グラフ理論　#9

第9回講義　6月18日

––– 双対グラフ、グラフの点彩色 –––

情報科学研究科　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題8 の解答例

考える平面グラフの点数、次数と辺数の間には次の関係式が成り立つ

$$\sum_{k=3} n_k = n, \quad \sum_{k=3} k n_k = 2m$$

握手補題

三角形が最小の面

辺は必ず面を2分する

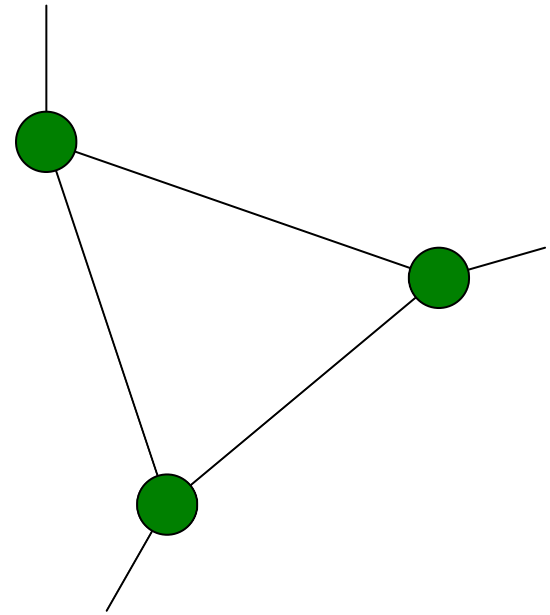
$$3f \le 2m$$

オイラーの公式より

$$3n - m \le 6$$

既に得られた関係式を代入して

$$\boxed{3n_3 + 2n_4 + n_5 \ge 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \cdots}$$



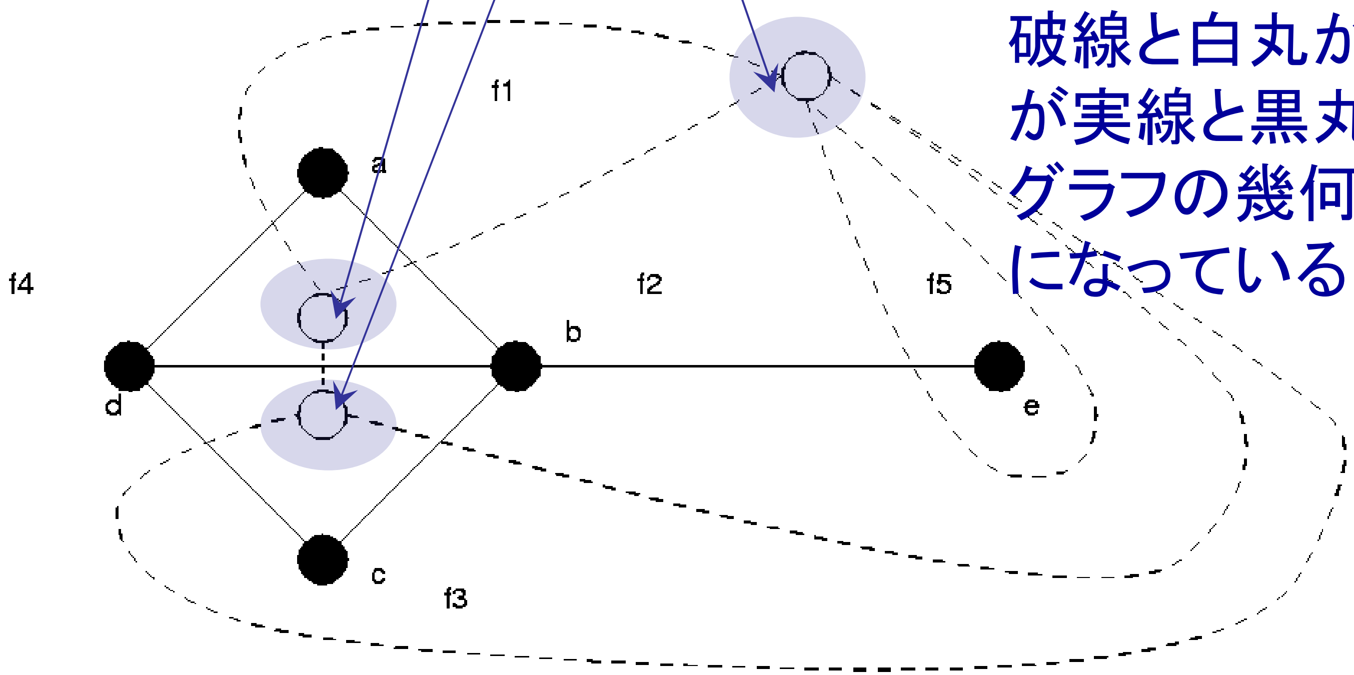
幾何学的双対グラフ

幾何学的双対グラフの作り方

(1)グラフGの各面 f の内側の点 v^* を選ぶ$\Rightarrow$双対グラフG^*の点となる

(2)グラフGの各辺 e に対応させて、e に交差する線 e^* を描いて、

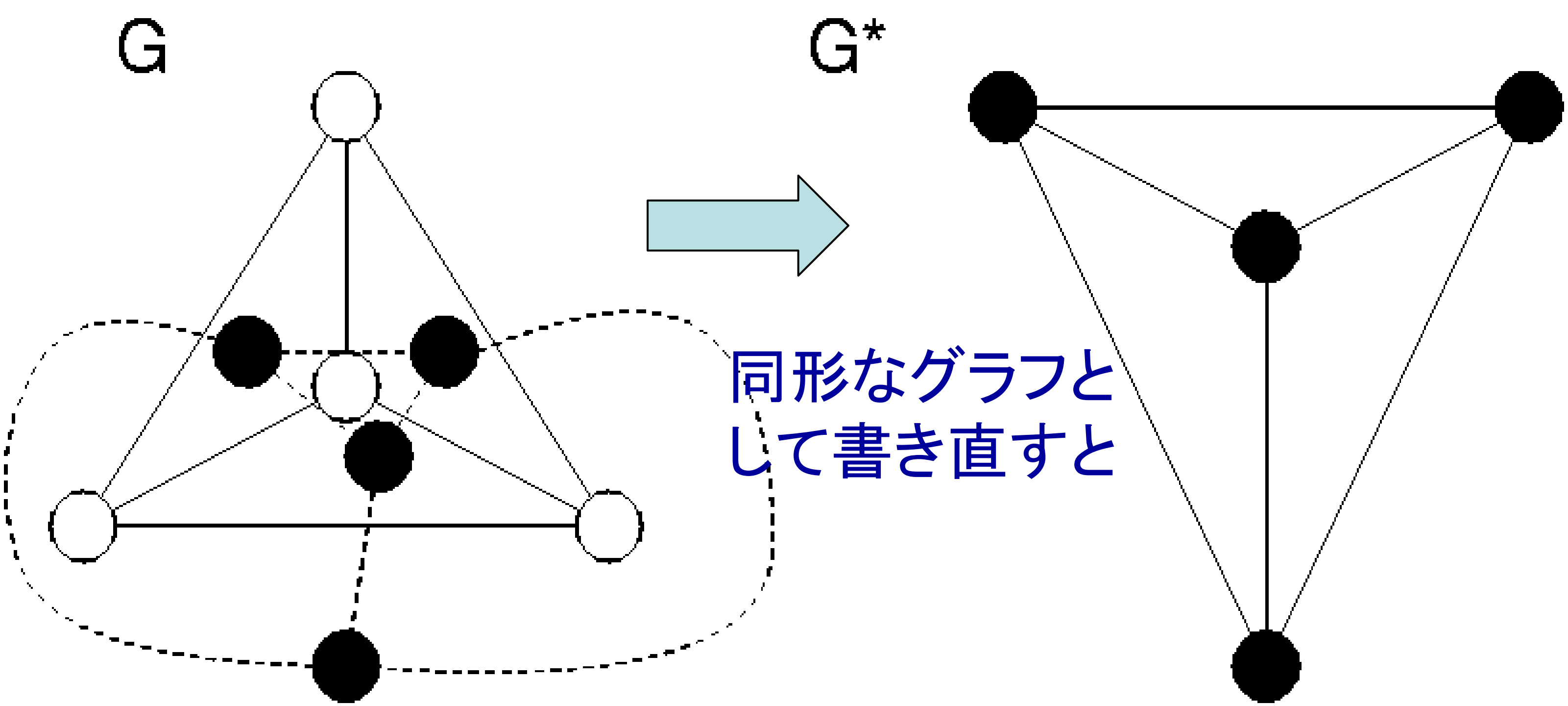
eに接する2つの面fの点 v^* を結ぶようにする$\Rightarrow$双対グラフG^*の辺となる



