

グラフ理論 #12

第12回 (最終回) 講義 7月23日

--- マルコフ連鎖 ---

情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

一次元酔歩

酔っ払いが各時刻で左右にそれぞれ確率 $1/3$, $1/2$ で動き
確率 $1/6$ で現在の位置にとどまる

はじめ酔っ払いはE4にいたとすると、状態ベクトルは

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

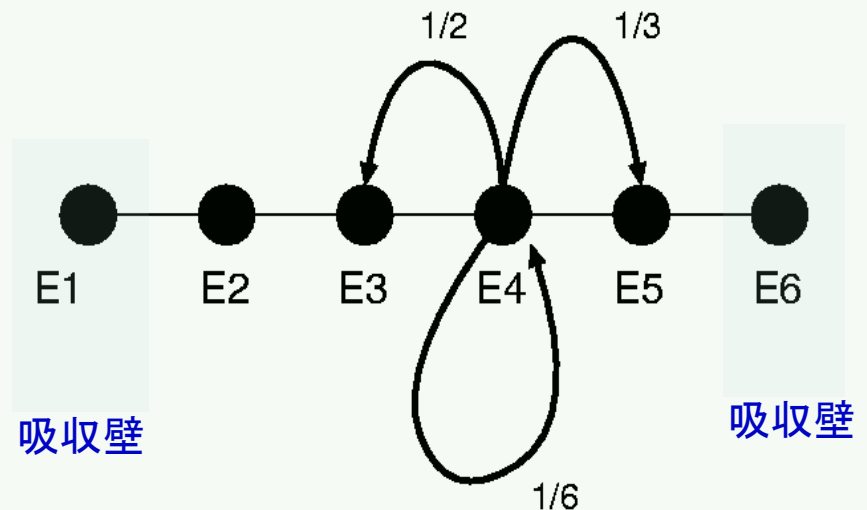
時刻 $t=0$ にE4にいる確率が1

1, 2分後には

$$\mathbf{x}_1 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0 \right)$$

$$\mathbf{x}_2 = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{13}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9} \right)$$

