グラフ理論　#10

第10回講義　6月25日

--- 地図の彩色、辺彩色、彩色多項式 ---

情報科学研究科　井上純一

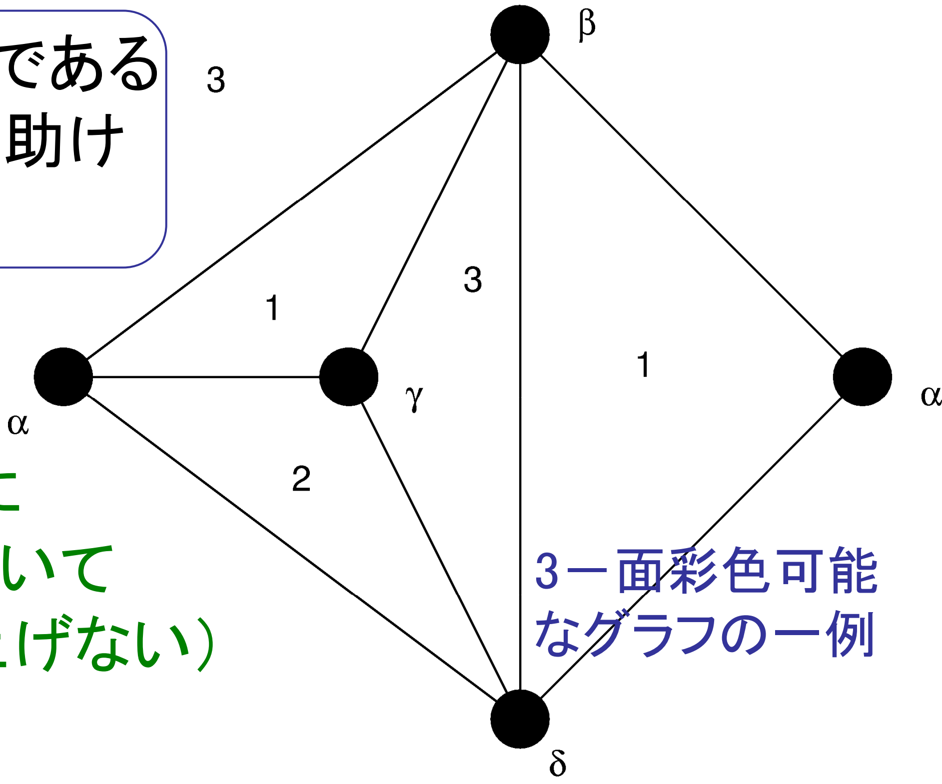
http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

地図の彩色(面彩色)

k-面彩色可能：地図の隣接する2つの面が
同じ色にならないように k 色で彩色できる場合

全ての平面グラフは4-彩色可能である
(4色定理、1976年計算機実験の助け
を借りて証明される)

※ この講義ではそれに至るまでに
得られた幾つかの知見・定理について
見ていく(4色定理の証明は取り上げない)



3ー面彩色可能
なグラフの一例

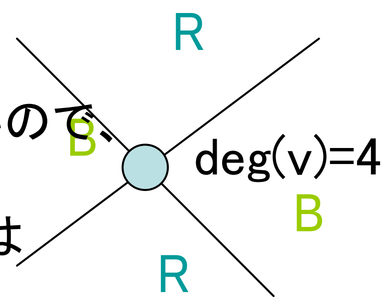
定理19・1とその証明

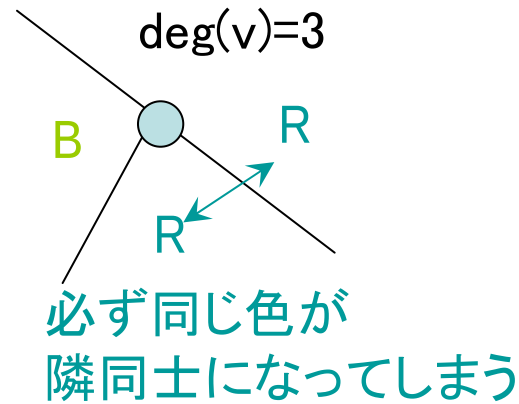
> 地図Gが2 面彩色可能であるための必要十分条件は
> Gがオイラー・グラフであることである

（証明のアウトライン）

[必要性]

Gの各点を含む面は偶数でなければならないので、
各点の次数は偶数。
「連結グラフがオイラー・グラフである条件は
Gの点の次数が全て偶数」
であったことを思い出せば、Gはオイラー・グラフである

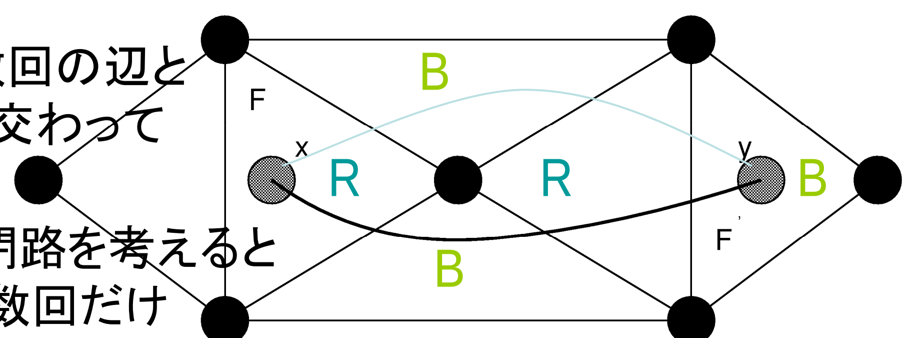




[十分性]

