

# グラフ理論 #8

第8回講義 6月11日

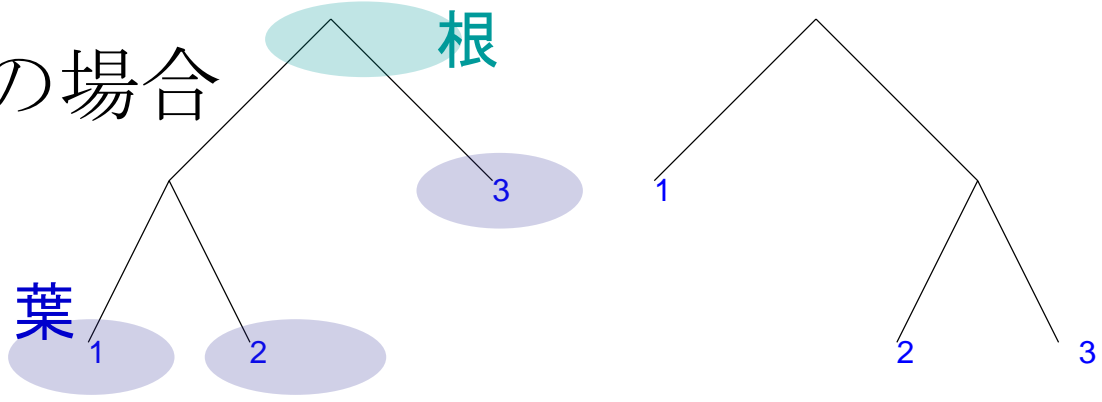
--- 平面グラフ ---

情報科学研究科 井上純一

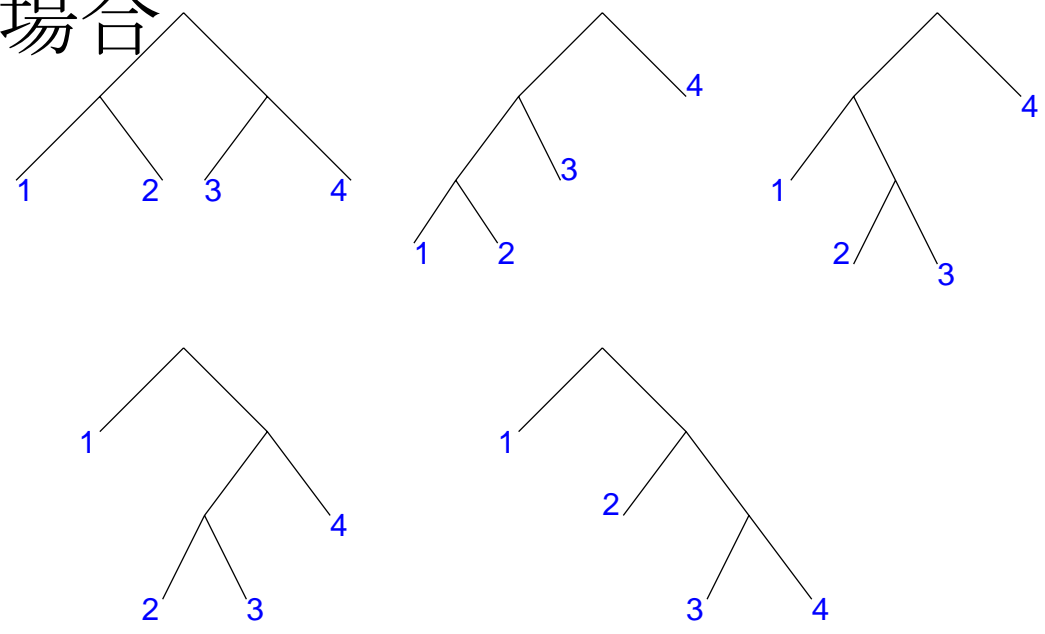
[http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

