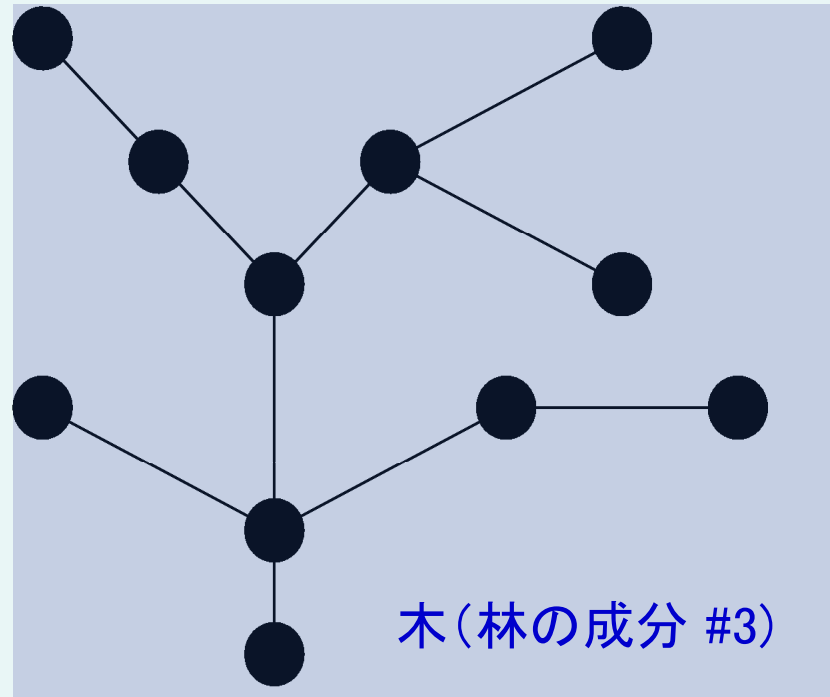
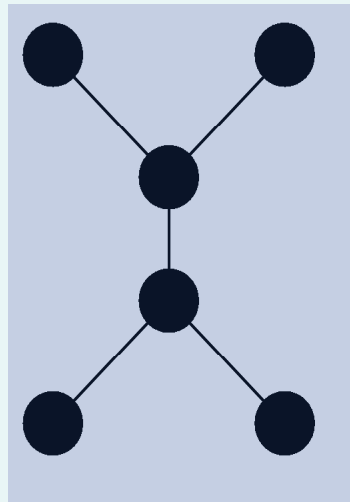
林 (forest) : 閉路を含まないグラフ

木 (tree) : 連結な林



木 (林の成分 #1)

木 (林の成分 #2)



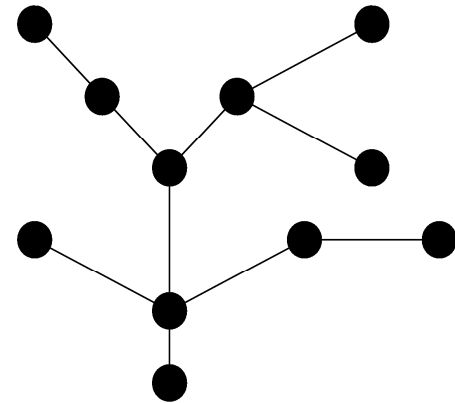
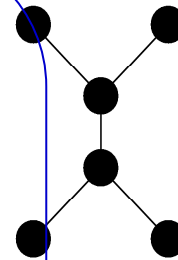
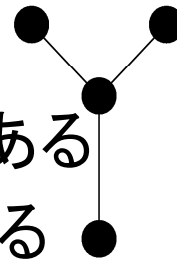
木 (林の成分 #3)

林

# 定理9・1

点 $n$ 個からなるグラフ $T$ に対し、次の各命題は同値である

- (i)  $T$ は木である
- (ii)  $T$ には閉路が無く、辺が $n-1$ 本ある
- (iii)  $T$ は連結であり、辺が $n-1$ 本ある
- (iv)  $T$ は連結であり、全ての辺は橋である
- (v)  $T$ の任意の2点を結ぶ道は丁度1本である
- (iv)  $T$ に閉路は無いが  
新しい辺をどのように加えても  
閉路ができ、しかも、1個の閉路である



# 系9・2

林Gにはn個の点とk個の成分があるとする。  
このとき、林Gにはn-k本の辺がある

(証明)

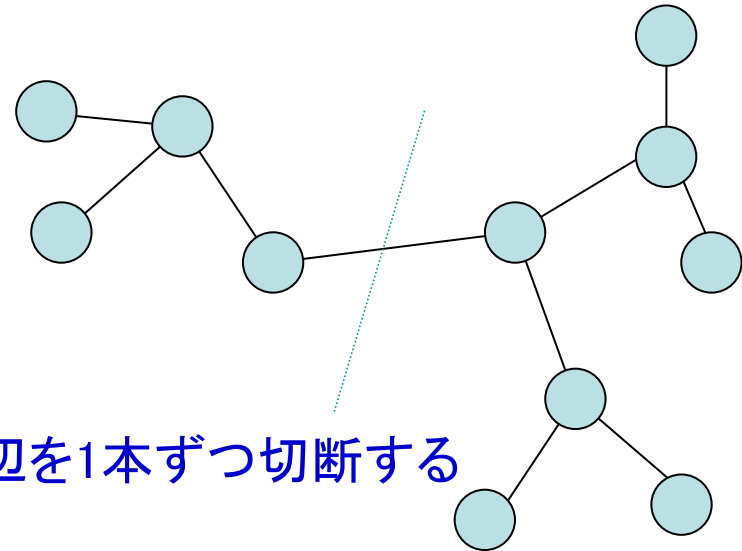
閉路が無く連結であるとする、n-1本の辺がある。これから辺を1本ずつ切断する操作を進めると

1本辺を切断 ⇒ 成分 2、辺数 n-2

2本辺を切断 ⇒ 成分 3、辺数 n-3

.....