任意の面（赤）内の点Xからスタートし、偶数回の辺と
交わって到達する面を赤で、奇数回の辺と交わって
到達する面を青で彩色する

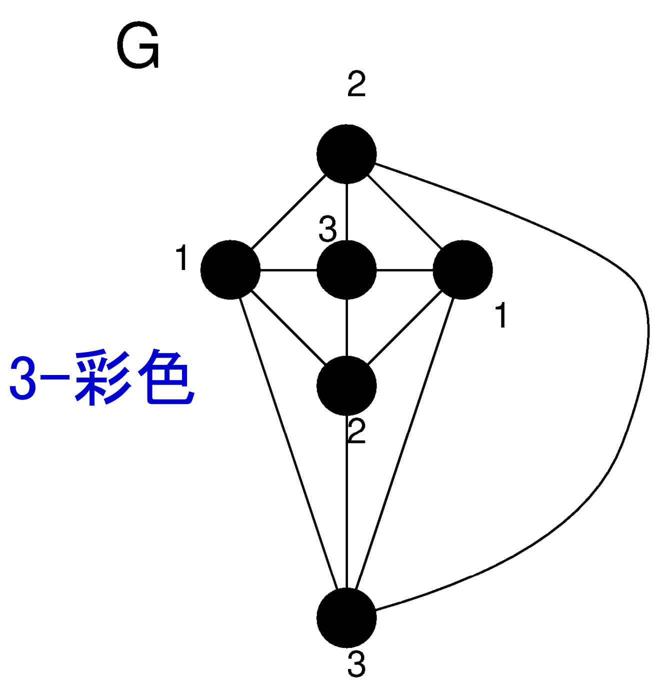
この方法で任意の点から任意の点へ戻る閉路を考えると
グラフがオイラー・グラフであれば、必ず偶数回だけ
辺と交わるので2色彩色で矛盾なく、全ての面が特定される

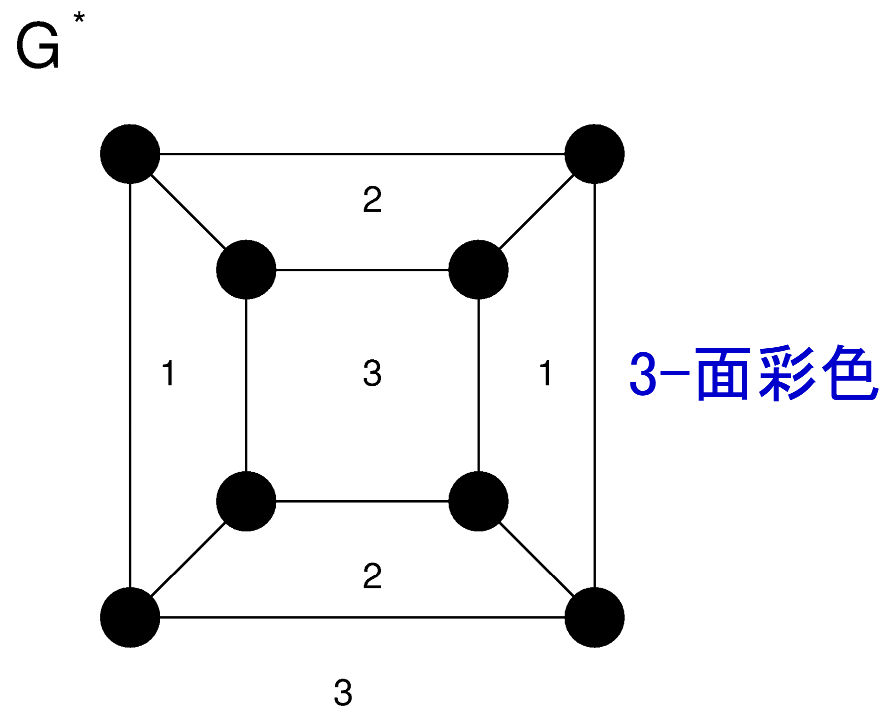


定理19・2

Gはループの無い平面グラフとし、G^*はGの幾何学的双対である。
このとき、Gがk彩色可能であるための必要十分条件は、
G^*がk面彩色可能であることである。

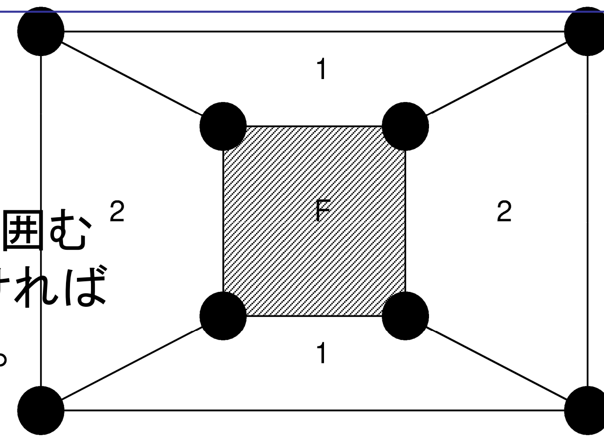
（例）





定理19・4とその証明

Gは各点が3次の地図であるとする。このとき、Gが3−面彩色可能であるための必要十分条件は各面が偶数本の辺で囲まれていることである。



(証明)

[必要性]

任意の面Fに関し、各点の次数が3であるから、Fを取り囲む面は2色で彩色可能である。そのような面は偶数個なければならないので、全ての面は偶数本の辺で囲まれている。

[十分性]

「Gが単純グラフであり、Gの各面が三角形で、各点の次数が偶数(オイラー・グラフ)であれば、Gは3点彩色可能である」

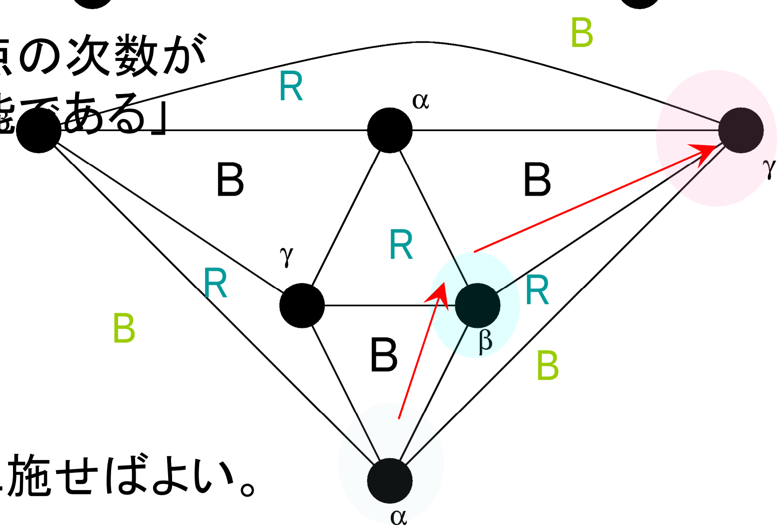
という双対な結果を示す。

定理19・1より、Gの面はR、Bの2色で彩色可能

このとき 面$R:\alpha \to \beta \to \gamma$ (時計回り)