破線と白丸からなるグラフが実線と黒丸からなるグラフの幾何学的双対グラフになっている

幾何学的双対グラフの例

完全グラフK_4の幾何学的双対グラフは完全グラフK_4である



補題15・1とその証明

平面グラフGには n 個の点、m 本の点、f 個の面がある。

幾何学的双対グラフG^*には n^* 個の点、m^*本の辺、f^*個の面があるならば

$$n^* = f,\ m^* = m,\ f^* = n$$

が成り立つ

補題15.1

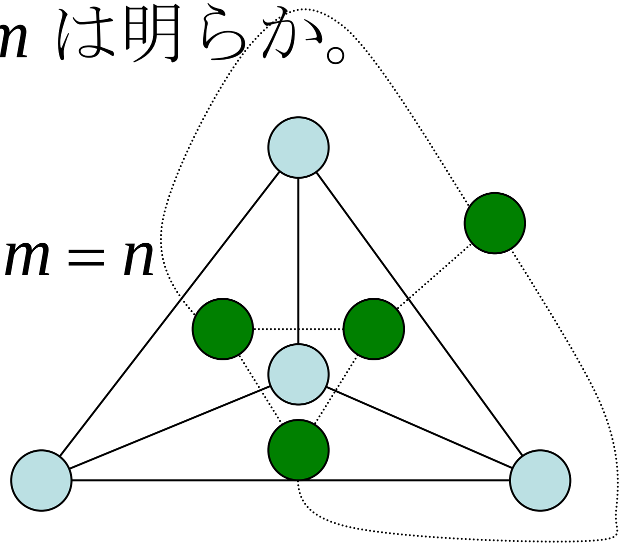
（証明）

双対グラフの作り方から、$n^* = f, m^* = m$ は明らかか。

オイラーの公式より

$n^* - m^* + f^* = 2$、$f^* = 2 - n^* + m^* = 2 - f + m = n$

従って、$f^* = n$

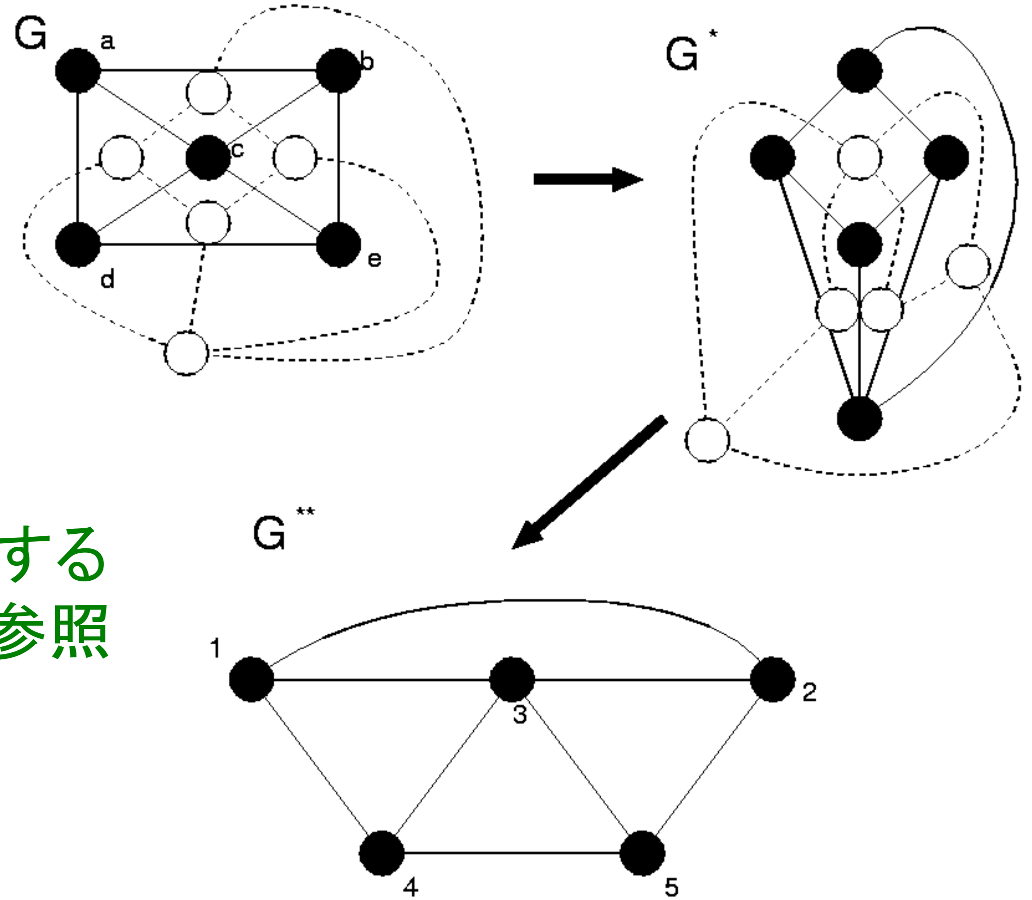


定理15・2

グラフGが連結平面ならば、G^{**}はグラフGと同形である

（例）

$$G \cong G^{**}$$

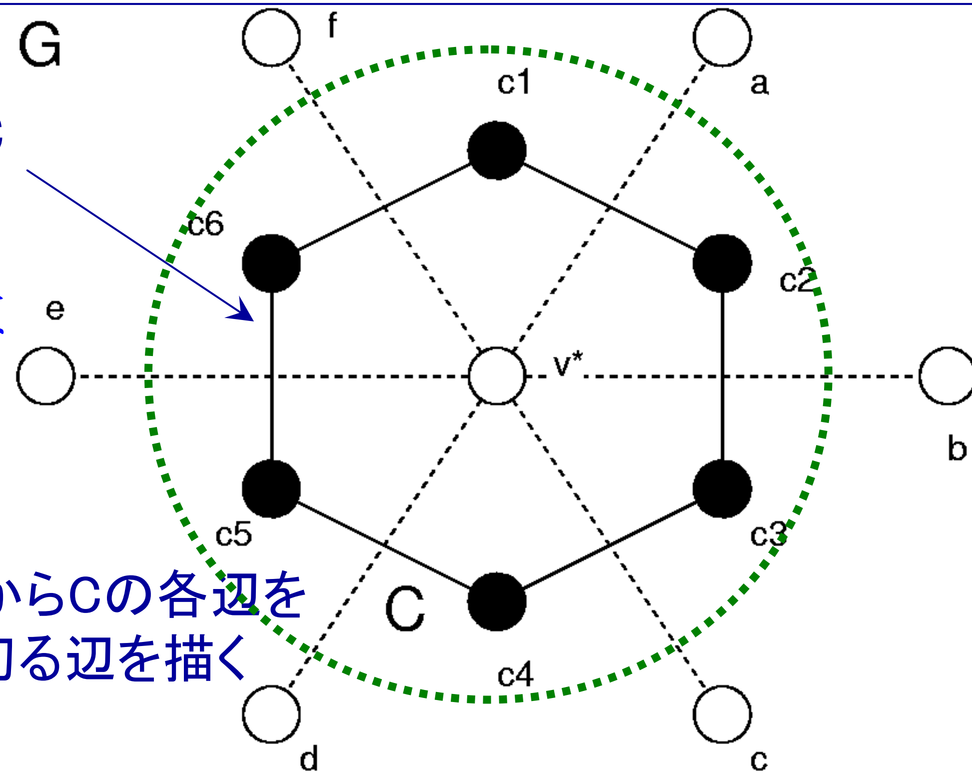


同形写像が存在することは講義ノート参照

定理15・3

平面グラフGの幾何学的双対をG^*とする。グラフGの各辺のある集合がグラフGにおいて閉路であるための必要十分条件は、それに対応する双対グラフG^*の辺集合が、グラフG^*においてカットセットになっていることである

閉路C



V*からCの各辺を横切る辺を描く

$\{\overline{v^*a},\overline{v^*b},\overline{v^*c},\overline{v^*d},\overline{v^*e},\overline{v^*f}\}$は$G^*$においてカットセットになっている

系15・4

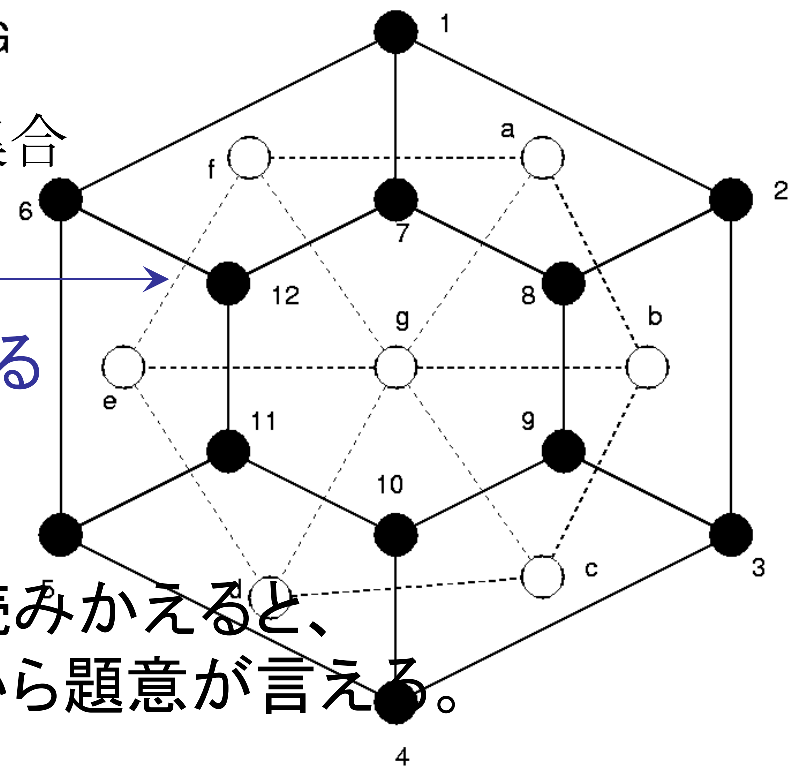
グラフGのある辺集合がGのカットセットであるための必要十分条件は、対応する幾何学的双対グラフG^*の辺集合がG^*の閉路となることである

Gのカットセット: $\{\overline{17}, \overline{28}, \overline{39}, \overline{410}, \overline{511}, \overline{612}\}_G$

対応する幾何学的双対グラフG^*の辺集合

$\{\overline{fa}, \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}, \overline{ef}\}$