# 演習問題7 の解答例

$n = 3, p_3 = 2$  の場合



$n = 4, p_4 = 5$  の場合



# 演習問題7 の解答例

2分木生成多項式

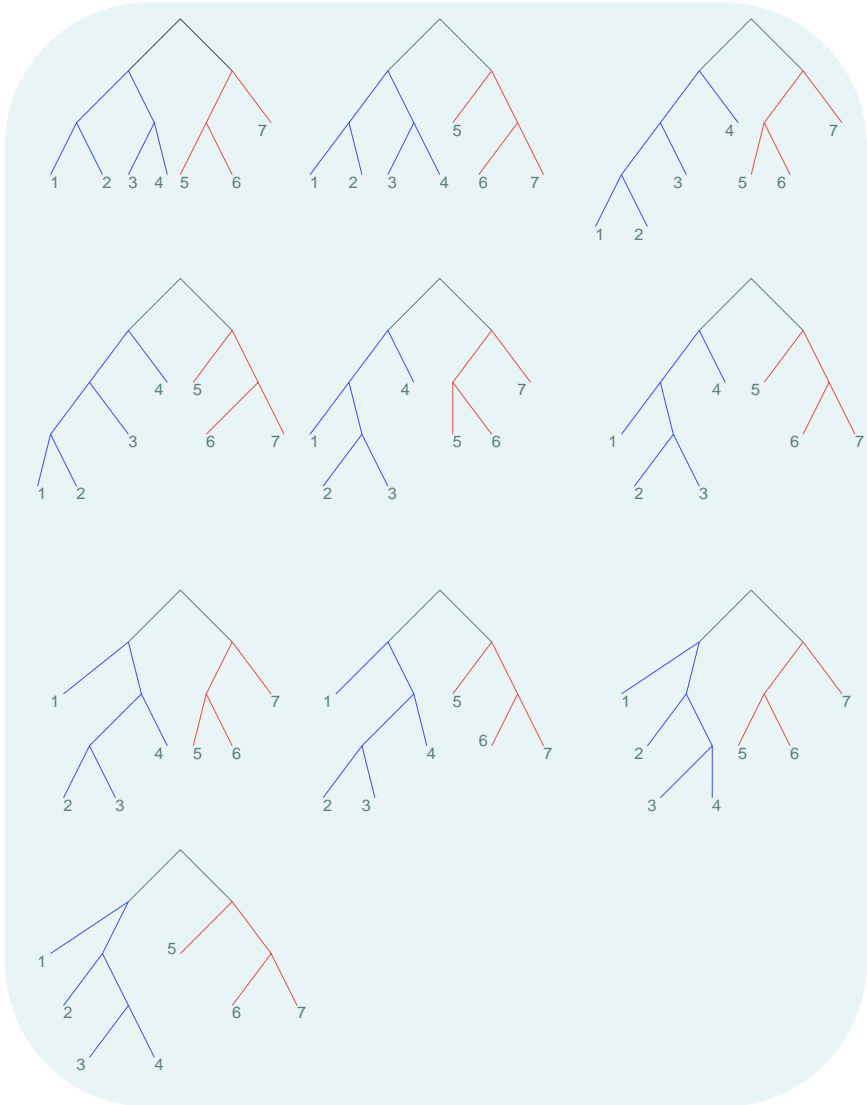
$$P(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n + \dots$$

右図の操作を表す

$$P(x) = x + \{P(x)\}^2$$

右図の操作で  
このn=1のグラフは  
作れないことからくる

P(x)について解いてみる



# 演習問題7 の解答例

$$P(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

変数  $x$  の冪関数へと展開すると

$$P(x) = x + \sum_{i=2}^n \frac{2^{i-1} \sum_{k=2}^i (2k-3)}{i!} x^i = \sum_{i=1}^n \frac{2^{i-1} (2i-3)!!}{i!} x^i$$

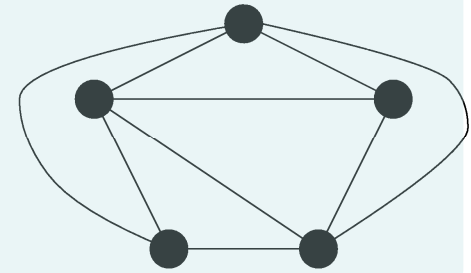
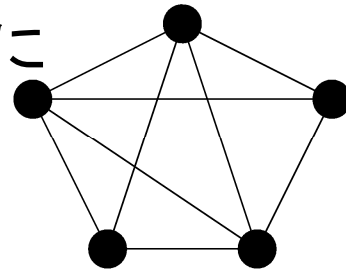
結局