酔っ払いの動きの有向グラフ表現



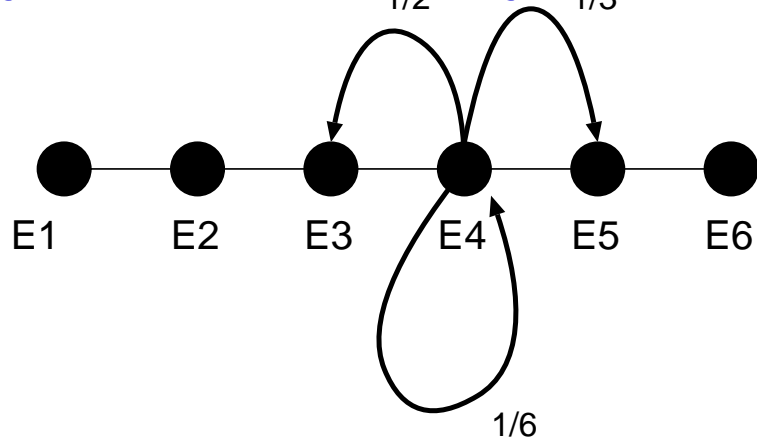
遷移行列

遷移行列

$$\mathbf{P} = \left(P_{ij} \right)$$

単位時間間隔で酔っ払いが状態 E_i から E_j へ移動する確率を第 j 成分とする行列

いまの例の場合には



各行の和は1

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

各単位時間間隔の状態は遷移行列で結ばれる

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 \mathbf{P}$$

成分のひとつを書き出してみると

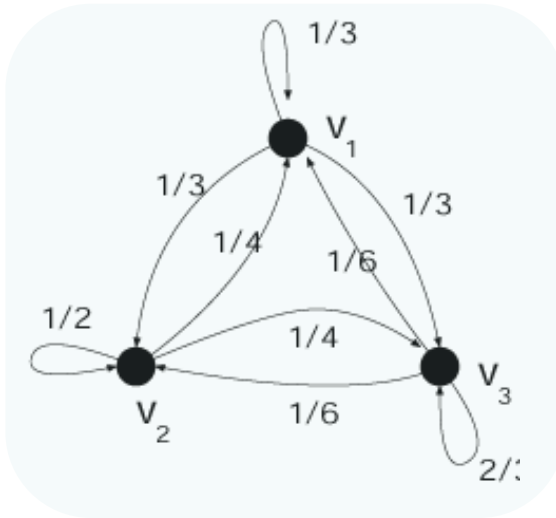
$$p_1^1 = p_0^1 + \frac{1}{2} p_0^2$$

E_2 にいた場合には確率 $1/2$ で E_1 に移る

E_1 にいた場合には確率 1 で E_1 に留まる 具体例を例題を通じて見ていく

例題10.5

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



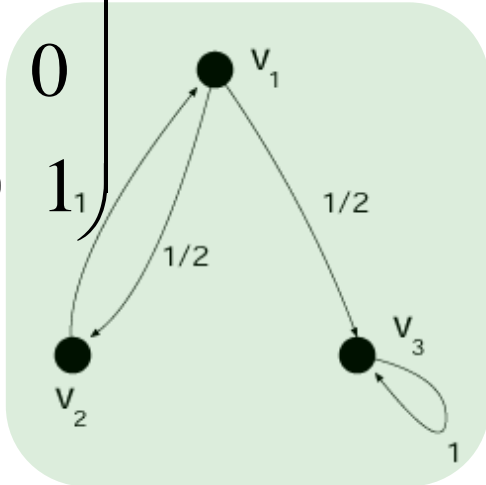
$$(p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1))$$