K-1 本辺を切断 ⇒ 成分 k、辺数 n-k



# 系9・3

単点でない木は、少なくとも2点の端点を含む

(証明) 木T :  $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ , <sup>点数</sup>

$p \geq 2, E(T) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$

木の辺の本数は

$$q = p - 1$$

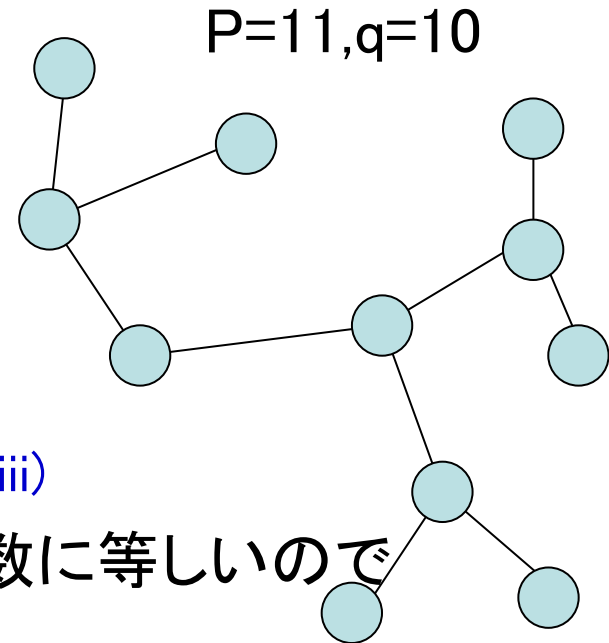
<sup>辺数</sup>

定理9.1 (iii)

握手補題より、辺の総数の2倍はグラフの次数に等しいので

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q = 2(p-1)$$

木の端点 <sup>$i=1$</sup> が2つ、つまり、 $p=0,1$ であるとする  
点の数が2以上であるグラフの次数( $>0$ )の定義に反する。

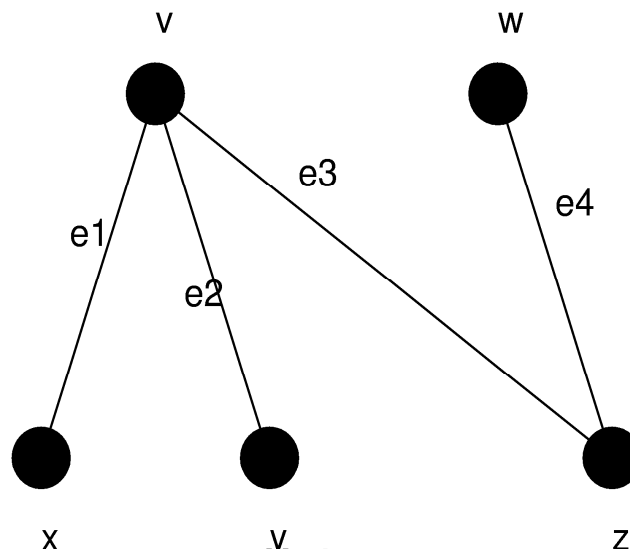
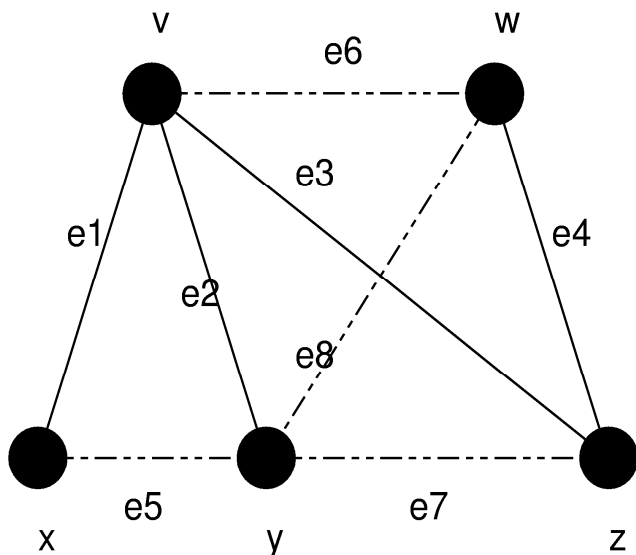




# 全域木と全域林

全域木 (spanning tree) :

連結グラフGに対し、閉路が無くなるまで辺を除去して残るグラフ



閉路階数 :

$$\gamma(G) = m - n + k = 4$$

(全域林(木)を得るために切断すべき辺の本数)

カットセット階数 :