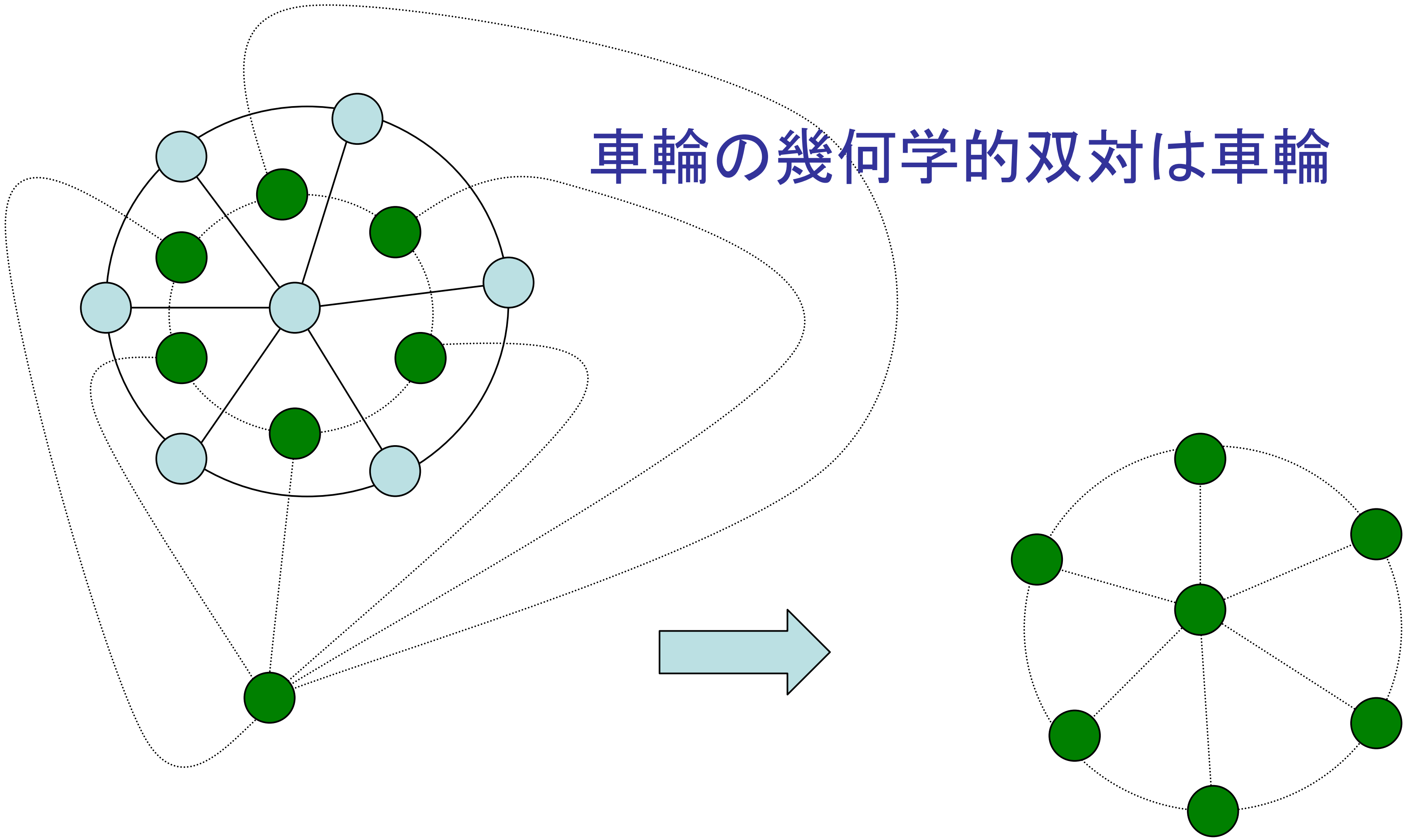
G*においては閉路となっている



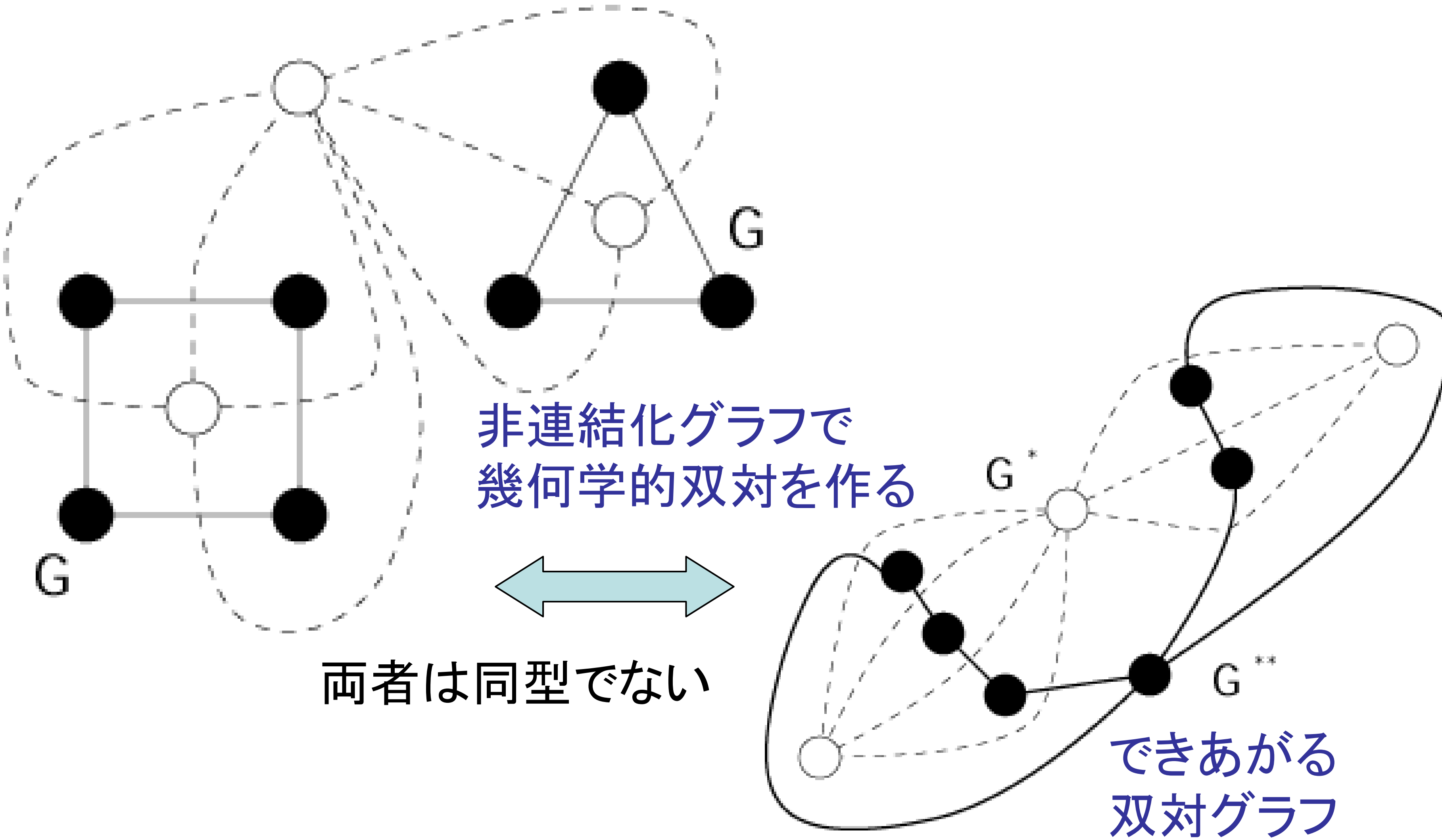
（証明のアウトライン）