$$= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

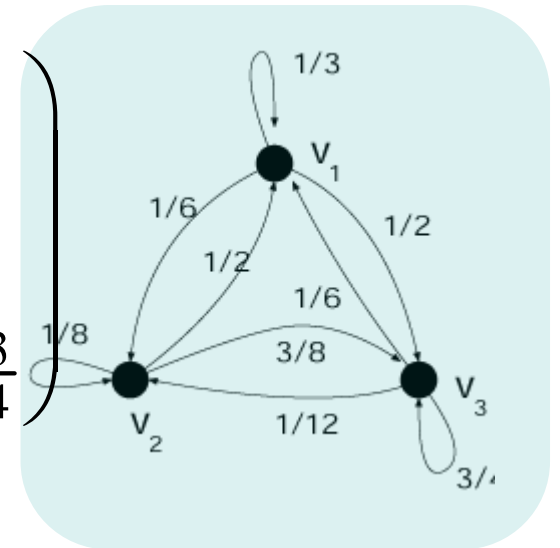
はじめ
v1にいる

次ステップ
で各点
にいる確率

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

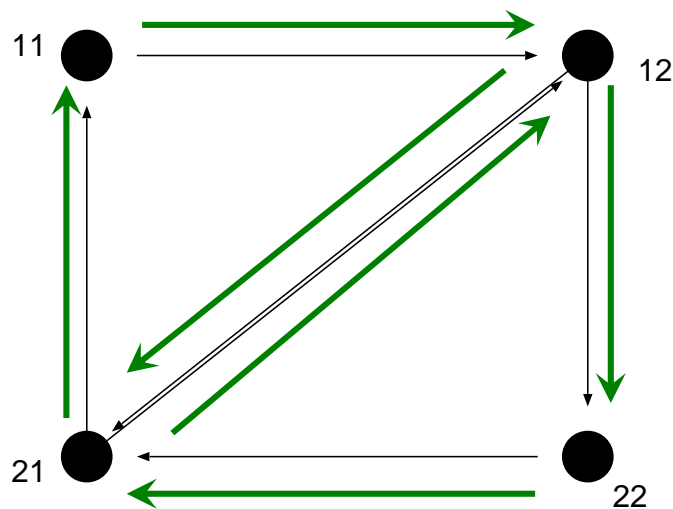


$$PQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$



例題10.6の1

$\{11, 12, 21, 22\}$ が $j = k$ のときのみ、点 ij と点 kl が結ばれる



具体的なオイラー小道

$$\text{outdeg}(11) = 1 = \text{indeg}(11)$$

$$\text{outdeg}(12) = 2 = \text{indeg}(12)$$

$$\text{outdeg}(21) = 2 = \text{indeg}(21)$$

$$\text{outdeg}(22) = 1 = \text{indeg}(22)$$

オイラー小道が存在する

定理23.1

例題10.6の2

遷移行列

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

状態ベクトル

$$\mathbf{x}^n = (p_a(n), p_b(n), p_c(n))$$

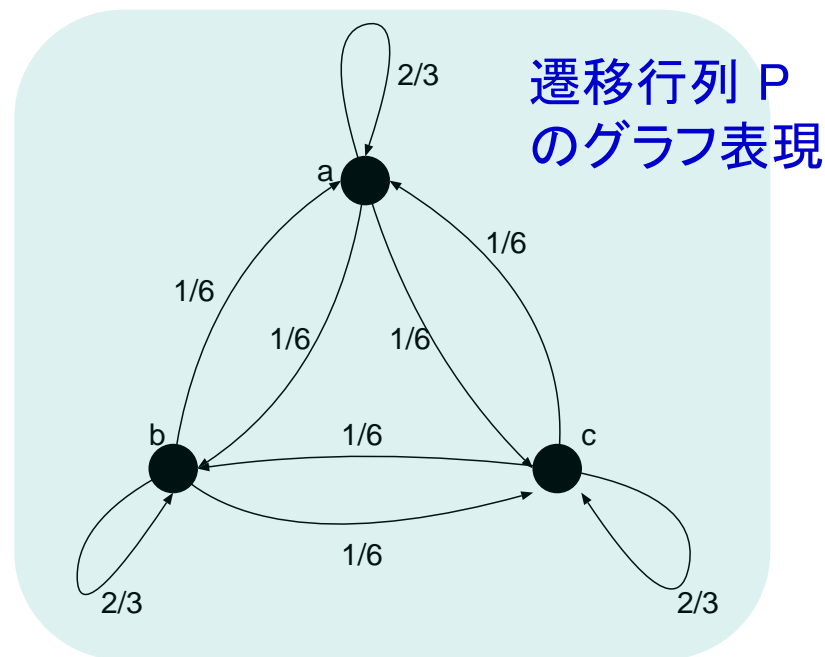
$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n \mathbf{P}$$

状態方程式

状態ベクトルの一般項

$$(p_a(n), p_b(n), p_c(n)) = \left(\frac{1}{3}(1 - 2^{-n}), \frac{1}{3}(1 + 2^{1-n}), \frac{1}{3}(1 - 2^{-n}) \right)$$