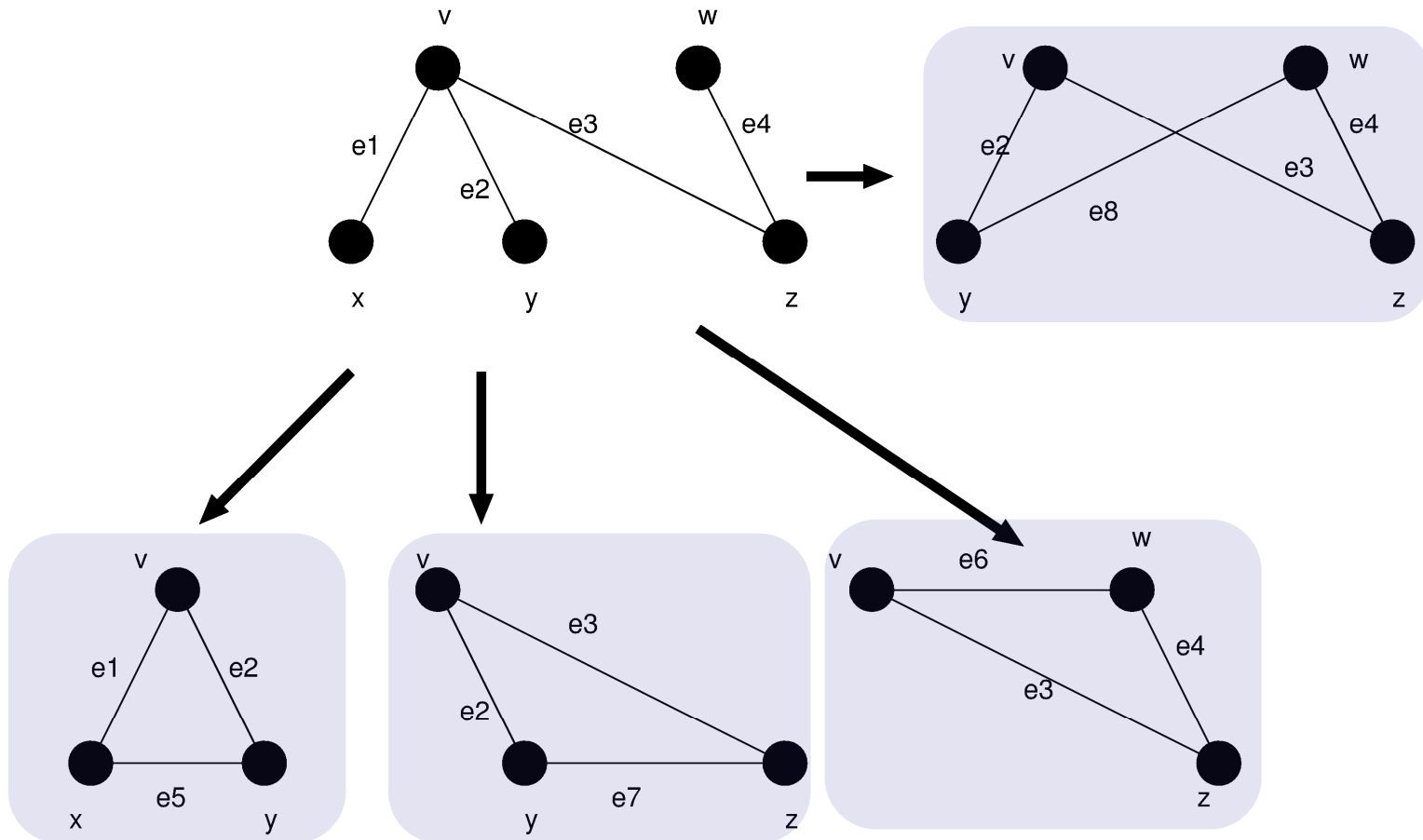
$$\xi(G) = n - k = 4$$

(全域木の辺数)

全域林 (spanning forest) : n個の点とm本の辺、k個の成分があるとし、Gの各成分に対し、閉路が無くなるまで辺を除去する操作を繰り返し得られるグラフ