定理15・3をG→G*、G*→G**として読みかえると、
定理15・2からG**とGは同形であるから題意が言える。

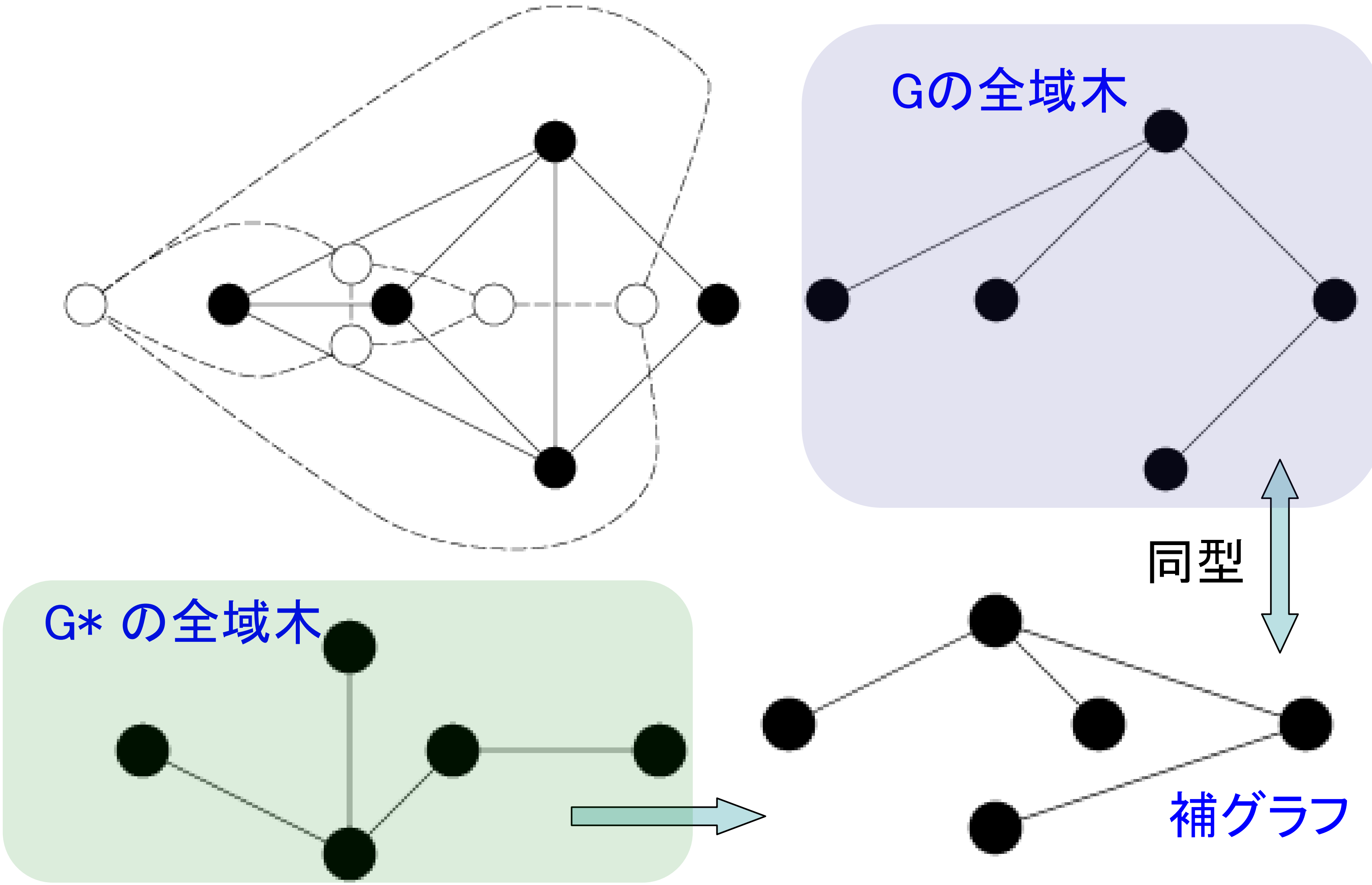
例題8.8の(1)