面$B:\alpha \to \beta \to \gamma$ (反時計回り)

のような点彩色をグラフ全体に施せばよい。



辺彩色

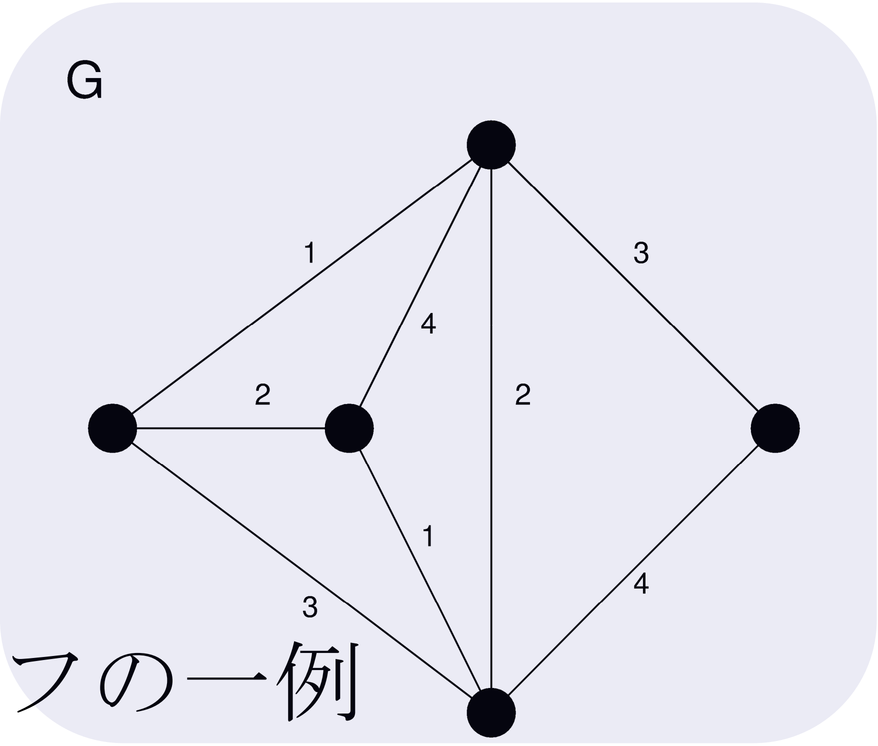
k−辺彩色可能：グラフGの隣接する辺は同じ色にならないように、Gの各辺をk色で彩色できるとき

彩色指数：Gがk−辺彩色可能、k−1辺彩色不可能なとき、彩色指数を

$$\chi'(G) = k$$

彩色指数

で定義する。



$\chi'(G) = 4$であるグラフの一例

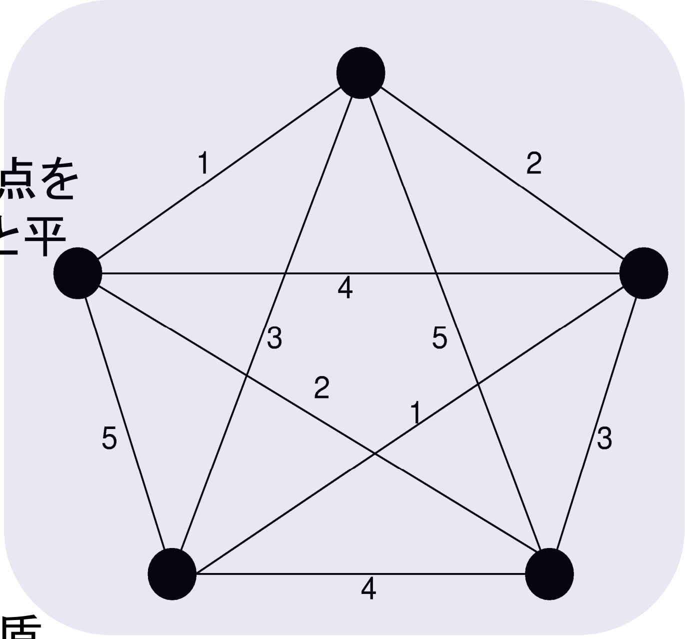
定理20・2とその証明 #1

$n(\neq 1)$が奇数であれば、$\chi'(K_n)=n,$偶数ならば、$\chi'(K_n)=n-1$

（証明）

[nが奇数の場合]

完全グラフの点を正n角形の形状に配置する。その外周の点を異なる色を用いて彩色し、次に残りの辺のそれぞれをそれと平行な外周の辺に用いられた色で彩色する。



このとき、同じ色で彩色できる辺の最大数は (n−1)/2

従って、彩色指数が n−1 であれば

$$m(K_n)\leq \frac{1}{2}(n-1)\chi'(K_n)=\frac{1}{2}(n-1)^2 \neq {}_nC_2$$

矛盾。

彩色指数が n であれば

$$m(K_n)\leq \frac{1}{2}(n-1)\chi'(K_n)=\frac{1}{2}n(n-1)= {}_nC_2$$

OK。従って彩色指数はnである

定理20・2とその証明#2

[nが偶数のとき]