# 基本閉路集合

基本閉路集合：Tに含まれないGの任意の辺を一つTに付加すると一つずつできる閉路の集合



# 基本カットセット集合

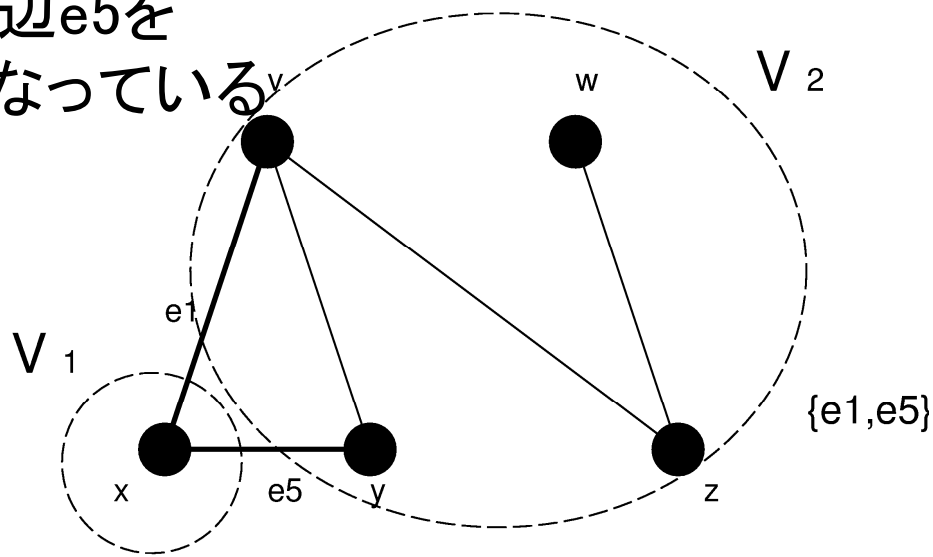
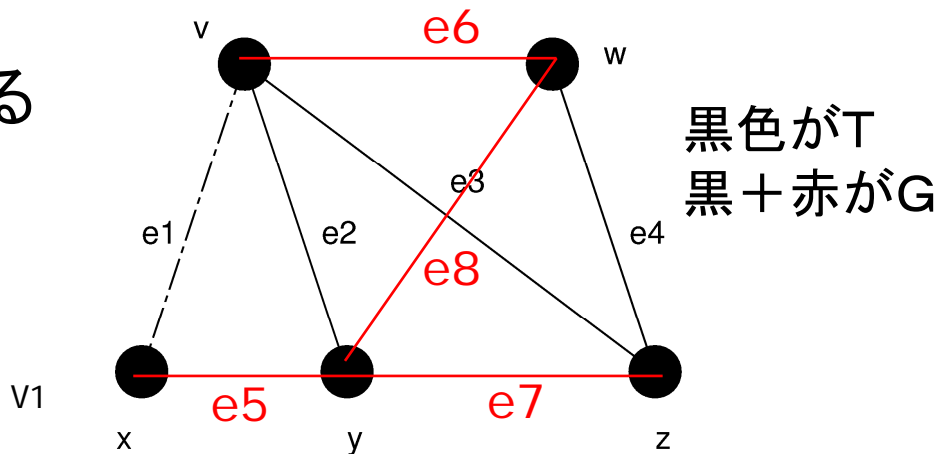
## 基本カットセット集合

: Tの各辺を除去して得られる  
カットセット集合

e1で木を切断するとV1とV2  
に分離する。

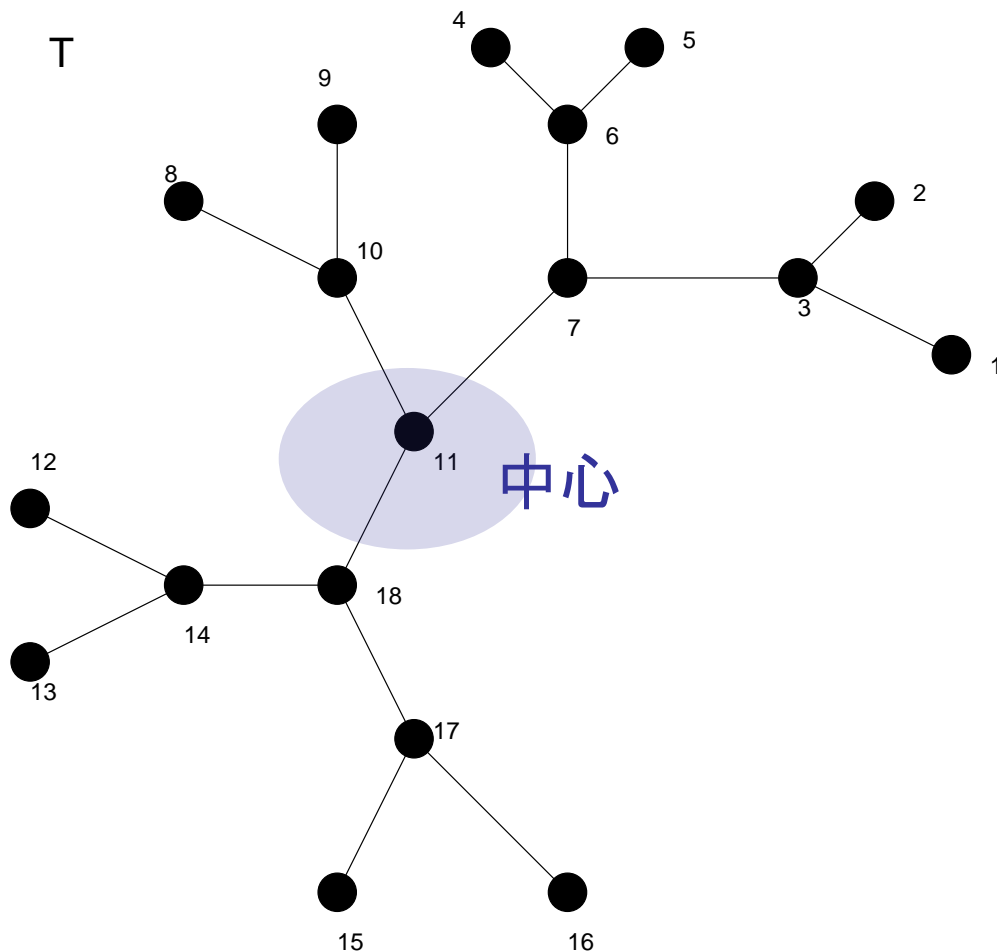
このe1とGでV1に接続していた辺e5を  
組んだものはGのカットセットとなっている