例題8.8の(2)



例題8.8の(3)



グラフの彩色：点彩色

k−彩色可能：

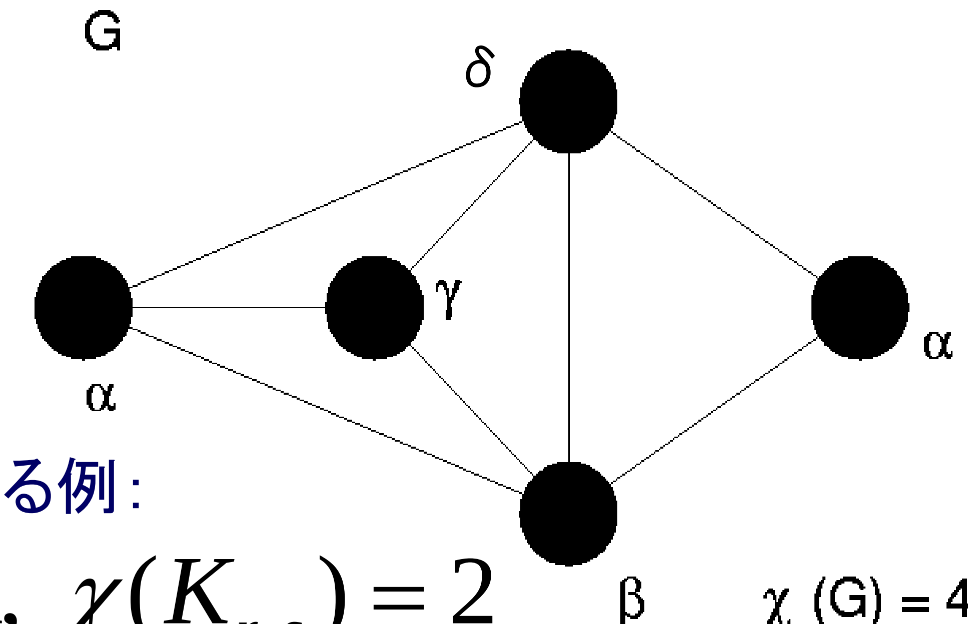
k個の色の一つをGの各点に割り当て、
隣接するどの2つの点も異色にできること

k−彩色的：

グラフGがk彩色可能であるが、(k−1)彩色不可能であるとき
⇒ グラフGの彩色数はkである

$$\chi(G) = k$$

「彩色数はkである」、というのを
このように表記する



いくつかの代表的グラフに対する例：

$$\chi(K_n) = n,\ \chi(N_n) = 1,\ \chi(K_{r,s}) = 2$$

定理17・1

単純グラフGの最大次数がΔならば、グラフGは$(\Delta+1)$彩色可能である

（証明）

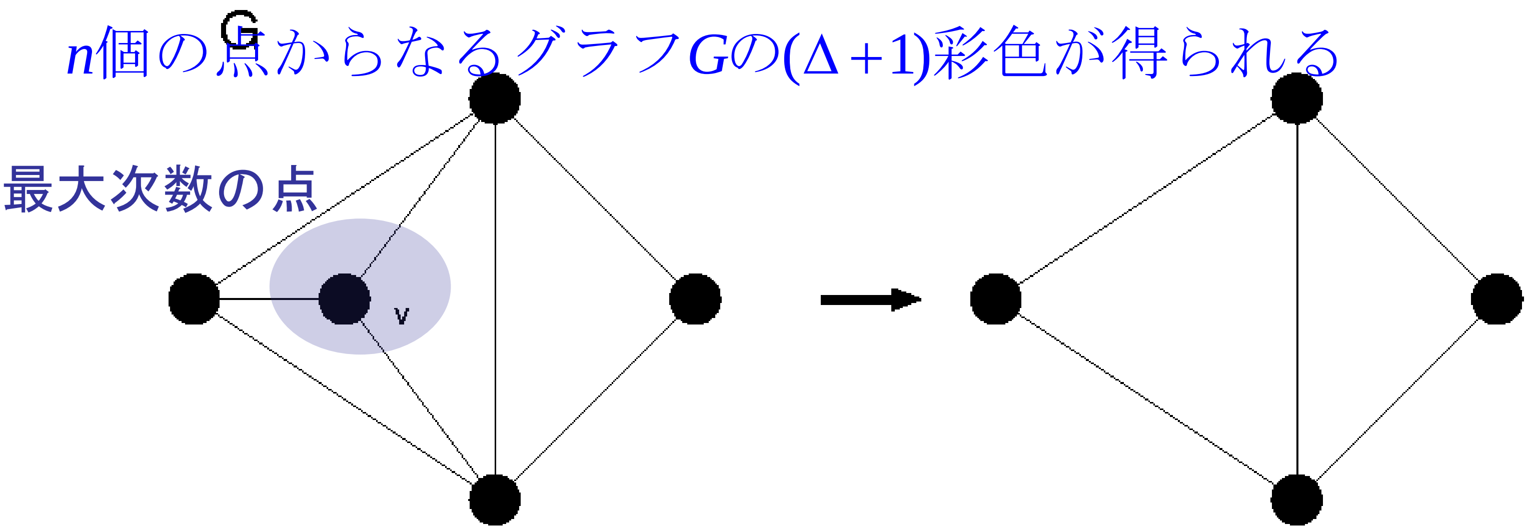
点数に関する帰納法で示す。

任意の点vとその接続辺を除去してできる$n-1$個の点、

最大次数Δのグラフは$(\Delta+1)$彩色可能であると仮定する

vを元に戻し、vに隣接するΔ個以下の点と異なる色でvを彩色すれば、

n個の点からなるグラフGの$(\Delta+1)$彩色が得られる



定理17・3

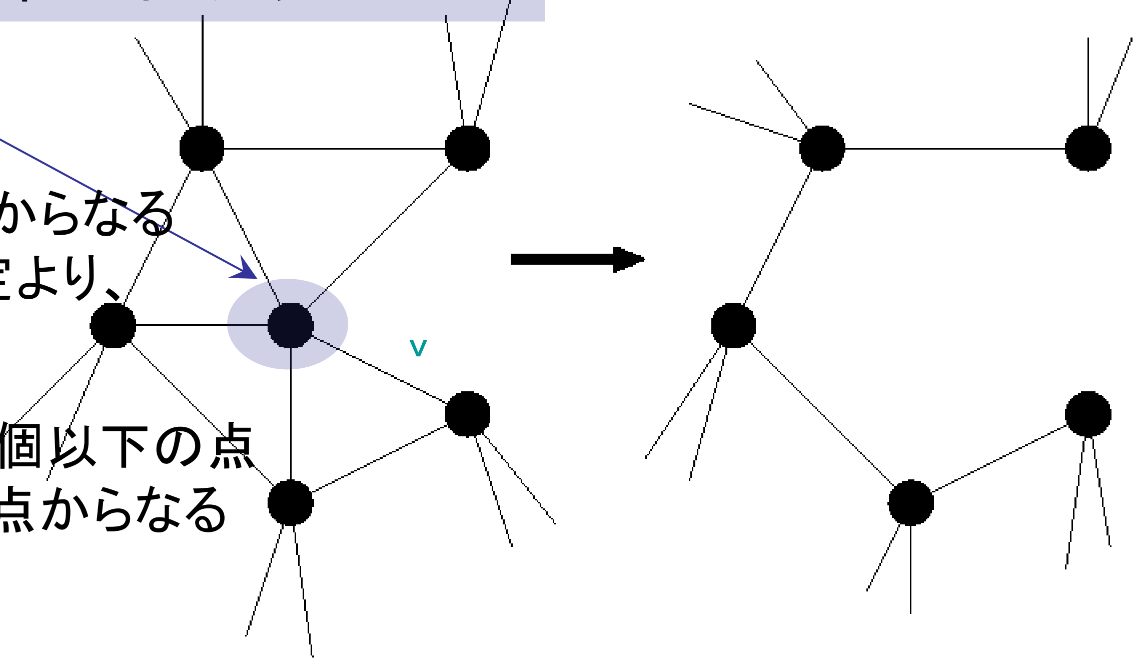
全ての単純平面グラフは6彩色可能である

（証明）

「n−1個の点をもつ全ての単純平面グラフは6彩色可能である」と仮定