K_nはK_{n-1}と1つの点の和とみなせる。

K_nは$n-1$色で彩色可能。

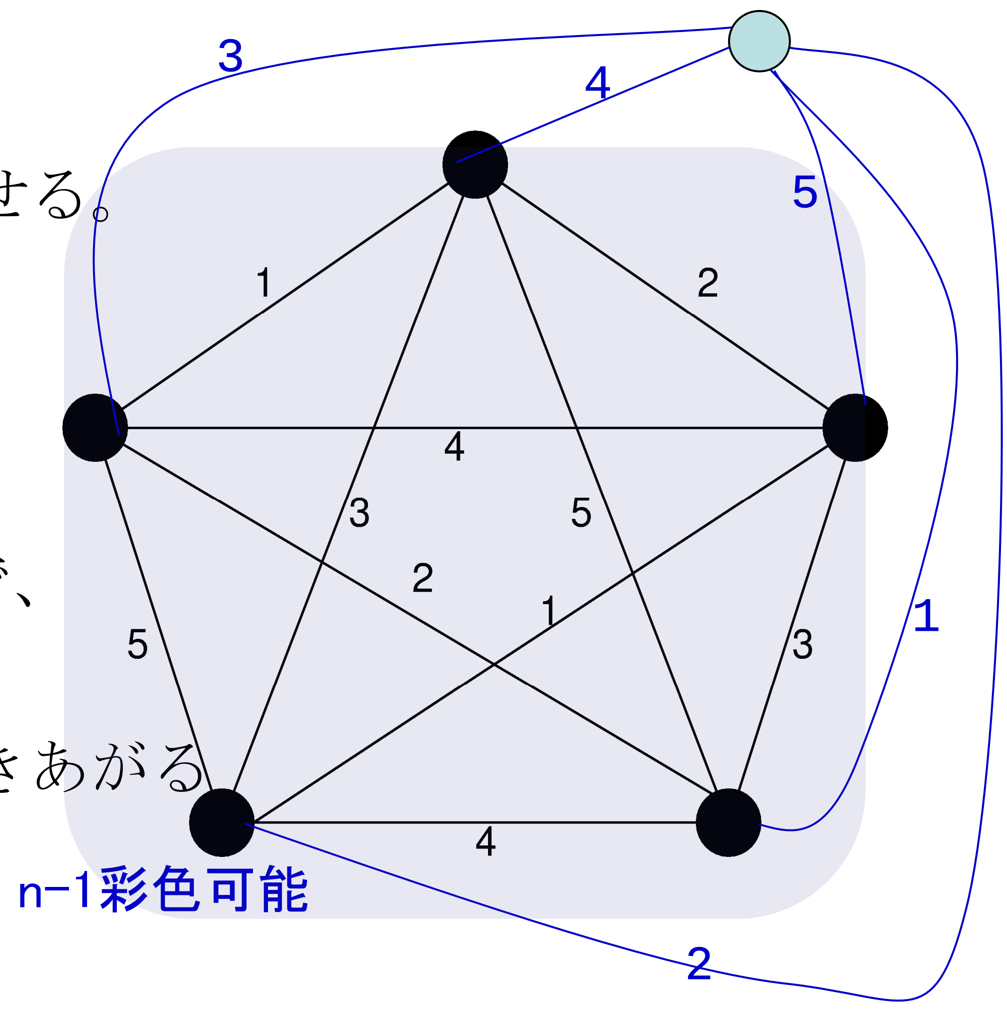
K_{n-1}の次数は$n-2$であるから、

各点には全n色のうち

欠けてる色が1色ずつあるので、

これでそれぞれの辺を

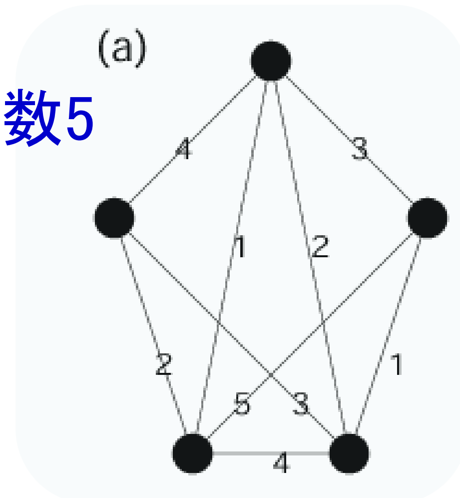
彩色すればK_nの$n-1$彩色ができあがる

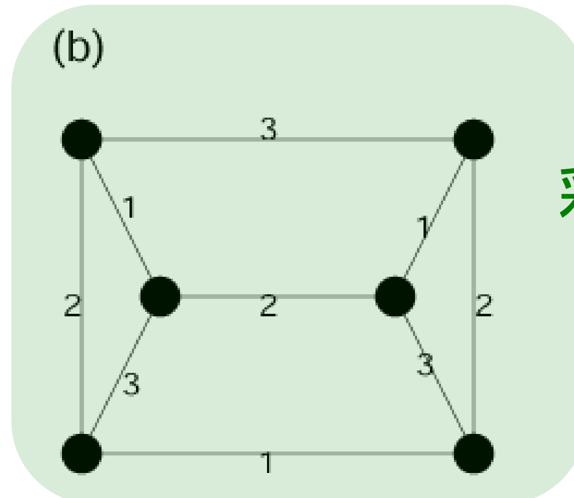


例題9.4

（1）

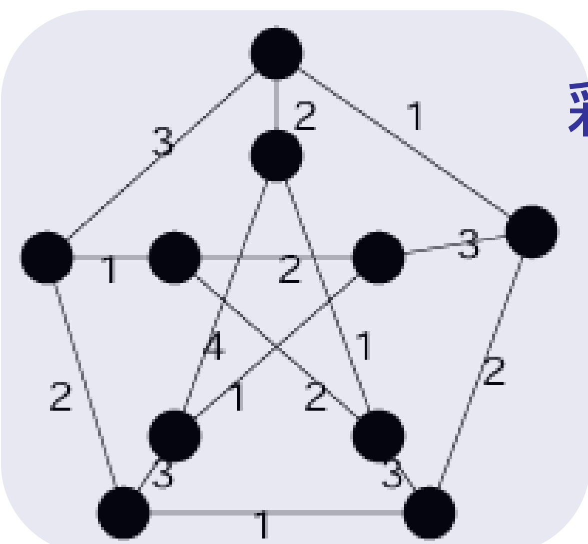
彩色指数5





彩色指数3

(2)(3)