この他にも  
(e2, e5, e7, e8)  
などがある。



# 例題7.1 (1)

グラフGの中心：他点との間の距離の最大値ができるだけ小さい点v



端点を削除していく

1回目に削除される点  
{1,2,4,5,8,9,12,13,15,16}

2回目に削除される点  
{3,6,10,14,17}

最後に削除される点  
{7,18}

# 例題7.1 (2)

(I) 点1に接続している成分と  
点2に接続している成分が等しい場合

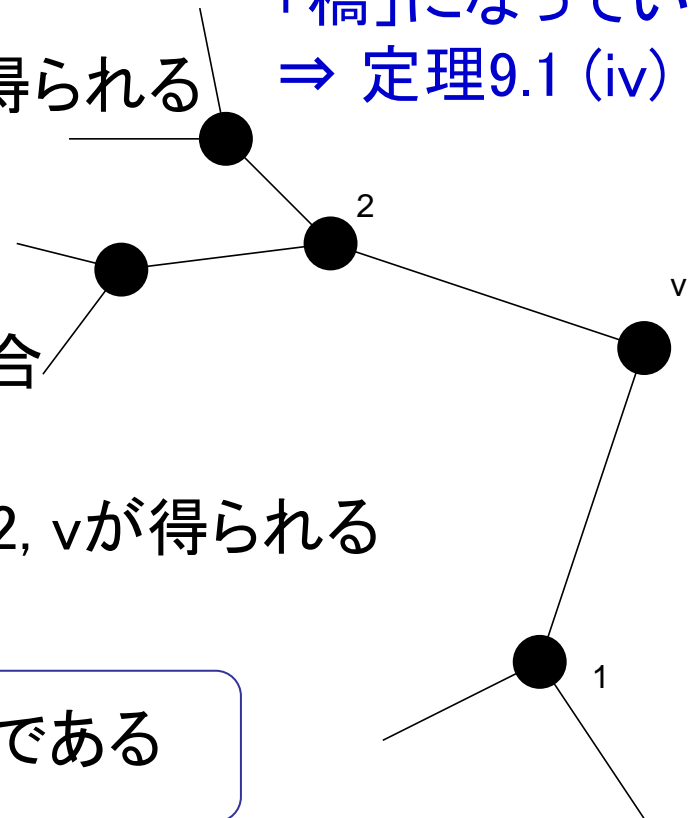
⇒ 辺 $2v$ ,  $v1$ を削除して中心 $v$ が得られる

木の全ての辺は  
「橋」になっている  
⇒ 定理9.1 (iv)

(II) 点2に接続している成分  
> 点1に接続している成分の場合

⇒ 辺 $v1$ を削除して、2つの中心 $2$ ,  $v$ が得られる

どんな木でも中心は1つか2つである

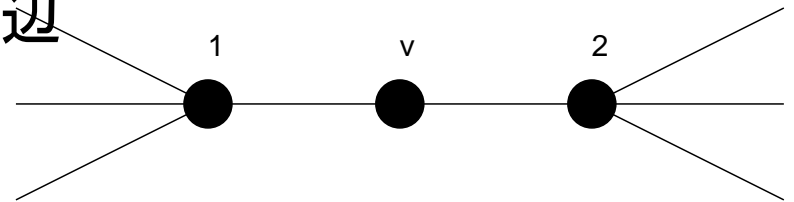


# 例題7.1 (3)(4)

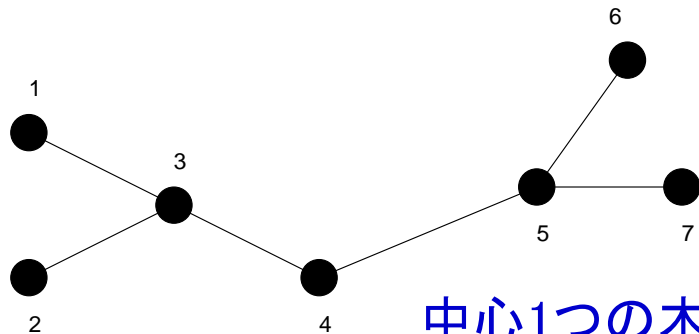
木の中心が2つあり、それらが隣接していないと仮定する。

このとき、中心1,2は点vを介して接続している

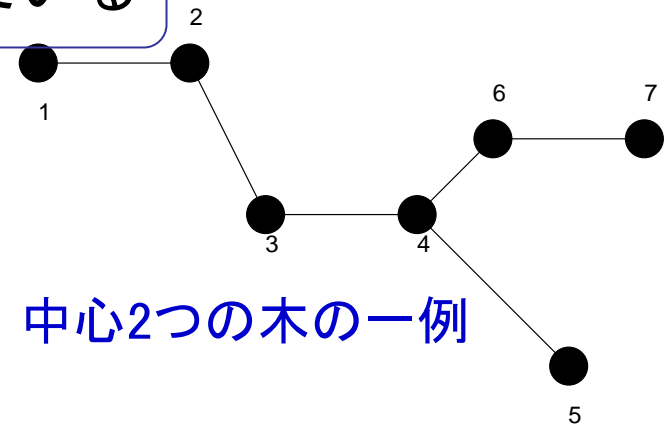
このとき、点1,2とこの中心vの接続辺を除去すると、中心がvの1つになるので仮定に反する。