定理13・6より、「全ての単純平面グラフには次数5以下の点がある」

点vを除去すると、n−1個の点からなるグラフができあがるので、仮定より、これは6彩色可能。



点vを元に戻し、vに接続する5個以下の点以外の色でvを彩色すれば、n点からなるグラフの6彩色が得られる

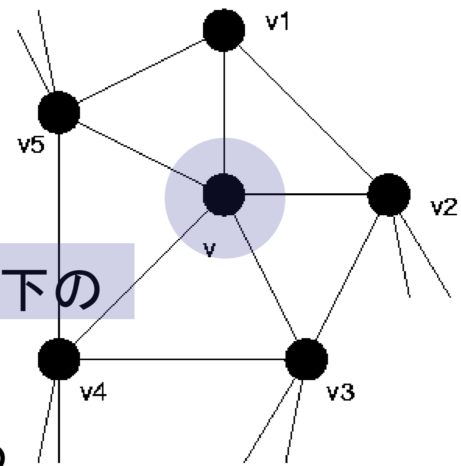
定理17・4

全ての単純平面グラフは5彩色可能である

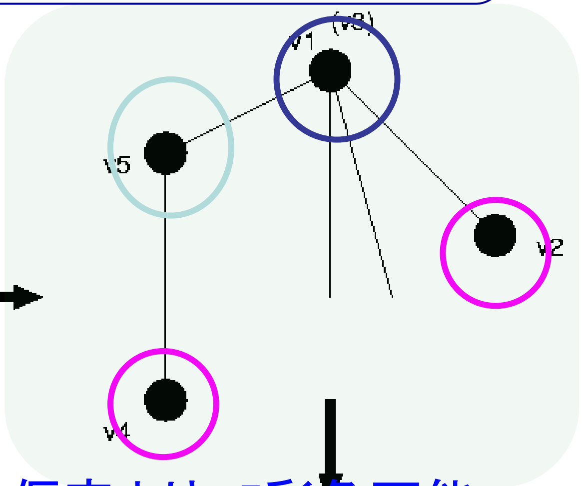
（証明）

「n−1個以下の点をもつ全ての単純平面グラフは5彩色可能である」と仮定する

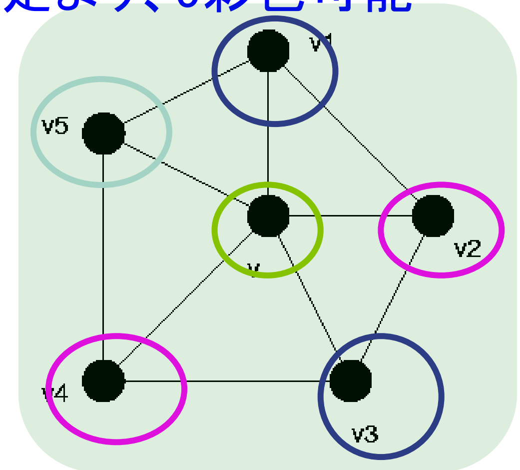
定理13・6より、Gには次数5以下の点がある



2本の辺vv1、vv3を縮約する



仮定より、5彩色可能

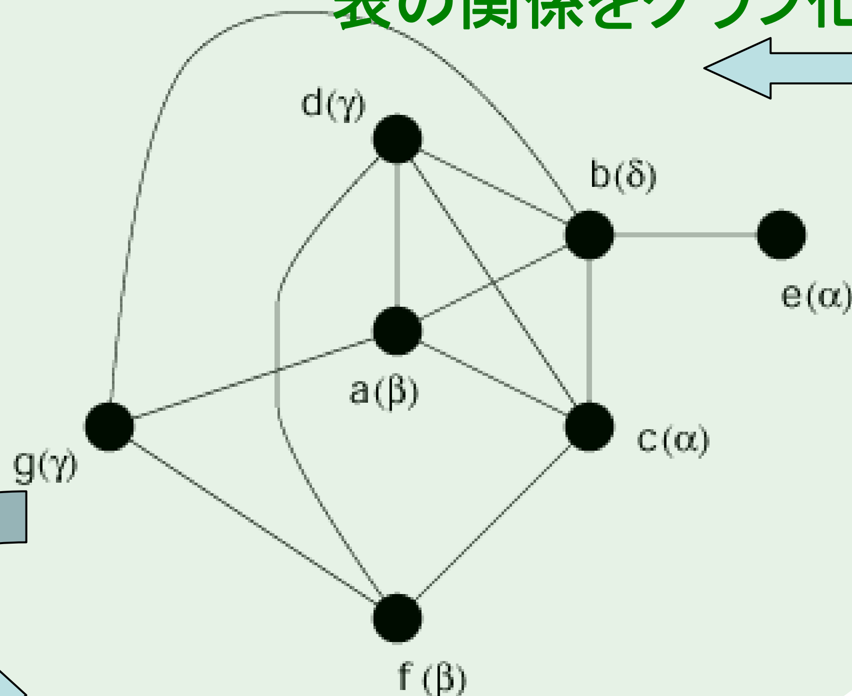


点vに当てられた色でv1、v3を彩色し、点vを元々割り当てられた色以外で彩色しなおせばGの5彩色が完成する

点v1,v3は同色だから、v1−v5の中にはまだ使われていない色が存在する

例題9.1（点彩色の応用例）

表の関係をグラフ化

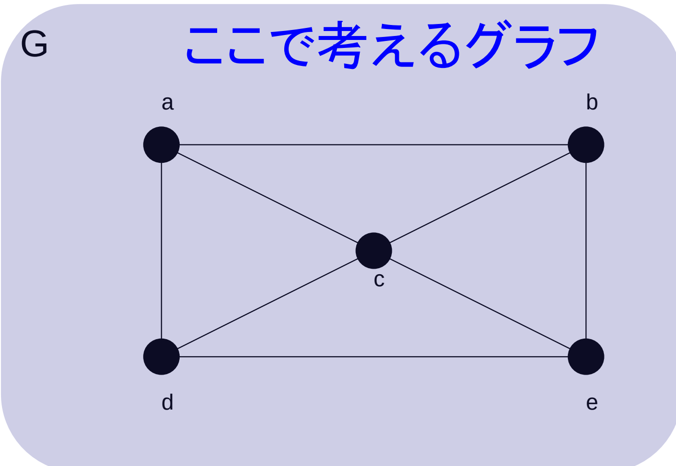


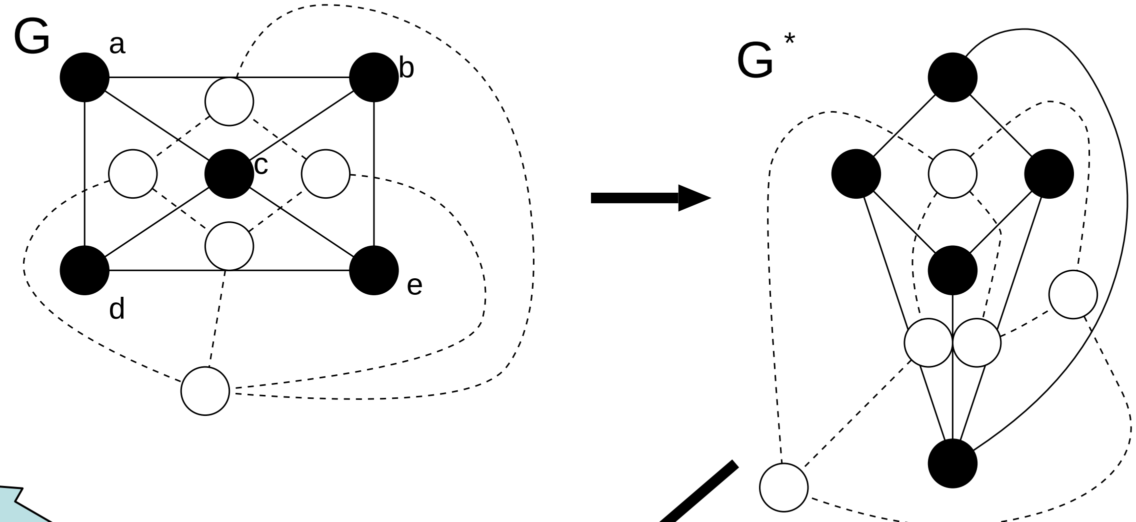