彩色指数4

ピータースン・グラフは全ての次数が3である3次グラフ

一般に「グラフが3次のハミルトングラフならば、その彩色指数は3である」ことが知られているが、ピータースン・グラフの彩色指数は4

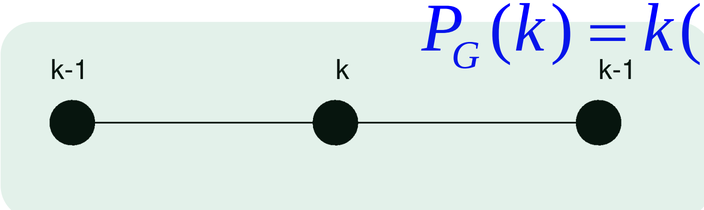
従って、ピータースン・グラフはハミルトンではない。

彩色多項式

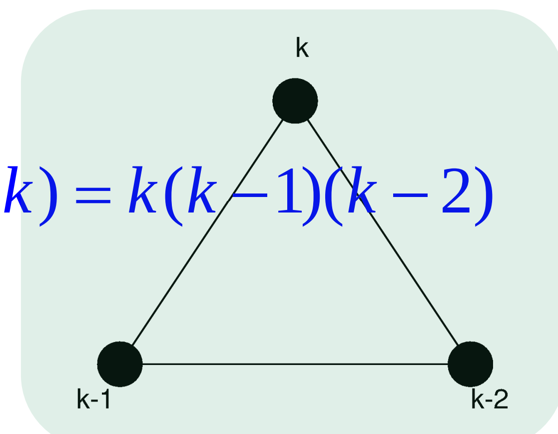
Gを単純グラフとし、k色での点彩色の仕方が$P_G(k)$通りあるとき、$P_G(k)$を彩色多項式と呼ぶ