木の中心が2つある場合、それは隣接している

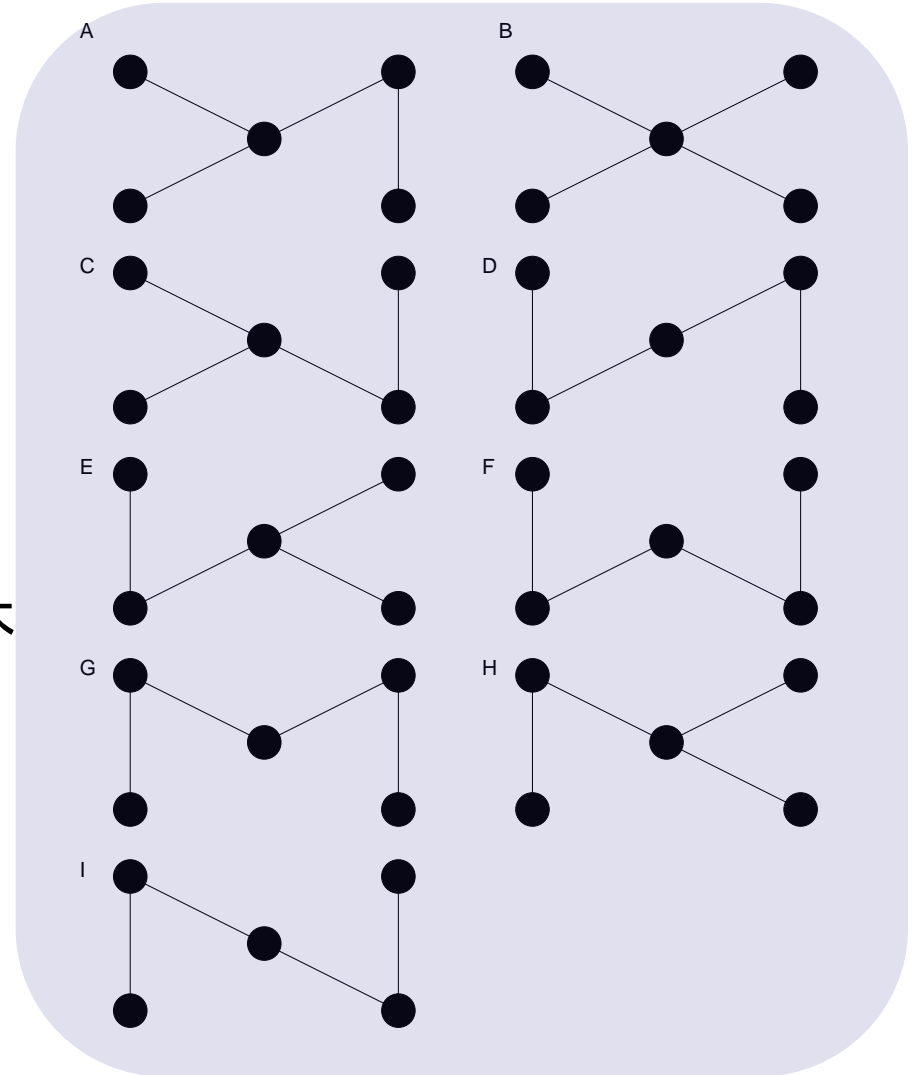
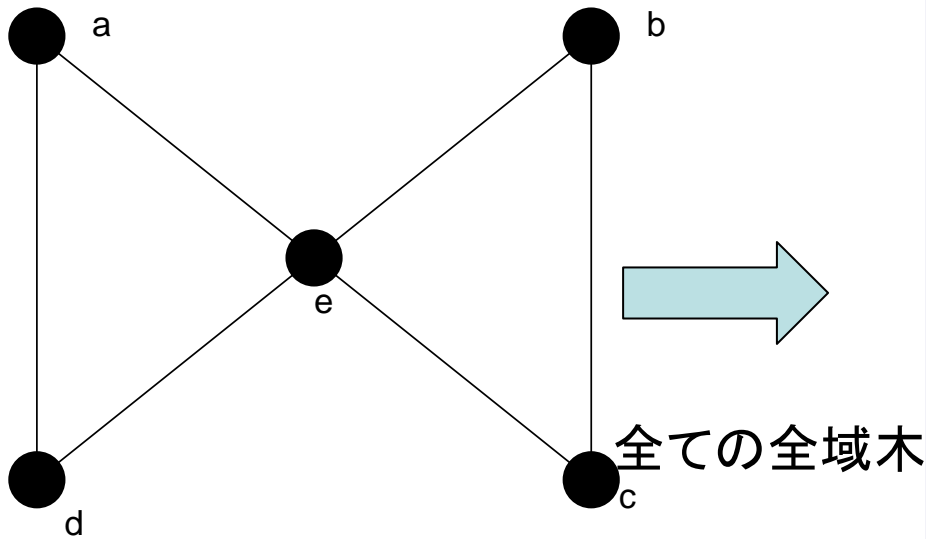