$$P_n = \frac{2^{n-1} (2n-3)!!}{n!}$$

# 平面グラフ：定義など

平面グラフ：

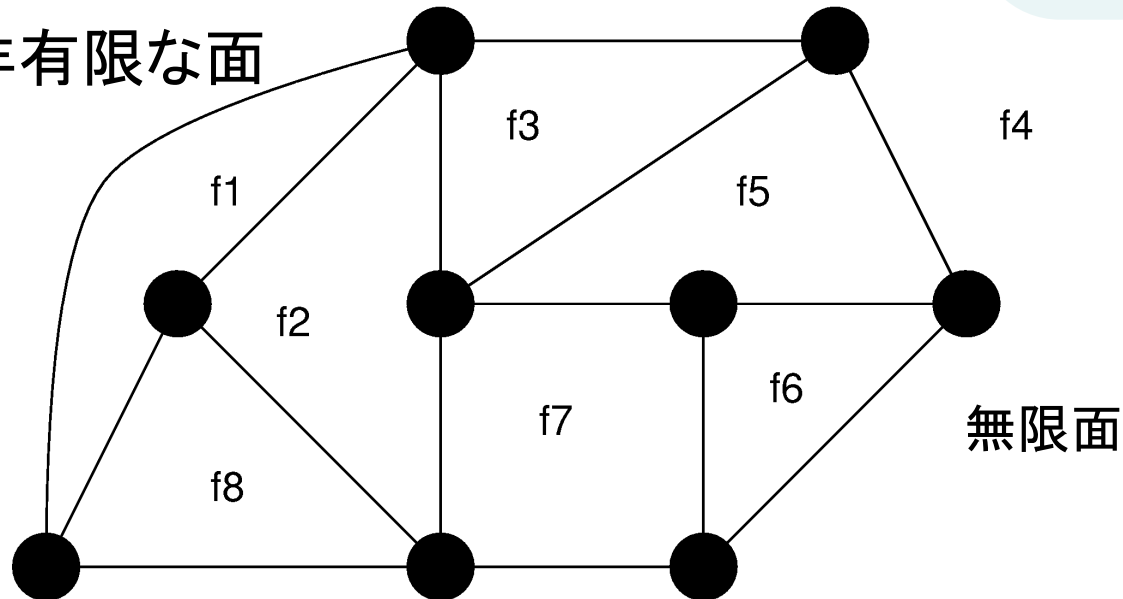
どの2つの辺も、それが隣接する点以外では幾何学的に交差しないように描かれたグラフ



平面描写可能

面：辺によって分割される領域

無限面：非有限な面



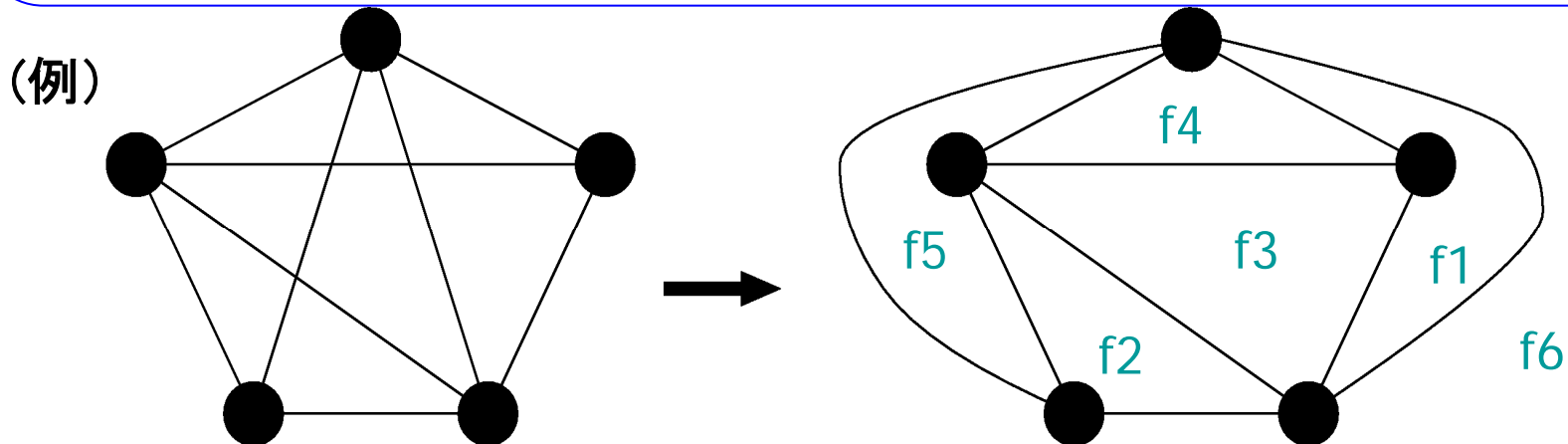
# オイラーの公式

グラフ $G$ を連結な平面グラフとすると、次の公式が成り立つ

$$n - m + f = 2$$

$n$ : 点数、 $m$ : 辺数、 $f$ : 面数

オイラーの公式



$$n = 5, f = 6, m = 9 \text{ より}$$

$$n - m + f = 5 - 9 + 6 = 2 \text{ と成立するので平面描写可能}$$

# オイラーの公式の証明 #1

辺数  $m$  に関する数学的帰納法により証明する

$m = 0: n = 1, f = 1$  (無限面)