（例）

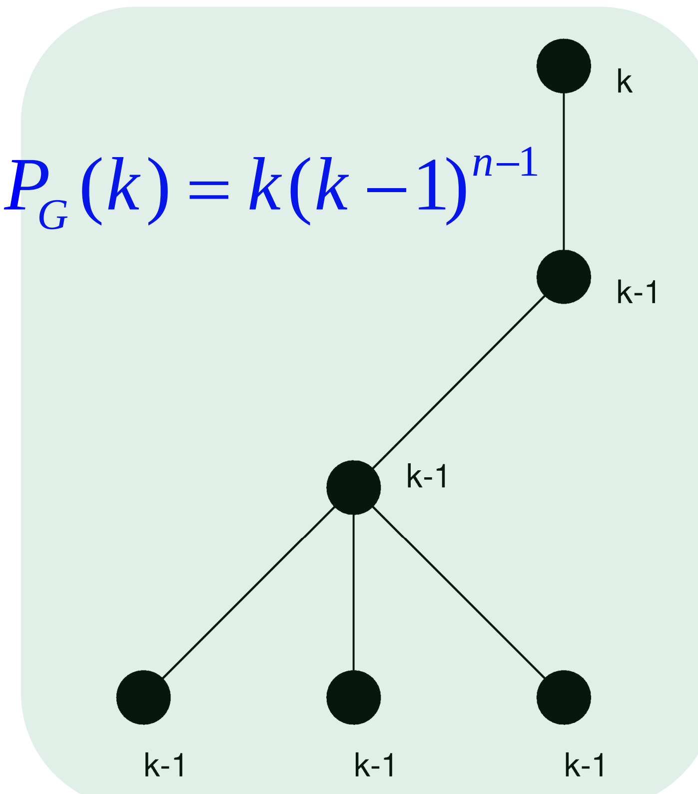
$$P_G(k) = k(k-1)^2$$



$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)$$



$$P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$$



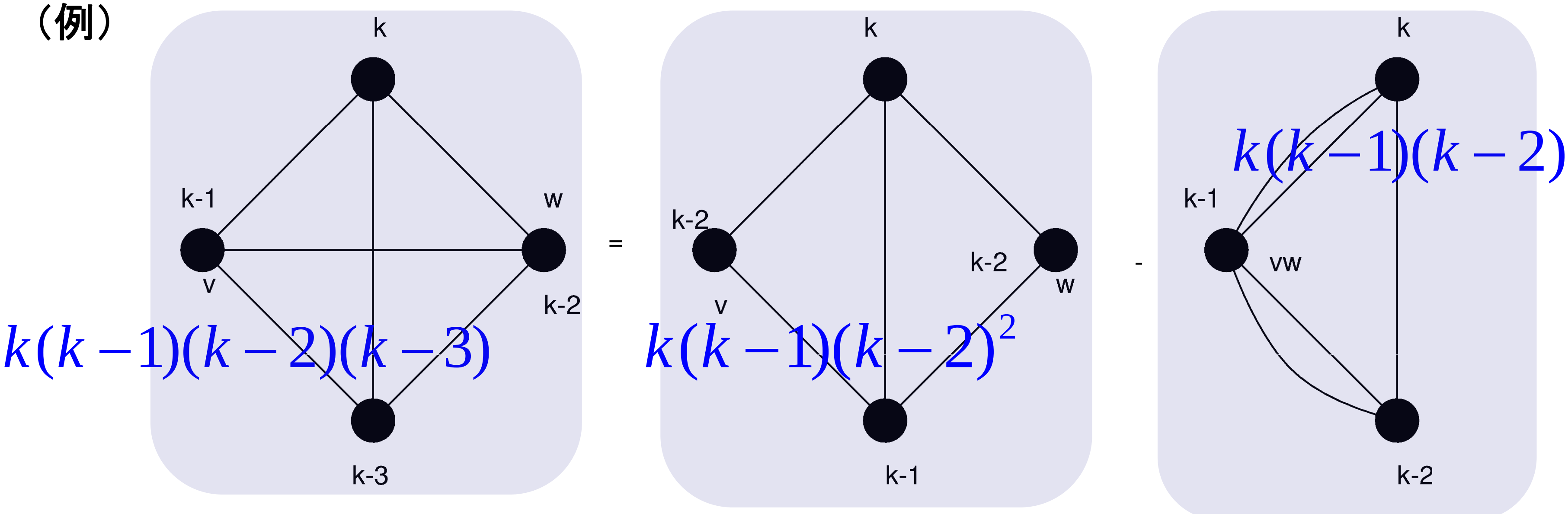
定理21･1 とその適用例

単純グラフGから辺を削除して得られるグラフを$G-e$とし、縮約してできるグラフをG/eとすると

$$P_G(k)=P_{G-e}(k)-P_{G/e}(k)$$

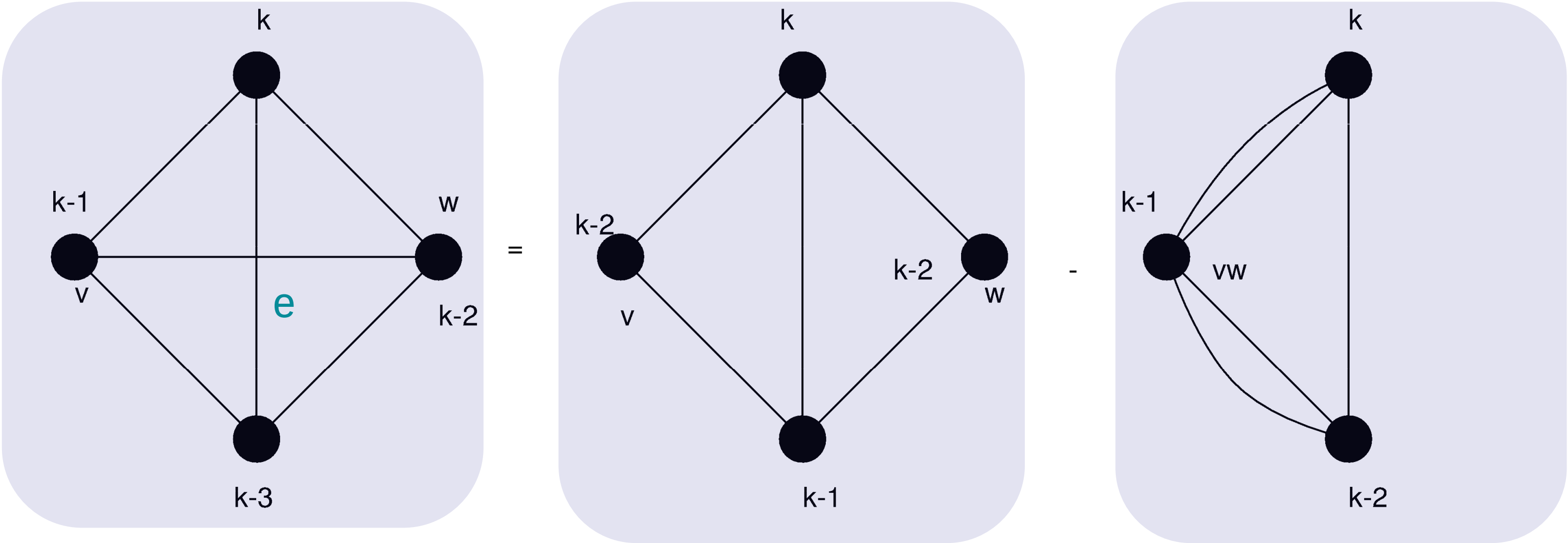
が成立する。

（例）



G　G-e　G\e

定理21・1の証明



G　　G-e　　G\e

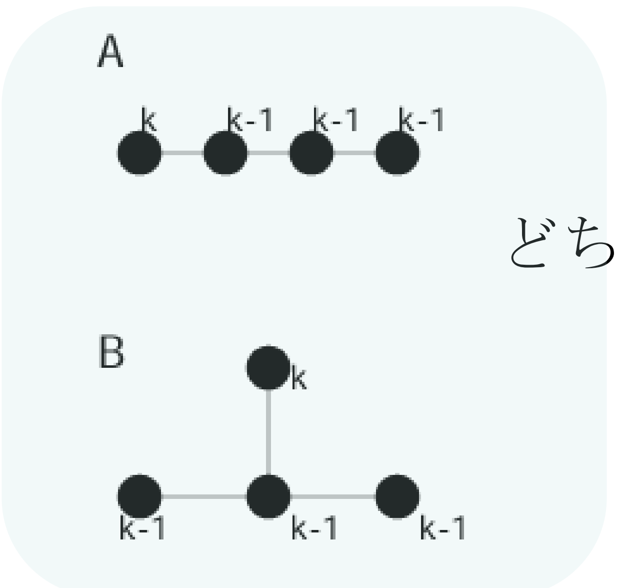
e=vwとする。点vと点wが異なる色になるような、G−eのk彩色の個数はvとwを結ぶ辺を描いても変わらない。 $\therefore\ P_G(k)$に等しい。

点vと点wが同色になるような、G/eのk彩色の個数はvとwを同一視しても変わらない。 $\therefore\ P_{G/e}(k)$に等しい。

従って

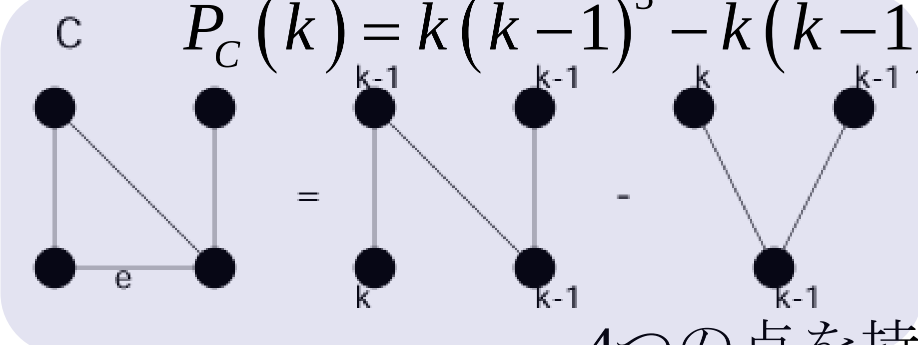
$$P_{G-e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k)$$