	a	b	c	d	e	f	g
a	−	＊	＊	＊	−	−	＊
b	＊	−	＊	＊	＊	−	＊
c	＊	＊	−	＊	−	＊	−
d	＊	＊	＊	−	−	＊	−
e	−	＊	−	−	−	−	−
f	−	−	＊	＊	−	−	＊
g	＊	＊	−	−	−	＊	−

＊は同じ時間帯にあってはならない講義

講義 c, e は α 講時に開講
講義 a, f は β 講時に開講
講義 d, g は γ 講時に開講
講義 b だけは δ 講時に開講

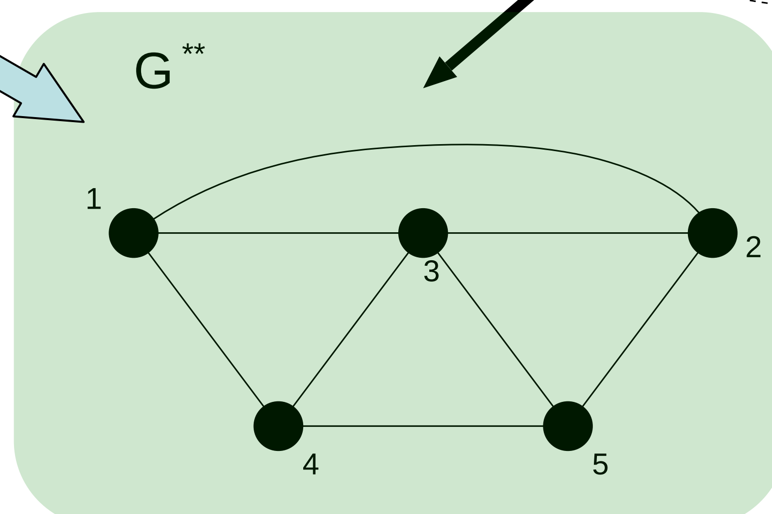
例題9.2の1





グラフGとG**は同型
同型写像の存在については
講義ノートを参照

定理15.2



例題9.2の1の(1)

G に含まれる任意の点 v について

$\delta \le \deg(v)$ と仮定すると $n\delta \le \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m$

ぎりぎり次数 δ の点が含まれると仮定する

G には三角形はないので

握手補題より

$4 \le \deg(F) \quad \therefore 4f \le \sum_{F \in F(G)} \deg(F) = 2m$

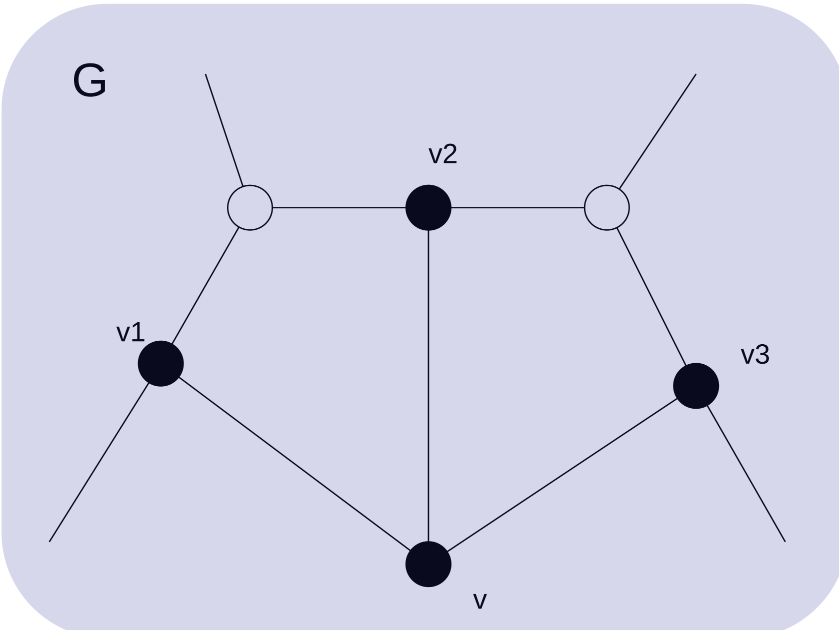
オイラーの公式: $f = 2 - n + m$ より f を消去して $m \le 2n - 4$