$\therefore n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2$  で成立

$m=0$  の場合

○  $n=1$

$f=1$  (無限面)

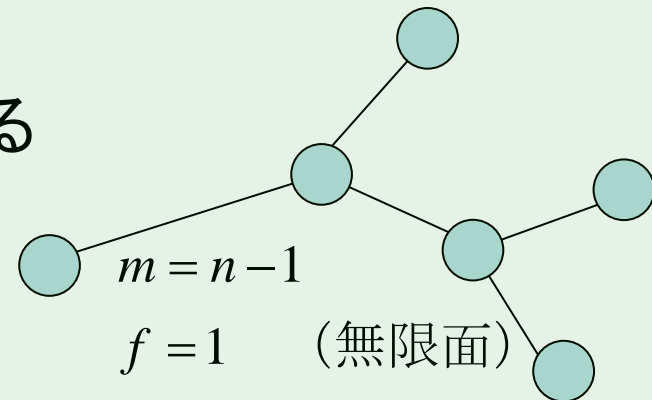
「 $m-1$ 本以下の辺をもつ全てのグラフ $G$ に対して公式が成立する」と仮定する

(※注)

$G$ が木の場合には特別な事情がある

$$n - (n - 1) + 1 = 2$$

(任意の $m$ に対して常に成立)



以下の議論では木を除く一般の連結グラフ  $G$  について考える

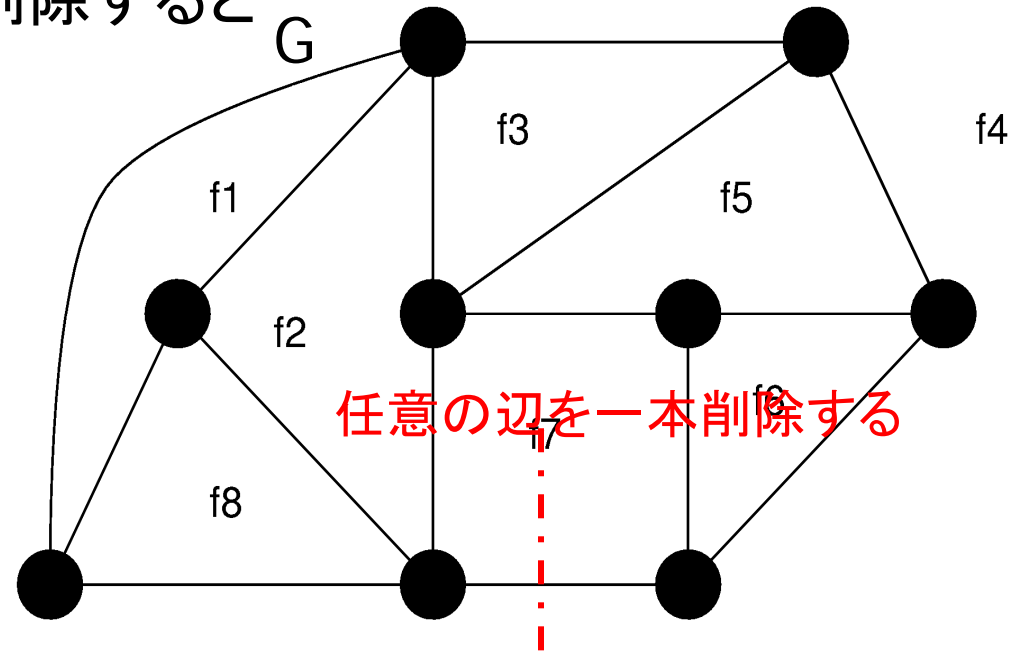
# オイラーの公式の証明 #2

グラフ  $G$  の任意の辺を一本削除すると

$$n \Rightarrow n$$

$$m \Rightarrow m - 1$$

$$f \Rightarrow f - 1$$



仮定により、このセットに対してオイラーの公式が成立すべきである

$$n - (m - 1) + f - 1 = 2$$

$\Rightarrow$  任意の変数に対して公式は成立

$$\therefore n - m + f = 2$$

証明終わり



# オイラー公式の書き換え

オイラーの公式を面数を含まない形に書き換える

内周  $\kappa$  : グラフ  $G$  の最短の閉路長

$d(F)$  : グラフ  $G$  の面  $F$  の次数の和

$$\kappa \leq d(F)$$

握手補題より

$$\therefore \kappa f \leq \sum_{F \in \mathcal{F}(G)} d(F) = 2m$$

$\mathcal{F}(G)$  : グラフ  $G$  の面集合

オイラーの公式:  $f = 2 + m - n$  を代入して  $m$  に関してまとめると

$$m \leq \frac{\kappa(n-2)}{\kappa-2}$$

グラフの平面性の判別式  
(成立すれば平面描写可能)