中心1つの木の一例

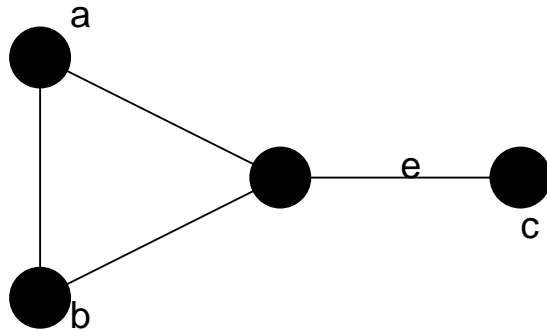


中心2つの木の一例

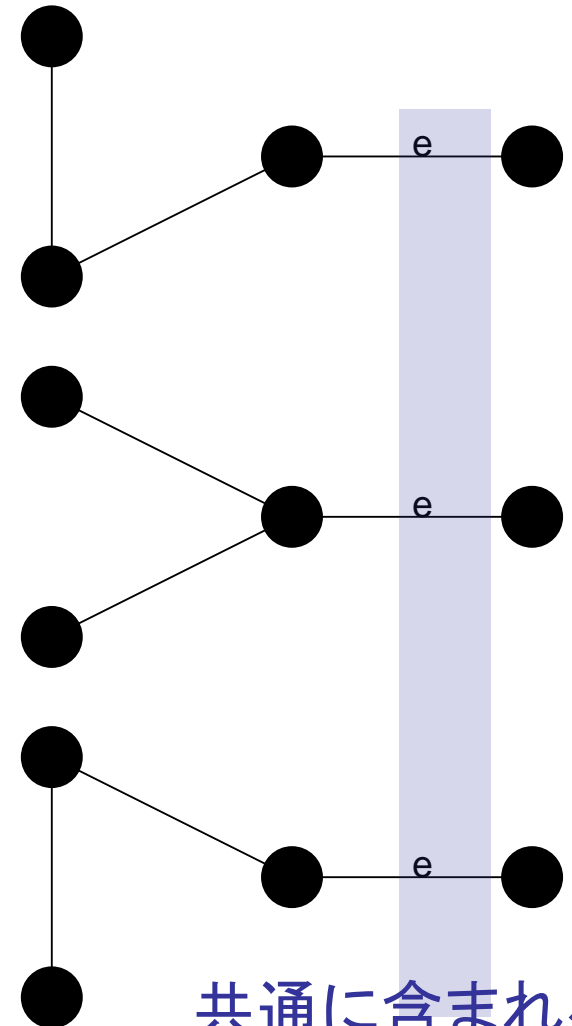
# 例題7.2 (1)



# 例題7.2 (2)



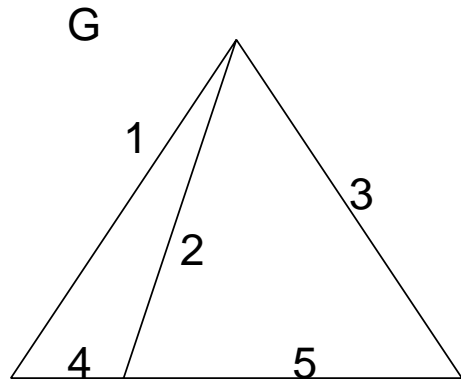
グラフGの辺集合 $C^*$ が、Gのどの全域木にも共通するならば、 $C^*$ はカットセットである



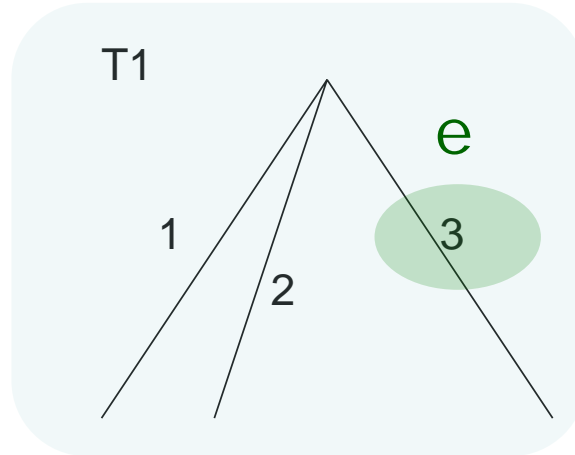
共通に含まれる辺



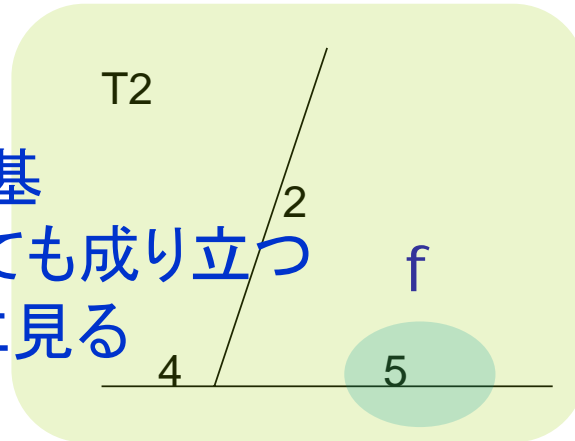
# 例題7.3 (1)