例題9.5



どちらも木であり、彩色指数は$k\left(k-1\right)^3$

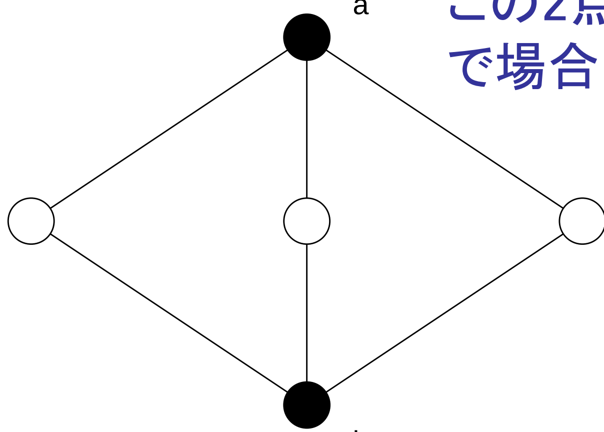
$$P_C\left(k\right)=k\left(k-1\right)^3-k\left(k-1\right)^2=k^4-4k^3+5k^2-2k$$

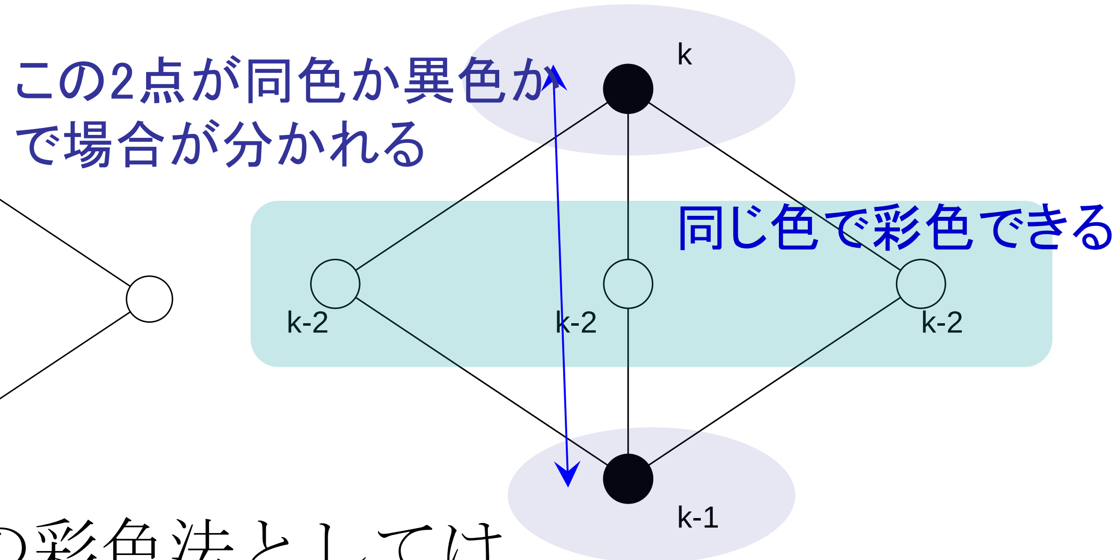


4つの点を持つ単純連結グラフの彩色指数は

$$P_G(k)=k^4-mk^3+ak^2-bk$$

例題9.6の(1)





完全二部グラフ$K_{2,3}$の彩色法としては

(1)a,bが同色の場合：　$k(k-1)^3$

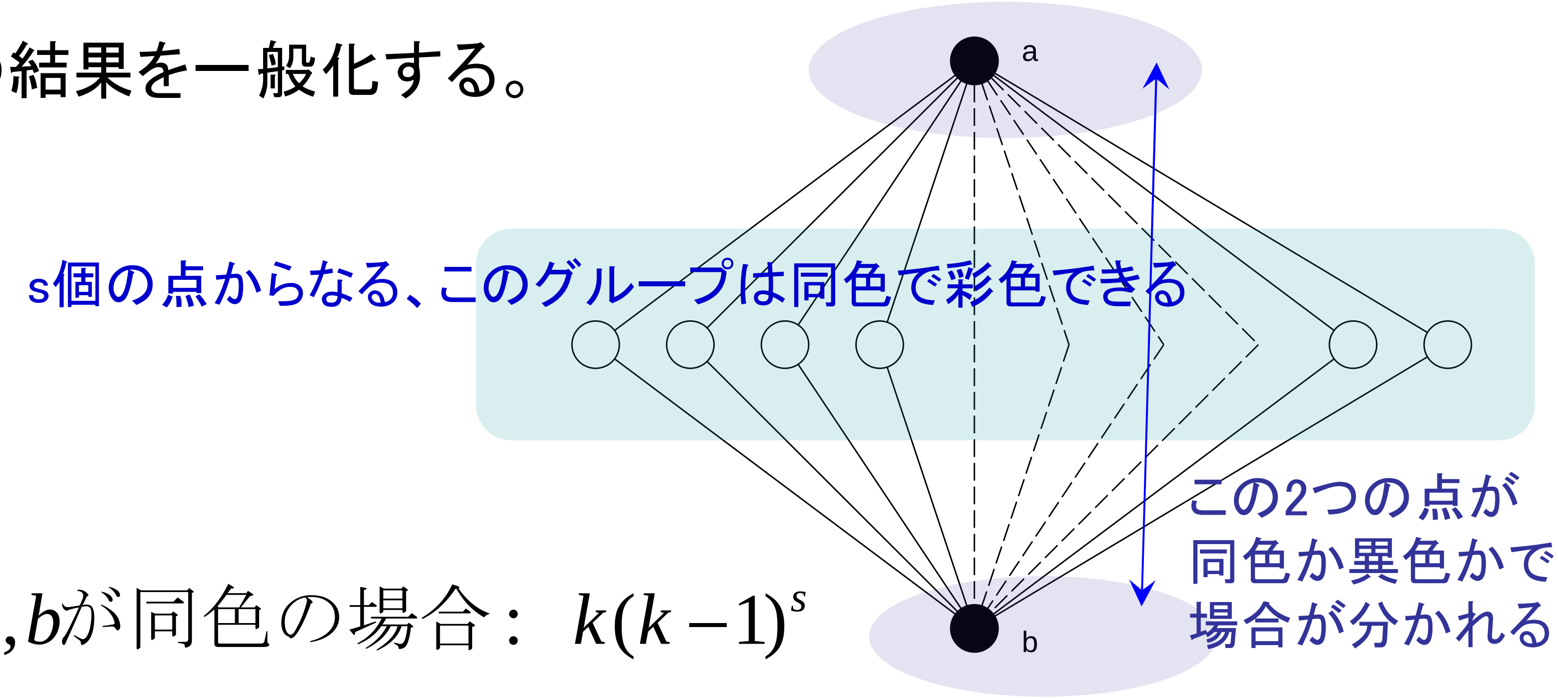
(2)a,bが異色の場合：　$k(k-1)(k-2)^3$

これらを合わせて、結局求める彩色多項式は

$$\boxed{P_{K_{2,3}}(k) = k(k-1)^3 + k(k-1)(k-2)^3}$$

例題9.6の(2)