# 例題8.1

(1) 4次の完全グラフ

$$n = 4, m = {}_4C_2 = 6, \kappa = 3$$

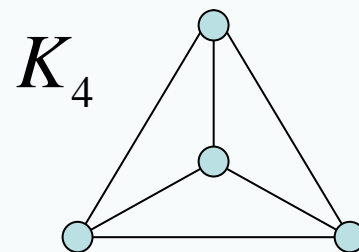
$$\therefore 6 \leq \frac{3 \cdot (4 - 2)}{3 - 2} = 6$$

(2) 5次の完全グラフ

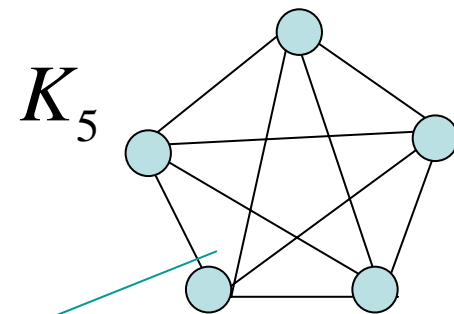
$$n = 5, m = {}_5C_2 = 10, \kappa = 3$$

$$\therefore 10 \leq \frac{3 \cdot (5 - 2)}{3 - 2} = 9$$

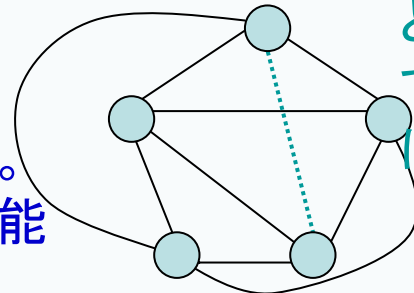
不等式不成立。  
平面描写不可能



不等式成立。平面描写可能



どのような同形写像  
で変換しても平面描写  
は不可能



# オイラー公式 (複数成分)

複数成分をもつグラフに対するオイラーの公式

平面グラフ  $G$  の成分が  $k$  の場合には

$$n - m + f = k + 1$$

が成り立つ

(証明)

無限面が  $k - 1$  個だけ余分にカウントされるので

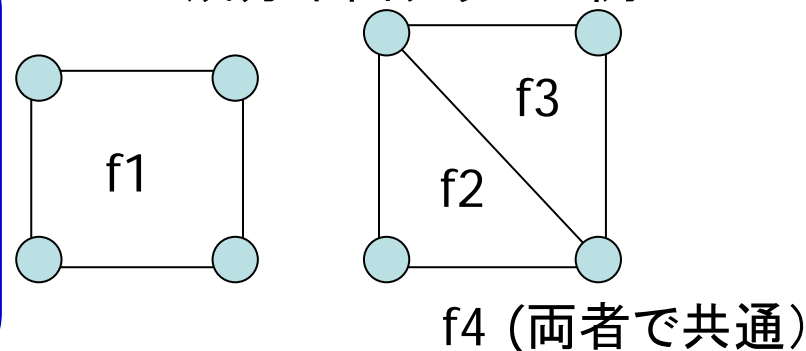
$f \rightarrow f - (k - 1)$  とすると

$$n - m + \{f - (k - 1)\} = 2$$

$$\therefore n - m + f = k + 1$$

証明終わり

2成分平面グラフの例



# 平面グラフの辺数の上限

単純連結平面グラフ  $G$  が  $n(\geq 3)$  個の点と  $m$  本の辺をもつとき

$$m \leq 3n - 6$$

が成立し、三角形が無ければ

$$m \leq 2n - 4$$

が成り立つ

(証明)

$G$  に含まれる最小面は3点からなる三角形なので

$$3 \leq d(F)$$

つまり、 $3f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m, \therefore m \leq 3n - 6$

オイラー公式:  $f = 2 - n + m$  を代入

また、 $G$  に三角形がなければ、最小面は四角形なので

$$4 \leq f(F)$$

つまり、 $4f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m, \therefore m \leq 2n - 4$  証明終わり