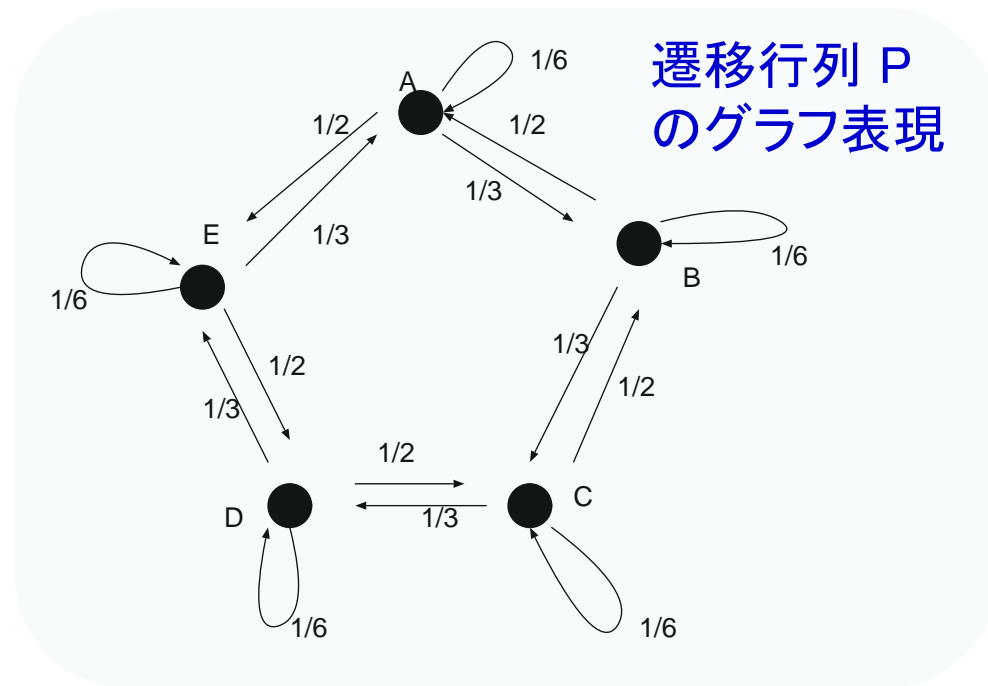
詳細は講義ノート



例題 10.7

遷移行列

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} \end{pmatrix}$$

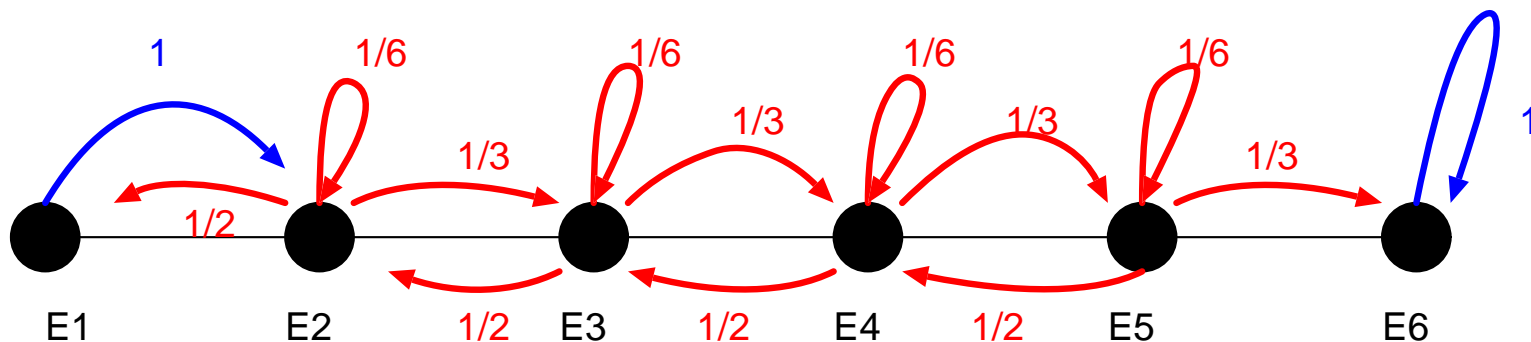


$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$ の行列要素は全て正

各状態は永続的かつ非周期的なので
このマルコフ連鎖はエルゴード的である

例題10.8

酔っ払いの動きの有向グラフ表現



対応する遷移行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^0 \mathbf{A}^n$$

状態更新式

6時間後に
各バーに居る確率

$$\mathbf{x}^0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$p(1) = 0.149756$$

$$p(2) = 0.457583$$

$$p(3) = 0.189558$$

$$p(4) = 0.129372$$

$$p(5) = 0.037380$$

$$p(6) = 0.036351$$

演習問題12

G は点数 n , 辺数 m の単純グラフであるものとする. このとき, 彩色多項式: $P_G(k)$ の

- (i) 主要項は k^n である.
- (ii) k^{n-1} の係数は $-m$ である.
- (iii) 各係数の符号は正負が交互に表れる.

をそれぞれ辺数 m に関する数学的帰納法によりそれぞれ証明せよ.