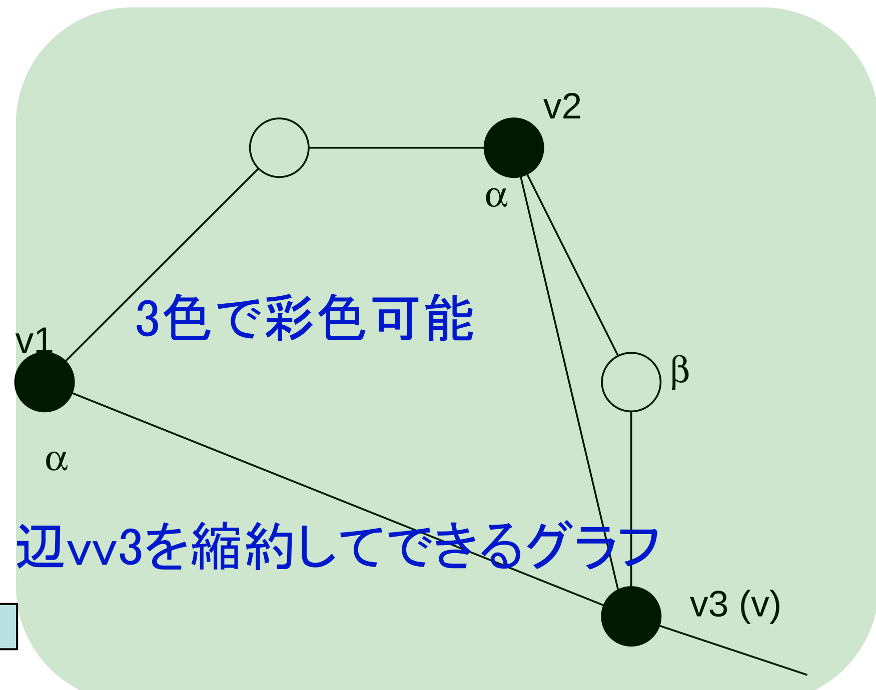
$\therefore \ n\delta \le 2m \le 2(2n-4)$

つまり、 $\delta \le 4 - \frac{8}{n}$

nは8以上なので
（講義ノート参照）題意が成立する。

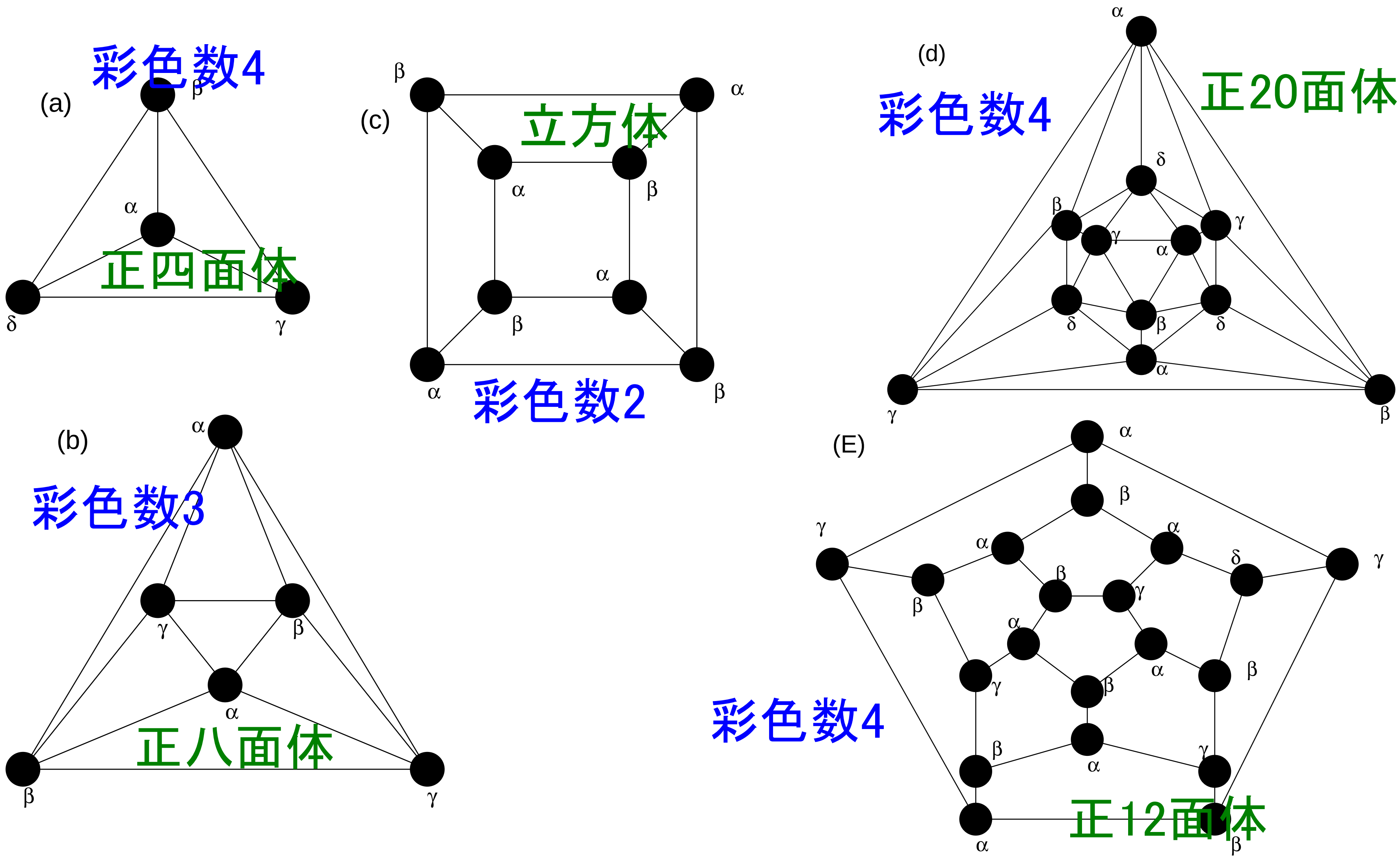
例題9.2の１の(2)





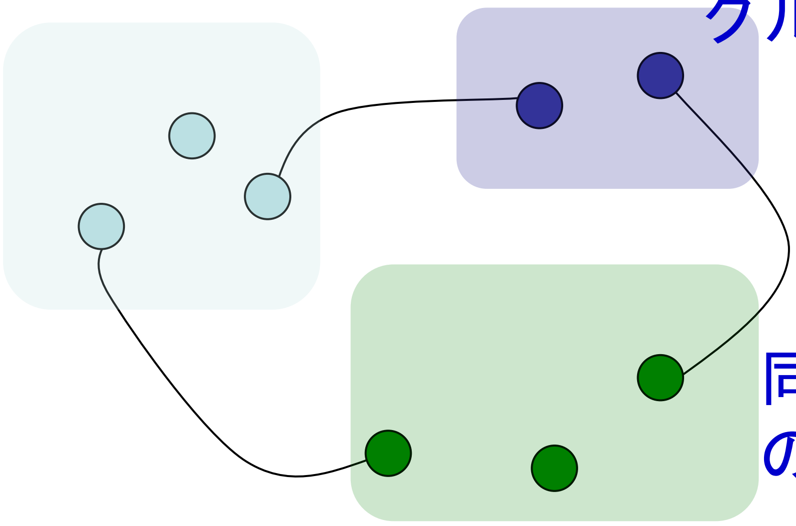
点vを元に戻し、
α、βと異なる色で塗れば
グラフGの3彩色が完成

例題9.3（プラトン・グラフの彩色）



例題9.4

辺が現れるのは異なる
グループに属する点の間のみ



同じ色で彩色されたグループ内
の点どうしは結ぶことはできない

従って、考えるグラフ G の辺 m は

$m \geq {}_{\chi(G)}C_2 = \frac{1}{2}\chi(G)(\chi(G)-1)$ が成り立つべき。

これを $\chi(G)$ について解いて $\boxed{\chi(G) \leq \frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}}$

演習問題9

$\Delta(G)$ を単純グラフ G に属する最大次数とする. このとき, 任意の単純グラフ G に対して

$$\chi(G) \quad \leq \quad 1 + \Delta(G)$$

が成り立つことを示せ.