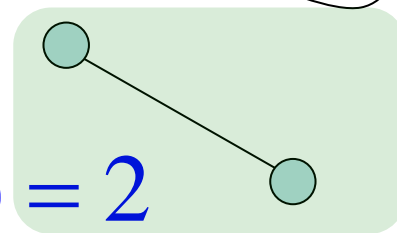
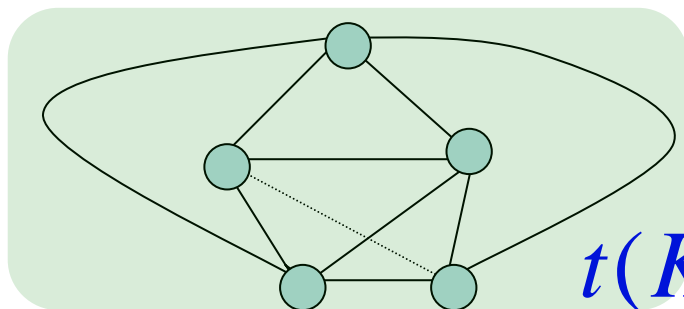
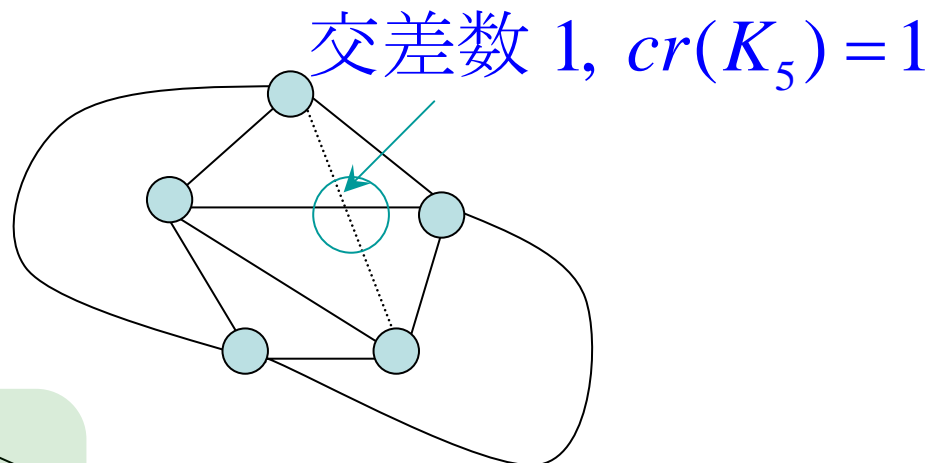
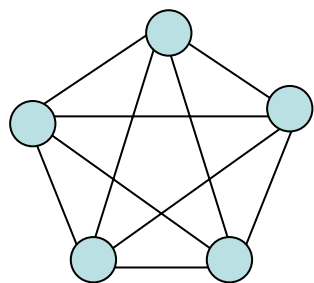
# 交差数と厚さ

交差数 : グラフ  $G$  を平面描写した際に生じる辺の最小交差の数の数  $cr(G)$

厚さ : いくつかの平面グラフを重ね合わせてグラフ  $G$  を作る際に必要な平面グラフの数の数  $t(G)$

(例)

$K_5$



$t(K_5) = 2$

# 例題8.3: 単純グラフの厚さの下限

単純グラフ  $G$  に  $n(\geq 3)$  個の点、 $m$  本の辺があるとき、 $G$  の厚さは

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil, \quad t(G) \geq \left\lceil \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rceil$$

を満たす

(証明)  $t(G) \geq \left\lceil \frac{\text{辺の総数}}{\text{平面グラフとなるための辺の上限}} \right\rceil$

$$= \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil$$

さらに恒等式:  $\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lceil \frac{a+b-1}{b} \right\rceil$  で  $a = m, b = 3n-6$  とすると

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rceil$$

この関係式の証明は講義ノートを参照のこと

(証明終わり)

# 例題8.4

## (1) 完全グラフの厚さ

完全グラフの辺数は  $m = n(n-1)/2$

$$\therefore t(K_n) \geq \left\lfloor \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\frac{n(n-1)}{2}+3n-7}{3n-6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor$$