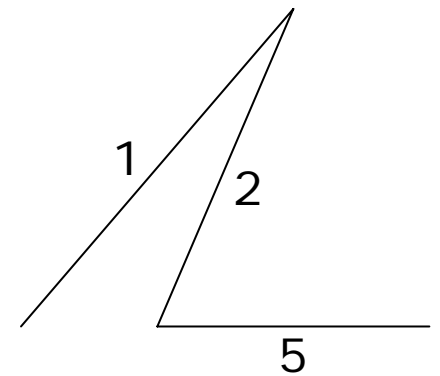
ここで考えるグラフG



$$T_1 - e \cup f$$



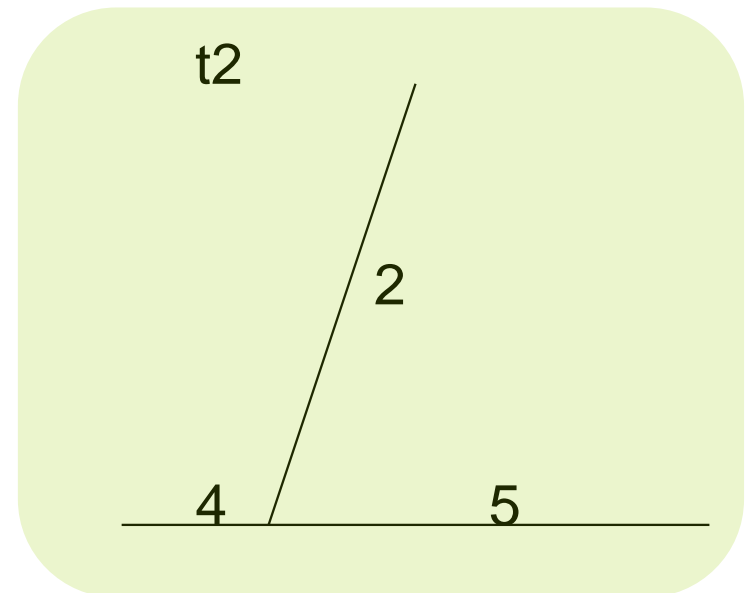
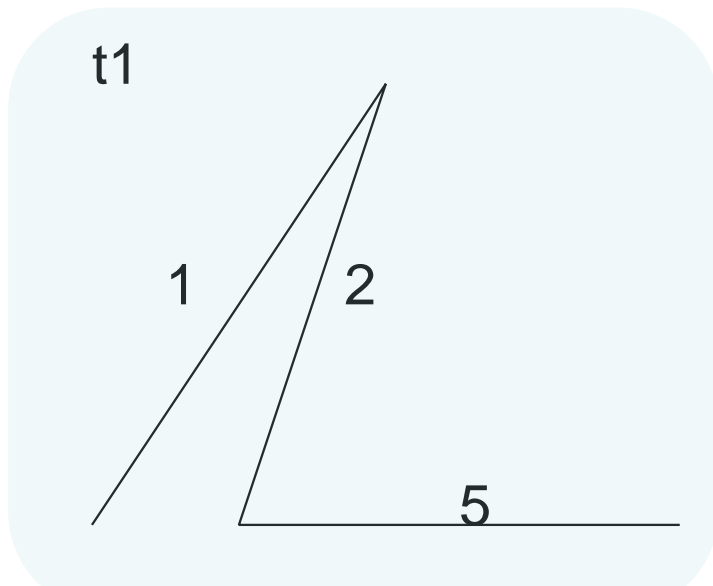
T1, T2 : ベクトル空間の基  
T1, T2の元を  $e, f$  としても成り立つ  
⇒ マトroid理論で後に見る



これもグラフGの  
全域木である

# 例題7.3 (2)

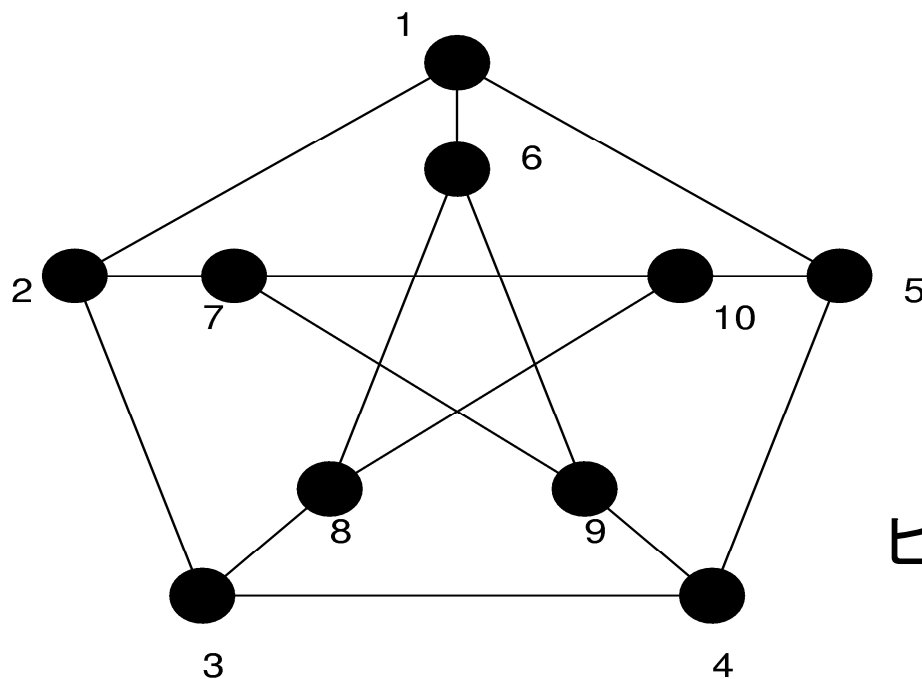
$$T_1 - \{e = 3\} \cup \{f = 5\} \simeq t_1$$



中間にできるグラフもやはり  $t_1 - \{e = 1\} \cup \{f = 4\} \simeq t_2 = T_2$   
グラフGの全域木になっている

# 演習問題6

- (1) ピーターソン・グラフの全域木を一つ描け.
- (2) グラフ  $G$  は  $\varepsilon$  の辺数と  $|G|$  個の点を含むとする. このとき,  $G$  の任意の全域木に対し,  $\varepsilon - |G| + 1$  個の基本閉路が存在することを (1) の  $G \equiv$  ピーターソン・グラフ に関して示し, 次いで, 任意のグラフ  $G$  に対して示せ.



ピーターソン・グラフ