(1)での結果を一般化する。



(1)点a,bが同色の場合： $k(k-1)^s$

(2)点a,bが異色の場合：$k(k-1)(k-2)^s$

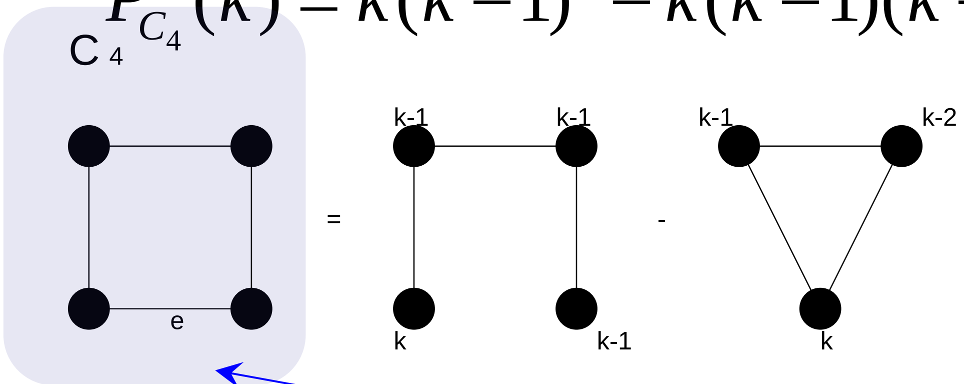
これらの合計として、求める彩色多項式は

$$\boxed{P_{K_{2,s}}(k) = k(k-1)^s + k(k-1)(k-2)^s}$$

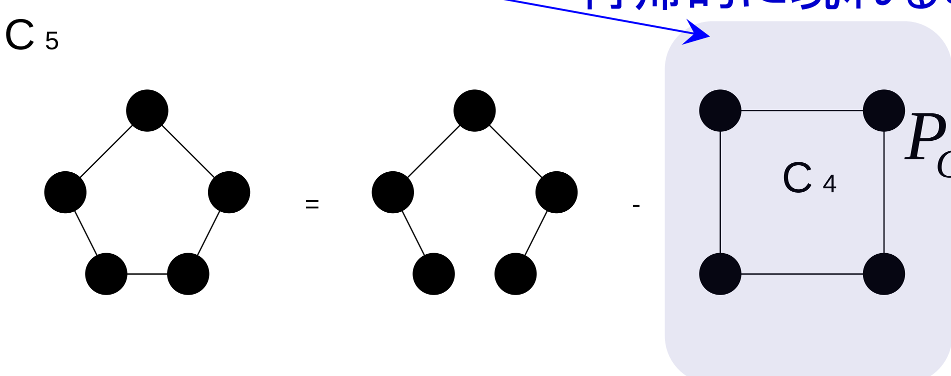
例題9.6の(3)

公式： $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$ を用いる

$$P_{C_4}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3)$$



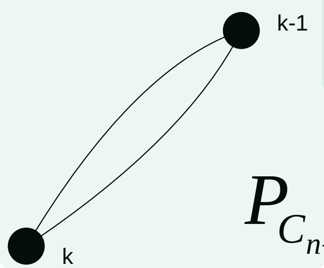
再帰的に現れることに注意



$$P_{C_5}(k) = k(k-1)^4 - P_{C_4}(k)$$

$$= k(k-1)(k^3 - 4k + 6k - 4)$$

例題9.6の(4)



$n=2$のとき、$P_{C_2}(k)=k(k-1)$となり、成立。

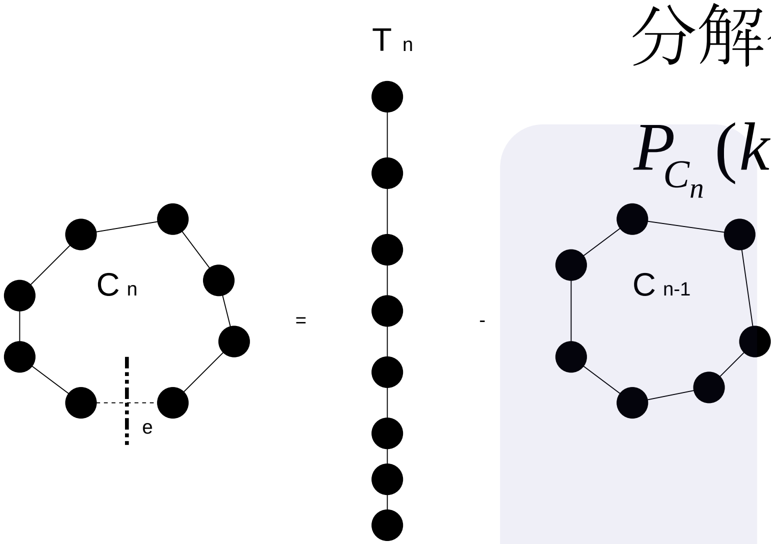
$$P_{C_{n-1}}(k)=(k-1)^{n-1}+(-1)^{n-1}(k-1)$$を仮定する。

分解公式より

$$P_{C_n}(k)=k(k-1)^{n-1}-P_{C_{n-1}}(k)$$

$$=k(k-1)^{n-1}-\left\{(k-1)^{n-1}+(-1)^{n-1}(k-1)\right\}$$

$$=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$$



再帰的に現れることを用いる

証明おわり。

演習問題10

図 163 の (b) に与えられたグラフの彩色多項式を求めよ.