## (2) 完全二部グラフの厚さ

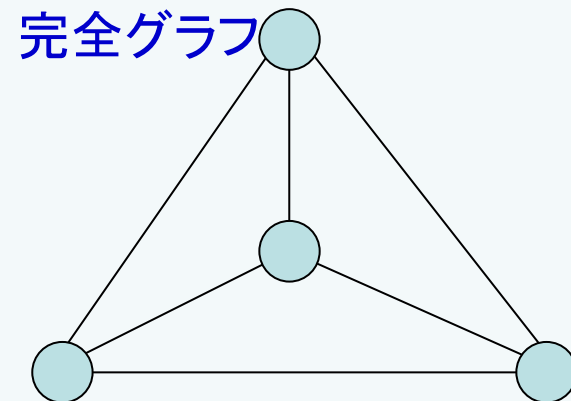
完全二部グラフ  $K_{r,s}$  の点数と辺数は

$$m = rs, \quad n = r + s$$

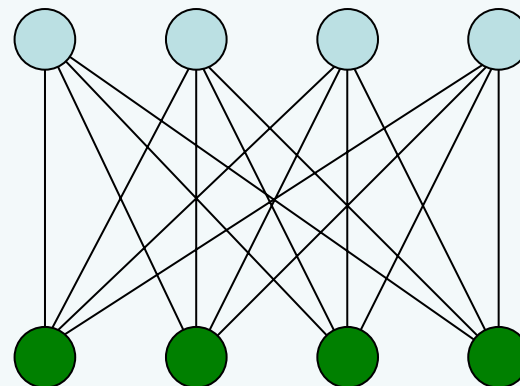
$K_{r,s}$  には三角形が含まれないので

$$m \geq 2n - 4 \equiv m_0$$

$$\therefore t(K_{r,s}) = \left\lceil \frac{m}{m_0} \right\rceil = \left\lceil \frac{rs}{2(r+s)-4} \right\rceil$$



完全二部グラフ



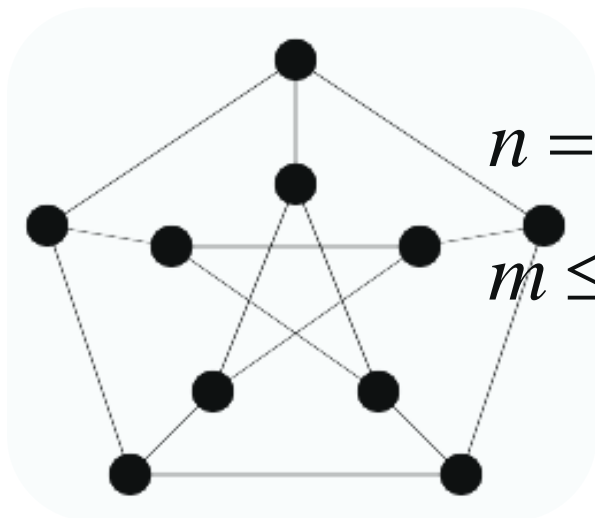
# 例題8.5の1と2

## 1. 完全グラフの全域木の総数(復習)

閉路行列法を用いると

$$\tau(K_4) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16$$

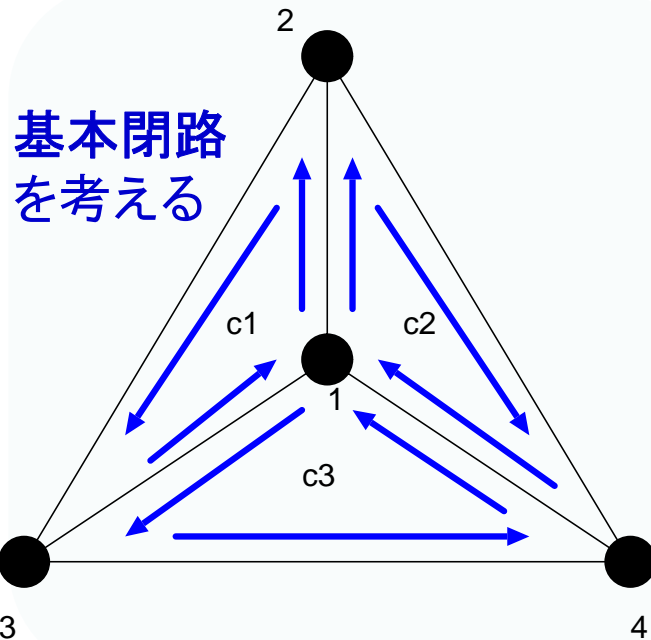
## 2. ピータースン・グラフの平面性



$n = 10, m = 15, \kappa = 5$  を判別式に代入し

$$m \leq \frac{\kappa(n-2)}{\kappa-2} = \frac{5(10-2)}{5-2} = 13.33\dots$$

これは満たされないので  
ピータースン・グラフは平面的ではない





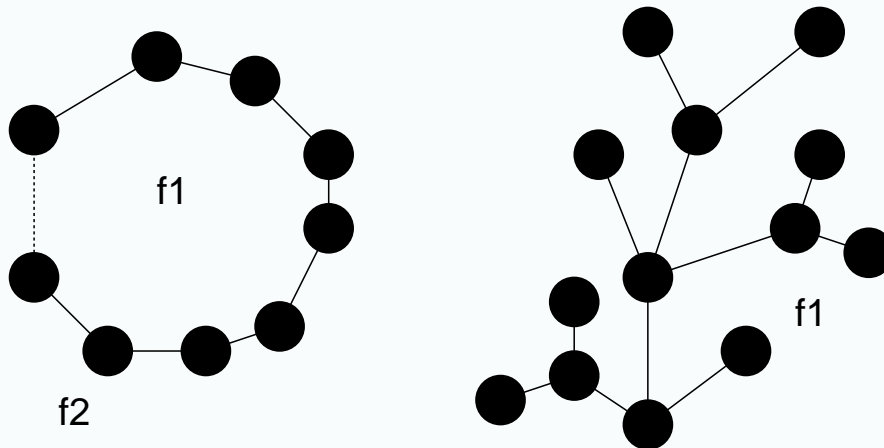
# 例題8.5の3

$K$ 角形までない場合

$$(K+1)f = \sum_{f \in \mathbf{F}(G)} d(F) \stackrel{\text{握手補題より}}{=} 2m$$

オイラーの公式  $f = 2 - n + m$  より  $f$  を消去

$$m \leq \left(\frac{K+1}{K-1}\right)(n-2) \rightarrow n \quad (n \rightarrow \infty, K = n)$$



考える状況

# 例題8.6

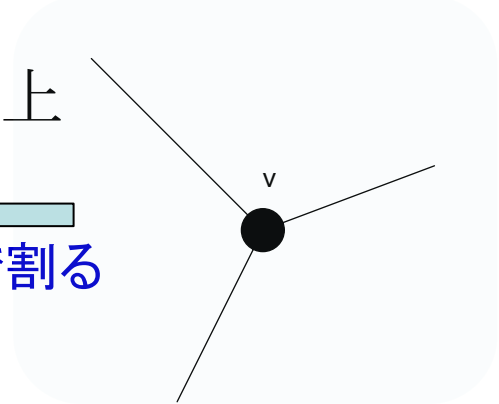
地図においては隣り合う5つ以下の隣接国しかない国が存在することの証明

(1) 地図では任意の点に接続する辺は3つ以上

$\therefore m \geq 3n/2$ であるから

$$n \leq \frac{2m}{3}$$

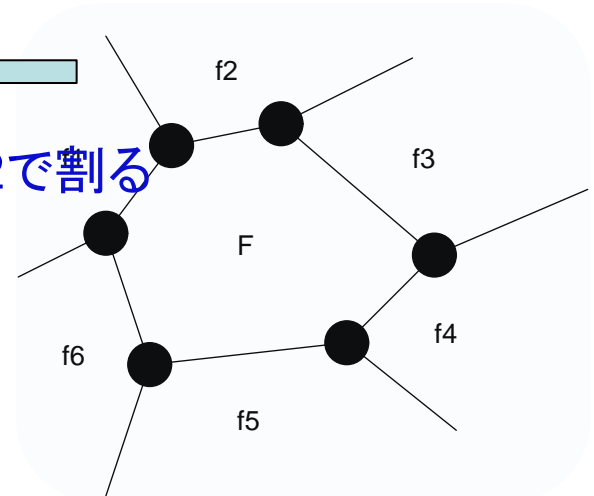
辺の両端には必ず点が2つあるので2で割る



(2)  $G$ の中に面が $f$ 個あれば

$$m \geq 6f/2 \quad \therefore f \leq \frac{m}{3}$$

境界線の両側には必ず面が2つあるので2で割る



(3) オイラーの公式より

$$2 = n - m + f \leq \frac{2m}{3} - m + \frac{m}{3} = 0$$

従って(1)のもとで(2)を仮定すると矛盾が生じたので題意が成立する

# 演習問題8

次数  $k$  の点の個数を  $n_k$  とする. 次数 1, または 2 の点を含まない平面グラフに対し

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \dots$$

が成り立つことを示せ.

例題8.7 を参考にして考えると良い。